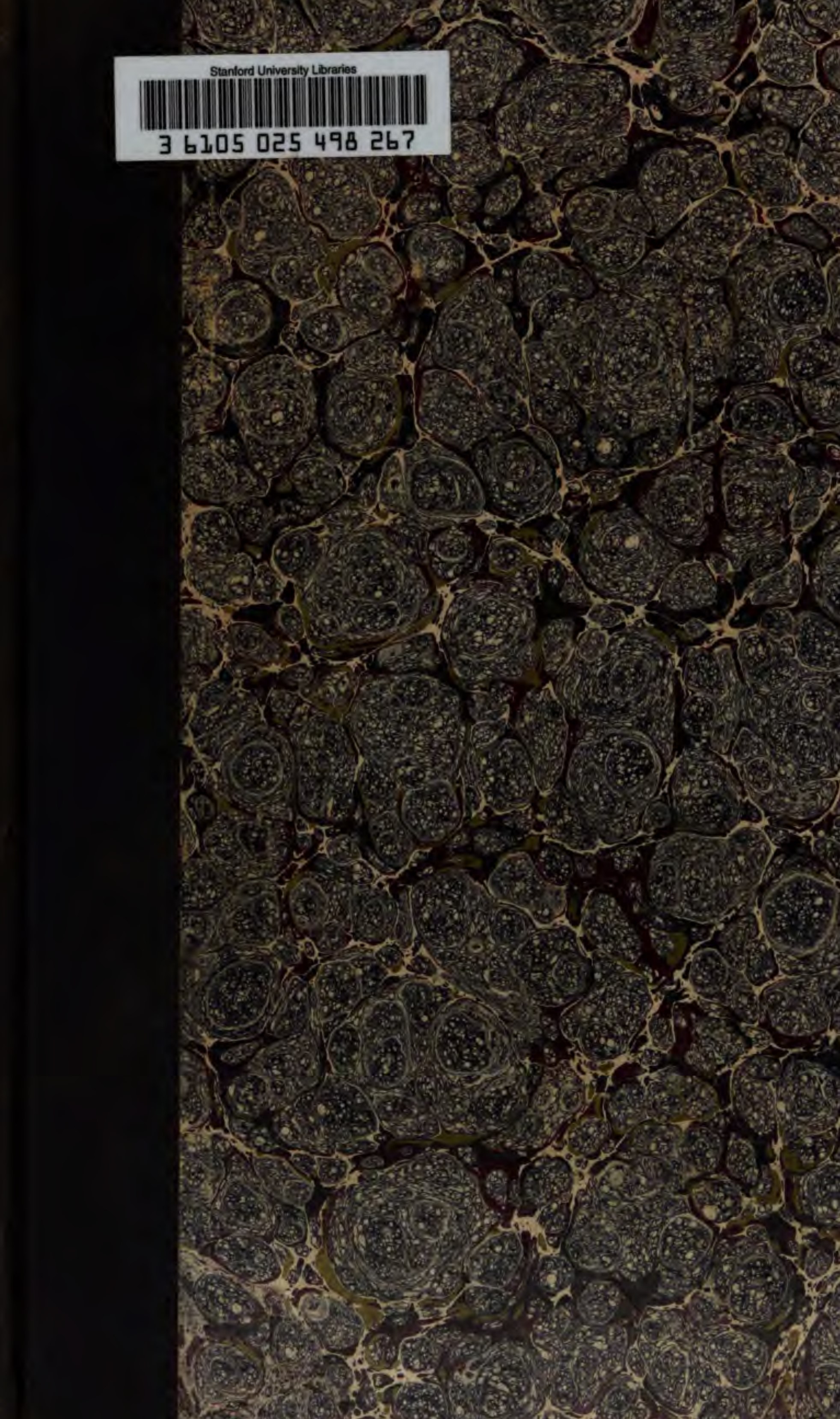
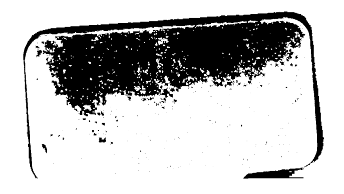








ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Siebzehnter Teil.

Mit 8 lithographirten Tafeln.

Leipzig und Dresden.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung

(H. Ehlers.)

1900.

Inhalts-Verzeichniss
des siebzehnten Teils.

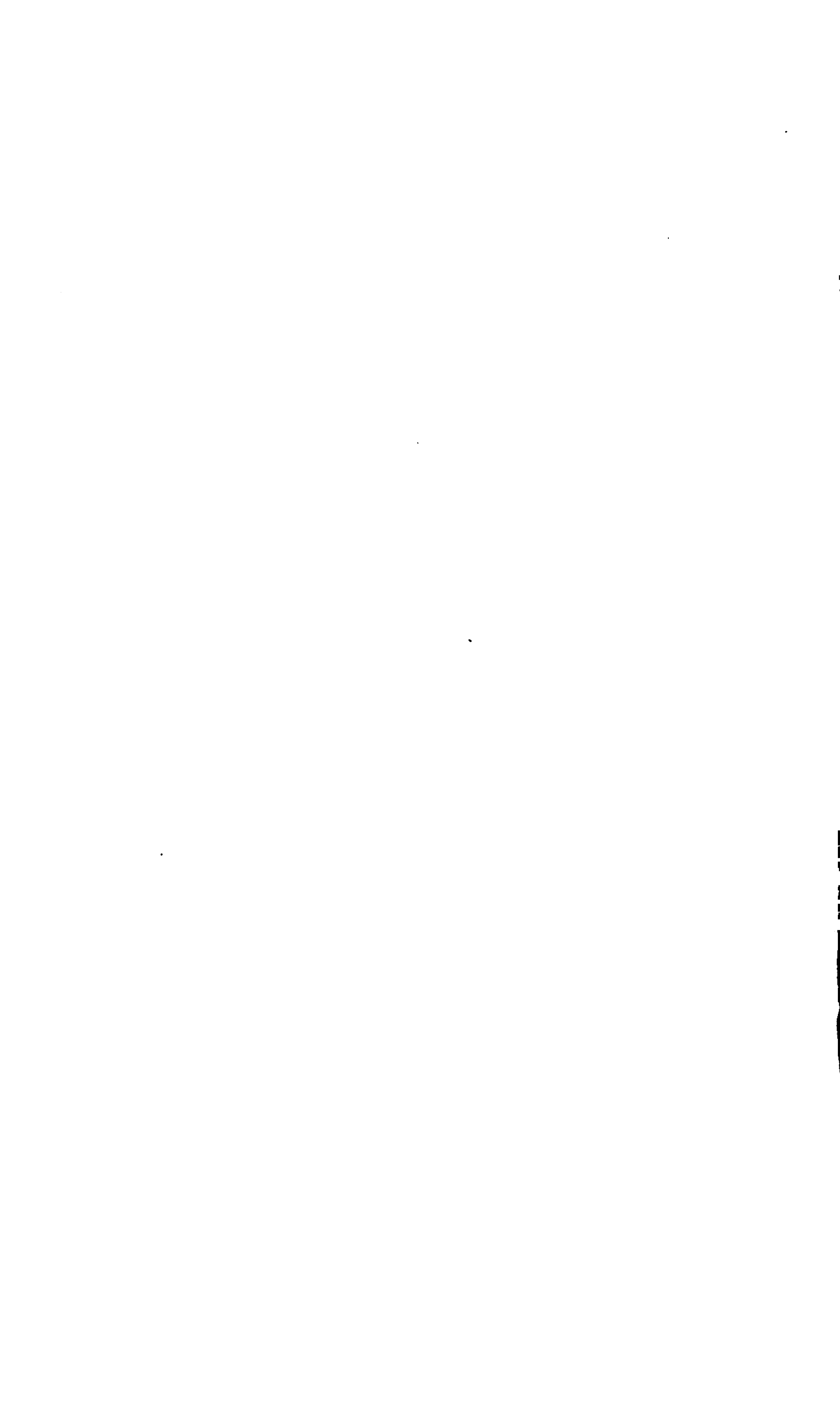
Integralrechnung.

Nr. der Abhandlung. Heft. Seite.

Geometrie der Ebene.

Geomtrie des Raumes.

Trigonometrie.



I.

Trigonometrische Studien.

Von

Kasimir Cwojdzinski

in Posen.

I. Berechnung des Winkels aus einer Function desselben.

Haben wir einen Kreis M mit dem Radius $= 1$ und in demselben den Centriwinkel $BMA = \alpha$, so ist das von B auf AM gefällte Lot

$$x_1 = \sin\alpha$$

das entsprechende Lot in einem halb so grossem Centriwinkel eines Kreises vom doppelten Radius

$$x_2 = 2\sin\frac{\alpha}{2} \text{ analog würde}$$

$$x_3 = 4\sin\frac{\alpha}{4}$$

$$x_4 = 8\sin\frac{\alpha}{8} \text{ sein.}$$

Bilden wir die Quotienten je zweier benachbarter, dann erhalten wir $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ oder

$$\frac{x_1}{x_2} = \cos\frac{\alpha}{2} \text{ analog}$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \cos\frac{\alpha}{4}, \text{ ferner}$$

$$\frac{x_3}{x_4} = \cos\frac{\alpha}{8} \text{ u. s. w.}$$

Drücken wir x z. B. x_4 durch χ_1 aus, dann ist

$$x_4 = \frac{x_1}{\cos\frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^3}}$$

Entsprechend muss

$$x_\infty = \frac{\chi_1}{\cos\frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^3} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^4} \cdot \cdot \cdot \cos\frac{\alpha}{2^\infty}} \text{ sein.}$$

Da nun χ_∞ mit dem Bogen des zugehörigen Winkels zusammenfallen muss, und dieser gleich allen Bögen der durch die oben erwähnte Operation erhaltenen Centriwinkel ist, ferner $x_1 = \sin\alpha$ und $\cos\frac{\alpha}{2^\infty} = 1$ ist, so ist

$$1) \quad x_\infty = b_{(\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^3} \cdot \cdot \cdot \cdot 1}$$

Nach dieser Formel könnte man Bögen derjenigen Winkel berechnen, deren Functionen leicht berechenbar sind, z. B.

$$b_{(36^0)} \text{ oder } b_{(30^0)} \text{ oder } b_{(45^0)}$$

Alle anderen Bögen lassen sich nach der Formel

$$b_{(\alpha)} = \frac{\alpha\, b_{(\beta)}}{\beta}$$

auf jene reduciren.

In diese Formel den Wert aus 1) gesetzt, giebt

$$2) \quad b_{(\alpha)} = \frac{180 \,.\, \sin\beta}{\beta \,.\, \cos\frac{\beta}{2^1} \cdot \cos\frac{\beta}{2^2} \cdot \cos\frac{\beta}{2^3} \cdot \cdot \cdot \cdot 1}$$

Da $\pi = b_{(180)}$ ist, so ist

$$3)\qquad \pi = \frac{180 \cdot \sin \alpha}{\alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1}$$

In dieser Gleichung kann α Werte durchlaufen ohne den Wert des Bruches zu ändern; er bleibt stets gleich dem Halbkreise vom Radius = 1.

Eine andere Umformung von Gl. 3) giebt den Wert eines Winkels an aus seiner Function, es ist

$$4)\qquad \alpha = \frac{180 \cdot \sin \alpha}{\pi \cos \frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1}$$

Löst man $\sin \alpha$ in $2^n \cdot \cos \frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdot \ldots \cos \frac{\alpha}{2^n} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, auf, dann kann man die genannten Formeln verallgemeinern.

Es wäre Gl. 3)

$$5)\qquad \pi = \frac{180 \cdot 2^n \cdot \sin \frac{\alpha}{2^n}}{\alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2^n+1} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^n+2} \cdot \ldots \cdot 1}$$

In der Form $\frac{\sin \frac{\alpha}{2^n}}{\alpha} \ldots$ könnte diese Gleichung zur Verwandlung der transcendenten Gleichung

$$p \cdot \sin \frac{\alpha}{2^n} = q\alpha$$

in eine algebraische benutzt werden.

Man erhielte die Gleichung

$$p \cdot \pi \cdot \cos \frac{\alpha}{2^n+1} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^n+2} \cdot \ldots 1 = 2^n \cdot 180 q$$

woraus man $\cos \frac{\alpha}{2^n+1}$ finden könnte und weiter aus $\cos \frac{\alpha}{2^n+1}$ gleich α mit Hilfe der Gl. 5). Der Grad der Gleichung würde aber ein unendlich hoher sein, falls man aber nur mit einer endlichen Genauigkeit rechnete, so würde es ein endlich hoher werden.

Nun zuletzt zu dem Verhältniss der Seiten zu den Winkeln.

Es ist bekannt, dass

$$\alpha : \beta : \gamma = b_{(\alpha)} : b_{(\beta)} : b_{(\gamma)}$$

nach 1) ist

$$b_{(\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \ldots \cdot 1}$$

mithin

$$6) \quad \alpha : \beta : \gamma = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \ldots \cdot 1} : \frac{\sin\beta}{\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{4} \cdot \ldots \cdot 1} : \frac{\sin\gamma}{\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{4} \cdot \ldots \cdot 1}$$

Nach dem Sinussatz ist

$$1 : 1 : 1 = \frac{a}{\sin\alpha} : \frac{b}{\sin\beta} : \frac{c}{\sin\gamma}$$

durch Multiplication dieser beiden Gleichungen

$$7) \quad \alpha : \beta : \gamma = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1} : \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2^1} \cdot \cos\frac{\beta}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1} : \frac{c}{\cos\frac{\gamma}{2^1} \cdot \cos\frac{\gamma}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1}$$

Berücksichtigen wir nun den Cosinussatz, nämlich

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{br}}$$

und die Relation

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

dann haben wir aus der Gleichung 7) die trigonometrischen Bezeichnungen eliminirt. Es ist dann

$$8) \quad \alpha : \beta : \gamma = \frac{a}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\right)} \cdot \ldots \cdot 1} : \frac{b}{\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \cdot \ldots \cdot 1} : \frac{c}{\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \cdot \ldots \cdot 1}$$

Dies ist der Satz vom Verhältniss der Seiten zu den Winkeln.

Er ermöglicht eine algebraische Lösung der 4 Hauptaufgaben der Trigonometrie. Es kommen dort 6 Grössen in Betracht a, b, c, α, β, γ. Sollen 3 derselben gefunden werden, so müssen 3 Gleichungen vorhanden sein. Die erste lautet

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

und die beiden anderen giebt unser Satz 8).

Sind die 3 Seiten gegeben, so fällt die Berechnung linear aus, in den übrigen Fällen aber führt die Berechnung im allgemeinen auf Gleichungen unendlich hohen Grades. Will man jedoch nur eine gewisse Genauigkeit erreichen, so wird man nur eine gewisse Anzahl der Glieder gebrauchen und der Grad der Gleichung wird endlich. Es ist leicht ersichtlich, dass der Grad desto höher wird, je genauer man rechnen will.

Zuletzt sei es noch erwähnt, dass in den Fällen, wo die Winkel in dem Verhältniss $1 : 2^n$ stehen (wo n eine ganze negative oder positive Grösse sein kann), der Satz abgeschlossene Zahlenwerte liefert.

Z. B. Im Bestimmungsdreieck des regulären 10-Ecks ist

$$\alpha : \beta = 1 : 2 \quad \text{daher}$$

$$2a = \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{b}{\sqrt{\frac{a^2 + 2ab}{4ab}}} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Für das reguläre 18-Eck gilt

$$4a = \frac{b}{\sqrt{\frac{a^2 + 2ab}{4ab}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{a^2 + 2ab}{4ab}}\right)}}$$

u. s. w.

Der Satz ist zusammen mit der Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

der allgemeinste der Dreieckslehre, und er enthält auch fast alle Dreieckssätze. Obwol er nur schwerlich praktische Anwendung finden kann, ist der Satz jedoch als Wahrheit für sich erwähnungswert.

II. Das Verhältniss der Seiten zu den Winkeln im Dreieck.

Haben wir einen Winkel $\alpha = AMB$, wo $AM = MB = 1$, so ist das Lot x_1 von B auf AM

$$x_1 = \sin \alpha$$

das entsprechende Lot in einem halbsogrossem Centriwinkel eines Kreises vom doppeltem Radius ist

$$x_2 = 2 \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ analog}$$

$$x_3 = 2^2 \sin \frac{\alpha}{2^2} \text{ u. s. w.}$$

der Quotient

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ ferner}$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \cos \frac{\alpha}{2^2} \text{ analog}$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \cos \frac{\alpha}{2^n}$$

$$x_n = \frac{x_1}{\cos \frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^3} \cdot \, . \, . \, \cos \frac{\alpha}{2^n}}$$

Nun fällt x_∞ mit dem zugehörigem Bogen zusammen, ist demnach $=$ dem Bogen von α $(b_{(\alpha)})$, mithin

$$\text{da } x_1 = \sin \alpha \quad \text{und} \quad \cos \frac{\alpha}{2^\infty} = 1$$

$$1) \quad b_{(\alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^3} \cdot \, . \, . \, . \, 1}$$

Nun ist es bekannt, dass

$$\alpha : \beta : \gamma = b_{(\alpha)} : b_{(\beta)} : b_{[\gamma)}$$

mithin

$$2)\quad \alpha : \beta : \gamma = \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2^1} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^3} \cdot \ldots \cdot 1} : \frac{\sin \beta}{\cos \frac{\beta}{2^1} \cdot \cos \frac{\beta}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1} : \frac{\sin \gamma}{\cos \frac{\gamma}{2^1} \cos \frac{\gamma}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1}$$

Nach dem Sinussatz ist

$$1 : 1 : 1 = \frac{a}{\sin \alpha} : \frac{b}{\sin \beta} : \frac{c}{\sin \gamma}$$

Durch Multiplication dieser Gl. mit Gl. 2) erhalten wir

$$3)\quad \alpha : \beta : \gamma = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1} : \frac{b}{\cos \frac{\beta}{2^1} \cdot \cos \frac{\beta}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1} : \frac{c}{\cos \frac{\gamma}{2^1} \cos \frac{\gamma}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1}$$

Mit Anwendung des Cosinussatzes

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \text{ist}$$

$$4)\quad \alpha : \beta : \gamma = \frac{a}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{s(s-a)}{be}} \cdot 1\right)}} : \frac{b}{\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \cdot \ldots \cdot 1} : \frac{c}{\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \cdot \ldots \cdot 1}$$

Dieser Satz ermöglicht zusammen mit der Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

eine algebraische Lösung der 4 Hauptaufgaben der Trigonometrie. Im Falle, wo die 3 Seiten gegeben sind, wird die Berechnung linear, in den übrigen Fällen führt sie auf Gleichungen unendlich hohen Grades. Benutzt man aber nur eine gewisse Anzahl der Glieder, dann wird sie endlich hohen Grades, und das Resultat wird auch nur auf eine gewisse Anzahl der Decimalstellen richtig sein. In den Fällen, wo $\alpha : \beta = 1 : 2^n$ (wo n eine ganze Zahl ist) liefert der Satz beendete Zahlenausdrücke.

Gl. 1) kann zur Berechnung von Bögen benutzt werden, ist jedoch die Function des zugehörigen Winkels unbekannt, dann würde die Form dienlich sein:

$$5)\qquad b_{(\beta)} = \frac{\beta \sin \alpha}{\alpha \cos \frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1}$$

woraus sich für π

$$6)\qquad \pi = \frac{180 \sin \alpha}{\alpha \cos \frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1}$$

ergiebt; und hieraus wieder eine Formel, die den Winkel aus seiner Function angiebt:

$$7)\qquad \alpha = \frac{180 \sin \alpha}{\pi \cos \frac{\alpha}{2^1} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdot \ldots \cdot 1}$$

III. Die Veränderung von Kreisbögen unter Beibehaltung ihrer Länge.

Bezeichnungen: Wir bezeichnen den Bogen, welcher dem Centriwinkel α entpricht und dem mit dem Radius r geschlagenen Kreise angehört, mit

$b_{r(\alpha)}$, ist $r = 1$, dann mit

$b_{(\alpha)}$ oder Bogen α

Es ist bekannt, dass der Umfang des Kreises $u = 2\pi r$ beträgt ferner dass

$b_{r(\alpha)} : 2\pi r = \alpha : 360$, ebenso dass

$b_{r'(\alpha')} : 2\pi r' = \alpha' : 360$; hieraus folgt

$$b_{r(\alpha)} = \frac{2\pi r \alpha}{360} \quad \text{und}$$

$$b_{r'(\alpha')} = \frac{2\pi r' \alpha'}{360}, \text{ mithin}$$

$b_{r(\alpha)} : b_{r'(\alpha')} = r\alpha : r'\alpha'$, dasselbe in Worten:

Bögen zweier Kreise verhalten sich wie die Producte aus den zugehörigen Centriwinkeln und Radien.

Dieser Satz ermöglicht eine Art geometrischer Rectification des Kreises und das progressive Gerademachen und progressive Krümmen der Bögen, ohne dass dieselben ihre Länge verändern.

Ist z. B. $b_{r(\alpha)}$ gegeben, und man soll diesen Bogen mehr krümmen, so müssen wir z. B. α ver$n$fachen und den Radius mit n dividiren; und umgekehrt, soll $b_{r(\alpha)}$ mehr gerade gemacht werden, so müssen die hier angegebenen Operationen vertauscht werden. Es wäre dann

$$b_{r(\alpha)} : b_{nr}\left(\frac{\alpha}{n}\right) = (\alpha \,.\, r) : \left(\frac{\alpha}{n} \,.\, nr\right)$$
$$= \alpha r : \alpha r, \text{ das heisst}$$
$$b_{r[\alpha)} = b_{nr}\left(\frac{\alpha}{n}\right)$$

Nun ist klar, dass das Gerademachen der Bögen nur in den Fällen möglich ist, wo die nötige Teilung durchführbar ist.

Durch unendlich mal fortgesetztes derartiges Operiren würde man aus einem Kreisbogen eine Gerade und umgekehrt machen können.

Wir führen diese Construction hier aus, da sie als Figur für die folgenden Ausführungen benutzt werden kann.

Gegeben $b_{r(\alpha)}$, gesucht $b_{\infty r}\left(\frac{\alpha}{\infty}\right)$. Die Ausführung ist aus der Figur ersichtlich.

Die Punkte $B_1\, B_2$ . . . bilden natürlich eine besondere Curve, deren Construction auch die Rectification des Kreises lösen würde, es ist jedoch zu bemerken, dass dieselbe noch weit schwieriger zu berechnen ist, als der Kreis selbst.

IV. Die Berechnung von Kreisbögen ohne Benutzung von π und die sich daraus für diese Zahl ergebenden Reihen.

Die bisherigen Ausführungen enthielten eine rein geometrische, mithin auch unausführbare Rectification des Bogens.

Fällen wir von den Punkten B_1, B_2 . . . Lote auf AM, dann ist das erste Lot

a) $x_1 = r \,.\, \sin\alpha$, ferner

b) $x_2 = 2r \,.\, \sin\frac{\alpha}{2}$, und

c) $x_3 = 4r \,.\, \sin\frac{\alpha}{4}$ u. s. w

Bilden wir die Quotienten je zweier benachbarten Lote, dann ist

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{r \,.\, \sin\alpha}{2r \,.\, \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2}}{2\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{4(1-\cos\alpha)}}{2}}$$

d. h.

d) $\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}$. Analog erhalten wir

e) $\frac{x_2}{x_3} = \cos\frac{\alpha}{4}$, ebenso ferner

f) $\frac{x_3}{x_4} = \cos\frac{\alpha}{8}$. Aus der Gleichung d) folgt für x_2 der Wert

$\frac{\chi_1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ d. h.

g) $x_2 = \frac{\chi_1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Ebenso folgt aus der Gleichung e)

h) $x_3 = \frac{x_2}{\cos\frac{\alpha}{4}}$, und analog ist

i) $x_4 = \frac{\chi_3}{\cos\frac{\alpha}{8}}$

Drücken wir ein beliebiges x durch χ_1 aus, so ist z. B.

x_3 nach der Gleichung h) $= \frac{\chi_2}{\cos\frac{\alpha}{4}}$

x_2 nach der Gleichung g) $= \frac{\chi_1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, folglich

$$x_3 = \frac{\chi_1}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4}}.$$ Analog ist

$$x_4 = \frac{\chi_1}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8}}$$

Wiederholen wir diese Operation bis in die Unendlichkeit, so erhalten wir

$$x_\infty = \frac{\chi_1}{\cos\frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^3} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^4} \cdot \cdot \cdot \cos\frac{\alpha}{2^\infty}}$$

Nun ist $\chi_\infty = b_{r(\alpha)}$, was schon aus der geometrischen Untersuchung ersichtlich ist; ferner ist

$$\cos\frac{\alpha}{2^\infty} = \cos\frac{\alpha}{\infty} = \cos 0 = 1$$

Setzen wir $r = 1$, dann ist

$$b_{r(\alpha)} = b_{(\alpha)} \quad \text{und} \quad \chi_1 = \frac{\chi_1}{r} = \sin\alpha, \text{ mithin}$$

$$1) \qquad b_{(\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^3} \cdot \cdot \cdot \cdot 1}$$

Nun ist bekannt, dass sich in gleichen Kreisen Bögen wie Winkel verhalten, d. h.

$$b_{r(\alpha)} : b_{r(\beta)} = \alpha : \beta$$

mithin, falls $r = 1$ ist

$$b_{(\beta)} = \frac{\beta \cdot b_{(\alpha)}}{\alpha}$$

Setzen wir in diese Gleichung für $b_{(\alpha)}$ den Wert aus der Gleichung 1), dann erhalten wir

$$2) \qquad b_{(\beta)} = \frac{\beta \cdot \sin\alpha}{\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cdot \cdot \cdot 1}$$

Die Gleichung 1) würde in dem Falle anzuwenden sein, falls α ein Winkel ist, dessen Function leicht berechenbar ist, z. B. $\alpha = 30^0$ oder $= 36^0$ oder $= 45^0$, kurz; falls α durch Verdoppeln eine durch 3 teilbare ganze Zahl von Graden enthält (angenommen die 360 Teilung des Kreises).

Dagegen wende man die Gleichung 2) an, falls ein anderer Winkel gegeben ist, wobei wieder α einen leicht berechenbaren Winkel bedeuten soll.

Nun kann man Gleichung 2) noch verallgemeinern. Es ist bekannt, dass

$$\sin\alpha = 2 \,.\, \sin\frac{\alpha}{2} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2}$$

hieraus folgt ferner

$$\sin\alpha = 2 \,.\, \cos\frac{\alpha}{2} \,.\, 2 \,.\, \cos\frac{\alpha}{4} \,.\, \sin\frac{\alpha}{4}$$

$$= 2 \,.\, \cos\frac{\alpha}{2} \,.\, 2 \,.\, \cos\frac{\alpha}{4} \,.\, 2 \,.\, \cos\frac{\alpha}{8} \,.\, \sin\frac{\alpha}{8}, \text{ oder}$$

$$\sin\alpha = 2^n \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^1} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^2} \,.\,.\,.\, \cos\frac{\alpha}{2^n} \,.\, \sin\frac{\alpha}{2^n}$$

Setzen wir aus dieser Gleichung für $\sin\alpha$ den Wert in die Gleichung 2) ein, so erhalten wir

$$b_{(\beta)} = \frac{\beta \,.\, 2^n \,.\, \sin\frac{\alpha}{2^n} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^1} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^2} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^3} \,.\,.\,.\, \cos\frac{\alpha}{2^n}}{\alpha \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^1} \;\; \cos\frac{\alpha}{2^2} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^3} \,.\,.\,.\, \cos\frac{\alpha}{2^n} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \,.\,.\,.\,.\, 1}$$

und falls wir den Bruch heben, erhalten wir die Gleichung

$$3) \qquad b_{(\beta)} = \frac{\beta \,.\, 2^n \,.\, \sin\frac{\alpha}{2^n}}{\alpha \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^{n+2}} \,.\,.\,.\,.\, 1}$$

Setzen wir $n = -m$, dann ist

$$4) \quad b_{(\beta)} = \frac{\beta \,.\, \sin(2^m\alpha)}{\alpha \,.\, 2^m \,.\, \cos(2^{m-1}\alpha \,.\, \cos(2^{m-2}\alpha) \,.\,.\,.\, 1}$$

Diese Gleichung 4) erhält man ebenfalls durch folgende Zerlegung von $\sin\alpha$. Es ist bekannt, dass

$$\sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}, \quad \text{ferner} \quad \sin 2\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha}, \text{ folglich}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin(2^2\alpha)}{2^2\cos\alpha \,.\, \cos 2\alpha}$$

Fahren wir in analoger Weise weiter fort, so kommen wir zu der Gleichung

$$\sin\alpha = \frac{\sin(2^m\alpha)}{2^m \cos\alpha \cos(2\alpha) \,.\, \cos(2^2\alpha) \ldots \cos(2^{m-1}\alpha)}$$

oder umgekehrt geschrieben

$$\sin\alpha = \frac{\sin(2^m\alpha)}{2^m \cos(2^{m-1}\alpha) \,.\, \cos(2^{m-2}\alpha) \ldots \cos\alpha}$$

Auch die Sätze 3) und 4) werden in geeigneten Fällen anzuwenden sein. —

Bevor wir weiter gehen, wollen wir eine kurze Determination für die Sätze 1)—4) geben, und zwar in Betreff der Werte von α resp. $2^n\alpha$ resp. $\frac{\alpha}{2^n}$, kurz des betreffenden Winkels.

Die Sätze gelten auch für Winkel die $> 360^0$ sind. Wir brauchen den Beweis nur für $\alpha \leqq 180^0$ zu führen, und dieser ist geliefert, falls man sagt, dass $\sin(180^0 - z)$, wo z einen sehr kleinen Winkel bedeutet, und ebenso

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos 90 - \frac{z}{2}$$

sein muss, denn dann müssen alle übrigen Glieder $+$ sein und mithin auch der ganze Ausdruck. Ist $\alpha > 180^0$, so kann es kein Dreieckwinkel sein, und wir brauchen den Fall nicht vorzuführen.

Den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ nimmt $b_{(\beta)}$ ein, falls $\sin\alpha = 0$ und eins der Cosinusse $= 0$. Dies tritt z. B. ein,

falls $\alpha = 180^0$ oder $\alpha = 360^0$ resp. falls $\alpha \,.\, 2^n = 180^0$ resp. $= 360^0$

ist; es wäre in diesen Fällen z. B.

$$b_{(\beta)} = \frac{\beta \cdot 2^n \,.\, \sin 180}{180 \,.\, \cos 90 \,.\, \cos 45 \ldots 1} = \frac{\beta \,.\, 2^n \,.\, 0}{180 \,.\, 0 \,.\, \cos 45} = \frac{0}{0}$$

Diese 4 Sätze, von welchen der 2)te die grösste Anwendung finden wird, ermöglichen die „freie“ Berechnung von Kreisbögen, d. h. eine Berechnung, zu welcher man keine Tabellen und keine Zahlenwerte (den für π) auswendig wissen und gebrauchen muss.

Aus diesen Sätzen ergeben sich z. B. folgende Werte für $r = 1$

$$b_{(30^0)} = \frac{\sin 30^0}{\cos 15^0 \cdot \cos 7^0\, 30'} \quad \text{(nach Gleichung 10)}$$

oder da $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ und $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$b_{(30^0)} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \ldots 1}, \text{ und analog}$$

$$b_{(60^0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \ldots 1}. \text{ Ebenso}$$

$$b_{(45^0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \ldots 1}$$

Nennen wir das Verhältniss des goldenen Schnittes

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618034 .$$

ψ, dann ist

$$\psi + 1 = \frac{1}{\psi}, \quad \text{oder} \quad \psi^{n+2} + \psi^{n+1} = \psi^{n}$$

d. s. w., mithin die Gleichung

$$b_{(36^0)} = \frac{\sqrt{\psi \cdot \sqrt{5}}}{\sqrt{3+\psi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3+\psi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3+\psi}}} \ldots 1}$$

Hätten wir einen nicht in der Reihe von 3^0 vorkommenden Bogen zu berechnen, so würde der Satz 2) anzuwenden sein. Es sei z. B. $b_{(17^0)}$ zu berechnen. Es wäre dann

$$b_{(17^0)} = \frac{17 \cdot \sqrt{2}}{45 \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \ldots 1}$$

oder

$$b_{(13^0\, 13'\, 13'')} = \frac{13 \cdot (60^2 + 6^1)}{30 \cdot 60^2 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \ldots 1}$$

Nun ist klar, dass aus jedem Werte für einen solchen Bogen dieselbe Zahl π berechnet werden kann.

Es ergeben sich auch, entsprechend dreien geometrischen Elementen, drei Reihen für π

$$\text{I)}\quad \pi = \frac{2}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\ldots\ldots 1}$$

$$\text{II)}\quad \pi = \frac{3}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\ldots\ldots 1}$$

$$\text{III)}\quad \pi = \frac{5\cdot\sqrt{\psi}\cdot\sqrt{5}}{\frac{1}{2}\sqrt{3+\psi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3+\psi}}\,\ldots\ldots 1}$$

Diese 3 Reihen sind natürlich enthalten in dem Schema

$$b)_{180)} = \pi = \frac{180\cdot\sin\alpha}{\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2^1}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\,\ldots\ldots 1}$$

Wir haben nun die Berechnung der Zahl π in unserer Hand und wir können dieselbe soweit führen, wie es uns beliebt. Wir wollen hier π numerisch nicht berechnen, denn die Methode ist aus den Reihen ersichtlich, und andererseits hätte dies keinen Zweck, da π schon mehr als 500 Stellen berechnet ist.

Von nun ab sehen wir π als bekannt an und wir werden es siebenstellig benutzen, wie folgt:

$$\pi = 3{,}1415\,926$$

V. Die aus der freien Bogenberechnung sich ergebende goniometrische Constante und ihre verschiedenen Umformungen.

Nehmen wir die Gleichung 3) oder 4) und dividiren dieselbe mit β, dann ist

$$\frac{b_{(\beta)}}{\beta} = \frac{2^n\cdot\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{n+2}}\,\ldots\ldots 1}$$

Nun ist $\frac{b_{(\beta)}}{\beta} = \frac{b_\alpha}{\alpha}$, mithin auch $= \frac{\pi}{180}$, folglich

$$\text{5)}\quad \frac{180}{\pi} = \frac{\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{n+2}}\,\ldots\ldots 1}{2^n\cdot\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

Nehmen wir $n = 0$ (d. h. Gleichung 2), dann ist

$$6)\quad \frac{180}{\pi} = \frac{\alpha \,.\, \cos\frac{\alpha}{2} \,.\, \cos\frac{\alpha}{4} \,.\,.\,.\,.\, 1}{\sin\alpha}$$

Wir sehen also eine sehr merkwürdige Constante vor uns, welche

$$\frac{180}{\pi} = 57{,}295\,79 \,.\,.\,.$$

beträgt. In dieser Gleichung kann α alle Werte von 0 bis ∞ und von $-\infty$ bis 0 durchlaufen, und der Wert des Bruches bleibt stets gleich 57,295 79 . . .

Der Constantensatz dürfte in folgender Form am leichtesten zu merken sein:

$$7)\quad 180 \,.\, \sin\alpha = \pi \,.\, \alpha \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^1} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^2} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^3} \,.\,.\,.\, 1$$

oder dasselbe in Worten:

Der 180fache Sinus eines Winkels ist gleich dem Winkel selbst multiplicirt mit π und allen Cosinussen des fortgesetzt mit 2 dividirten Winkels.

In der allgemeinern Form würde der Satz heissen:

$$8)\quad \beta \,.\, \sin\alpha = b_{(\beta)} \,.\, \alpha \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^1} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^2} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^3} \,.\,.\,.\,.\, 1$$

oder gar

$$9)\quad 2^n\beta \,.\, \sin\frac{\alpha}{2^n} = b_{(\beta)} \,.\, \alpha \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^{n+2}} \,.\,.\,.\,.\, 1$$

Lösen wir eine der bis jetzt aufgestellten Gleichungen, z. B. Gleichung 7) nach α auf, dann ist

$$10)\quad \alpha = \frac{180 \,.\, \sin\alpha}{\pi \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^1} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^2} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^3} \,.\,.\,.\,.\, 1}$$

Dieser Satz kann zur Berechnung des Winkels aus seiner Function dienen. Ist z. B. $\sin\alpha = \frac{1}{7}$, dann ist

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}},\ \text{mithin, da}\ \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ \text{ist,}$$

$$\alpha = \frac{180 \cdot \frac{1}{7}}{\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1+\sqrt{1-\frac{1}{49}}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1+\sqrt{1-\frac{1}{49}}\right) \cdot \,.\,.\,.1}}}$$

Nun ist es auch klar, dass wir Winkel durch Seiten ausdrücken können, denn der Zusammenhang der Functionen und Seiten ist bekannt, andererseits liefert der Constantensatz den Zusammenhang der Function mit dem Winkel. Es ist z. B.

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{v^2 + b^2 - a^2}{2b \cdot c}},\ \text{ferner}\ \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-\alpha)}{b \cdot c}}\ \text{u. s. w.}$$

Es ist also der Constantensatz, welcher uns zu dem Verhältniss der Seiten zu den Winkeln im Dreieck führt. Mit Hülfe des Constantensatzes lassen sich auch verschiedene Formeln finden, z. B. $\sin 2^n\alpha$.

Nach dem Satze ist

$$\frac{180}{\pi} = \frac{\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \,.\,.\,.\,.\,1}{\sin\alpha},\ \text{mithin auch}\ \frac{180}{\pi} = \frac{\beta \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \,.\,.\,.\,.\,1}{\sin\beta}$$

ist $\beta = 2^n\alpha$, dann ist

$$\frac{\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \,.\,.\,.\,.\,1}{\sin\alpha} = \frac{2^n\alpha \cdot \cos(2^{n-1}\alpha) \cdot \cos(2^{n-2}\alpha) \ .\ .\ .\ \cos(2^{n-n}\alpha)\ .\ .\ .\ 1}{\sin(2^n\alpha)}$$

Hebt man beide Seiten durch α und $+\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \ .\ .\ .\ 1$, dann ist

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{2^n \cdot \cos(2^{n-1}\alpha) \cdot \cos(2^{n-2}\alpha)\ .\ .\ \cos\alpha}{\sin(2^n\alpha)},\ \text{mithin}$$

$$\sin(2^n\alpha) = 2^n \sin\alpha \cdot \cos(2^{n-1}\alpha) \cdot \cos(2^{n-2}\alpha)\ .\ .\ .\ \cos\alpha$$

Ist z. B. $n = 1$, dann ist

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

VI.

Einige der erwähnten Formeln durch Tangenten ausgedrückt und die transcendente Gleichung

$$p \cdot \sin \frac{\alpha}{2^n} = q\alpha$$

Denken wir uns in der Figur des Abschnitts I. nicht von den Punkten $B_1 B_2 \ldots$ Lote gefällt, sondern in A das Lot errichtet und alle Schenkel MB soweit verlängert, bis dass sie sich mit demselben schneiden, dann ist der Abschnitt des Lotes, welcher zu α gehört,

$$x_1 = r \cdot \operatorname{tg} \alpha, \text{ analog}$$

$$x_2 = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ ferner}$$

$$x_3 = 4r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}, \text{ folglich}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2^1}}$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2^2}}$$

Durch analoges Verfahren wie im Abschnitt II. erhält man

$$x_\infty = x_1 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2^1}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2^\infty}\right)$$

oder

$$11) \quad b_{(\alpha)} = \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2^1}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2^2}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2^3}\right) \cdots 1$$

Entsprechend der Gleichung 2) würde $b_{(\beta)}$ sein:

$$12) \quad b_{(\beta)} = \frac{\beta \cdot \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2^1}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2^2}\right) \cdots 1}{\alpha}$$

Analog zu 6) ergibt sich auch ein Constantensatz und andere Umformungen. Wir geben hier der Kürze wegen nur noch die Formel für π.

$$13)\qquad \pi = \frac{\dfrac{180 \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha \left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(2-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{4}\right) \,.\,.\,.\,.\, 1}{\alpha}}{}$$

Für die drei Elemente der Reihen von 45°, 60° und 36° ergeben sich wieder die folgenden 3 Reihen

$$\text{IV)}\qquad \pi = \frac{180 \,.\, 2 \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}} \,.\, 2 \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{2}})} \,.\,.\,.\,.\, 2}{45 \,.\, (1+\sqrt{\frac{1}{2}}) \,.\, (1+\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{2}})}) \,.\,.\,.\,. 2}$$

$$\text{V)}\qquad \pi = \frac{180}{60} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1+\frac{1}{2} \,.\, \sqrt{3}} \cdot \frac{2 \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2} \,.\, \sqrt{3})}}{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\sqrt{3})}} \,.\,.\,. 1$$

$$\text{VI)}\qquad \pi = \frac{180}{36} \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha \,.\,.\,.\, \text{für } \alpha \; 36^0 \text{ gesetzt und } \psi \text{ eingeführt.}$$

Mit Hülfe des Constantensatzes kann auch die transcendente Gleichung von der Form

$$p \,.\, \sin\frac{\alpha}{2^n} = q\alpha$$

in eine algebraische umgeformt werden.

Es ist nach Satz 9)

$$2^n \beta \sin\frac{\alpha}{2^n} = b_{(\beta)} \,.\, \alpha \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^n+1} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^n+2} \,.\,.\,.\,.\, 1$$

mithin

$$\frac{q \,.\, \alpha}{p \,.\, \sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{q \,.\, 180 \,.\, 2^s}{p \,.\, \pi \cos\frac{\alpha}{2^s+1} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^x+2} \,.\,.\,.\,.\, 1}$$

Da nun

$$p \,.\, \sin\frac{\alpha}{2^s} = q \,.\, \alpha, \text{ so ist auch}$$

$$q \,.\, 180 \,.\, 2^s = p \,.\, \pi \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^s+1} \,.\,.\,.\,.\, 1, \text{ mithin}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2^s+1} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^s+2} \,.\,.\,.\, 1 = \frac{180 \,.\, z^y \,.\, q}{p \,.\, \pi}$$

Bezeichnet man $\cos\frac{a}{2^n+1}$ mit χ, dann ist

$$\chi \cdot \sqrt{\frac{1+\chi}{2}} \,.\, \sqrt{\frac{1}{2} \,.\, \left(1+\sqrt{\frac{1}{2} \,.\, (1+\chi)}\right)} \,.\,.\,.\, 1 = \frac{180 \,.\, 2^s \,.\, q}{p \,.\, \pi}$$

Wollten wir alle Glieder der Reihe benutzen, so würden wir eine Gleichung von ∞ hohem Grade erhalten, das Resultat würde aber auch auf ∞ viel Decimalstellen richtig, d. h. absolut genau berechnet sein. Wir werden aber nach der Anzahl der Decimalstellen, welche wir genau erhalten wollen, auch die Anzahl der Glieder nehmen; falls wir das Resultat auf 7 Decimalstellen richtig berechnet haben wollen, werden wir ungefähr nur 13 oder nur 12 Glieder brauchen; die nächsten Glieder werden nämlich für uns schon 1 betragen, d. h. wir werden sie nicht zu berücksichtigen brauchen. Allerdings wird der Grad der Gleichung schon recht hoch sein, da schon bei Benutzung dieselbe den 7ten Grad erreicht. Würden wir χ schon berechnet haben, so hätten wir, falls z. B. $\chi = \alpha$,

$$\cos\frac{\alpha}{2^{s+1}} = \alpha$$

und wir könnten mit Hülfe des Satzes 9) α finden.

Die Gleichungen von der Form

$$p \,.\, \operatorname{tg}\alpha = q \,.\, \alpha$$

würden mit Hülfe des Satzes 13) zu lösen sein.

VII.

Das Verhältniss der Seiten zu den Winkeln im Dreieck.

Es ist bekannt, dass

$$\alpha : \beta : \gamma = b_{(\alpha)} : b_{(\beta)} : b_{(\gamma)}$$

ist. Nach Gleichung 1) ist

$$b_{(\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2^1} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^2} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2^3} \,.\,.\,.\,.\, 1} \text{ mithin}$$

$$14)\qquad \alpha : \beta : \gamma = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2} \,.\, \cos\frac{\alpha}{4} \,.\,.\,.\,.\, 1} : \frac{\sin\beta}{\cos\frac{\beta}{2} \,.\, \cos\frac{\beta}{4} \,.\,.\,.\,.\, 1} : \frac{\sin\gamma}{\cos\frac{\gamma}{2} \,.\, \cos\frac{\gamma}{4} \,.\,.\,.\,.\, 1}$$

Weiter ist bekannt, dass

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \quad \text{oder}$$

$$1 : 1 : 1 = \frac{a}{\sin\alpha} : \frac{b}{\sin\beta} : \frac{c}{\sin\gamma} \quad \text{ist.}$$

Multipliciren wir diese Form des Sinussatzes mit Gleichung 14), so erhalten wir die Gleichung

$$15) \quad \alpha : \beta : \gamma - \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \; . \; . \; . \; 1} : \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2} \cdot \text{os}\,\frac{\beta}{4} \; . \; . \; . \; . \; 1}$$

$$: \frac{e}{\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{4} \; . \; . \; . \; . \; 1}$$

Es ist bekannt, falls a, b, c die Dreiecksseiten und $s = \frac{a+b+c}{2}$ bedeutet, dass $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{b \cdot c}}$. Wenn wir diesen Wert für $\cos\frac{\alpha}{2}$ in die Gleichung 15) einsetzen, so gelangen wir zu dem Ziele unserer Arbeit, es ist dann:

$$16) \quad \alpha : \beta : \gamma = \frac{a}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{b \cdot c}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1+\sqrt{\frac{s(s-a)}{b \cdot c}}\right)} \; . \; . \; . \; . \; 1}$$

$$: \frac{b}{\sqrt{\frac{s(s=b)}{a \cdot c}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1+\sqrt{\frac{s(s+b)}{a \cdot c}}\right)} \; . \; . \; . \; . \; 1}$$

$$: \frac{c}{\sqrt{\frac{s(s-c)}{a \cdot b}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1+\sqrt{\frac{s(s-c)}{a \cdot b}}\right)} \; . \; . \; . \; . \; 1}$$

Es ist dies der Satz, welcher das Verhältniss der Seiten zu den Winkeln angiebt. Mit seiner Hülfe kann man algebraisch alle trigonometrischen Aufgaben lösen. In diesem Satze sind alle trigonometrischen Sätze enthalten, und alle Sätze über Winkel im Dreieck,

somit auch der Pythagoreische Lehrsatz mit seiner Umkehrung. Wir wollen aus diesem wichtigen Satze in dem mit „Anwendungen" betitelten Abschnitt Nutzen ziehen.

VIII.

Anwendungen und Betrachtungen.

Wollten wir eine wirkliche Umgehung der Trigonometrie erzielen, so müssten wir den Satz vom Verhältniss der Seiten zu den Winkeln mit Hülfe der metrischen Relationen entwickeln, sodann könnte man ihn bequem einem der Trigonometrie Unkundigen vortragen.

In diesem Satze sind ausnahmslos alle Dreieckssätze enthalten; die Ablesung derselben wird erleichtert, wenn man den Satz

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

unter dessen Voraussetzung jenes nur gilt, in folgender Form eingeschaltet:

$$\alpha : \beta : (180^0 - [\alpha + \beta]) = \frac{a}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{b \cdot c}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{s(s-a)}{ac}}\right)} \ldots 1}$$

$$: \frac{b}{\sqrt{\frac{s(s-b)}{a \cdot c}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{s(a-b)}{a \cdot c}} \ldots 1\right)}}$$

$$: \frac{c}{\sqrt{\frac{s(s-c)}{a \cdot b}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{s(s-c)}{a \cdot b}}\right)} \ldots 1}$$

Der Satz kann nun zur Berechnung von Dreiecksseiten und überhaupt Dreiecksstücken benutzt werden.

Es kommen dort 6 Grössen in Betracht: a, b, c, α, β, γ. Sind 3 derselben gegeben, so sollen 3 Grössen gefunden werden, mithin sind auch 3 Gleichungen erforderlich. Die erste derselben heisst:

$$1) \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

die zweite liefert unser Satz, nämlich

2) $$\alpha : \beta = \frac{a}{\sqrt{\frac{s(s-b)}{b\,.\,c}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1+\sqrt{\frac{s(s-a)}{b\,.\,c}}\right) \ldots . 1}}$$

$$: \frac{b}{\sqrt{\frac{s(s-b)}{a\,.\,c}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1+\sqrt{\frac{s(s-b)}{a\,.\,c}} \ldots . 1\right)}}$$

und 3) die dritte liefert ebenso unser Satz

$$\beta : \gamma = \frac{b}{\sqrt{\frac{s(s-b)}{a\,.\,c}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} 1 + \left(\sqrt{\frac{s(s-b)}{a\,.\,c}} \ldots . . 1\right)}}$$

$$: \frac{c}{\sqrt{\frac{s(s-c)}{a\,.\,b}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1+\sqrt{\frac{s(s-c)}{a\,.\,b}}\right) \ldots . . 1}}$$

Es ist nun leicht ersichtlich, dass im Falle, wo 3 Seiten gegeben sind, die Berechnung linear für die Unbekannten ausfällt.

In allen anderen Fällen führt der Satz im allgemeinen zu Gleichungen ∞ hohen Grades, wenn man sich jedoch damit begnügt, nur auf eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen richtig zu rechnen, so wird die Gleichung endlich hohen Grades. Dies gilt im allgemeinen von dem Satze. In speciellen Fällen, deren wir einige später vorbringen wollen, und die aus jenem Satze heraus festgestellt werden können, wird die Gleichung endlich hohen Grades, obwol man abgeschlossene Zahlenwerte erhält.

Die Vorbringung aller 4 Hauptaufgaben ist meiner Ansicht nach überflüssig, da jeder die Gleichungen mit Leichtigkeit selbst aufstellt, wenn er die Unbekannte und die bekannten Zahlenwerte in den Satz einsetzt. Nur einige Worte werde ich mir erlauben über die Anzahl der zu benutzenden Glieder. Es ist klar, dass, je genauer wir das Resultat haben wollen, wir desto mehr Glieder nehmen müssen, und die Gleichung einen desto höheren Grad erreicht.

Wollen wir z. B. auf 5 Decimalstellen richtig rechnen, so müssen wir auch eine bestimmte Anzahl Glieder berücksichtigen, und das Glied, dessen 6te Decimalstelle mehr wie 5 beträgt, muss schon als 1,000 000 betrachtet werden, kann demnach fortgelassen werden.

Ein Dreieckswinkel kann höchstens 180° betragen; in diesem Falle wird das Dreieck zu einer Strecke. Beträgt er aber z. B,

$180^0 - \delta$, wo δ einen sehr kleinen Winkel bedeutet, dann liegt $\frac{\alpha}{2}$ im I. Quadranten, mithin wird $\cos\frac{\alpha}{2}$ in unserem Satze stets positiv, und der Winkel $\frac{\alpha}{2}$ wird kleiner als 90^0. Analog ist

$$\frac{\alpha}{2^2} < 45^0.$$

$$\frac{\alpha}{2^3} < 22^0\ 30' \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{\alpha}{2^{10}} < 10'\ 32{,}8125$$

beträgt, während dessen Cosinus schon als 1 betrachtet werden kann (6 Decimalstellen angenommen).

Wir können demnach $\cos\frac{\alpha}{2^{10}}$ schon stets fortlassen, indem wir so nur 9 Glieder brauchen, unter denen das letzte $\cos\frac{\alpha}{2^9}$ ist. Es ist hierbei sogar noch zu bemerken, dass in den meisten Fällen soviel Glieder nicht notwendig sein werden.

Der Satz giebt natürlich auch eine allgemeine Methode für die Berechnung der Functionen, und kann einem Robinson, welcher einsam, ohne Tabellen zur Verfügung zu haben, lebt und doch Dreiecksberechnungen anstellen will, gute Dienste leisten, vorausgesetzt natürlich, dass es ihm an den nötigen Kenntnissen in der Algebra nicht gebricht.

Was nähere Untersuchungen über die Cosinusreihe

$$\cos\frac{\alpha}{2^1} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^3} \cdot \ldots \cdot 1$$

noch ergeben würden, kann man noch nicht wissen.

Berechnen wir numerisch den Fall, wo die 3 Seiten gegeben sind. Es sei

$$a = 231$$
$$b = 432$$
$$c = 333$$

Ausführung: $s = \frac{999}{2}$

$$2s - 2a = 531$$

$$2s - 2b = 135$$

$$2s - 2c = 333$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{234}{\sqrt{\frac{999 \,.\, 531}{4 \,.\, 432 \,.\, 333}} \;.\;.\;.\;.\; 1} : \frac{432}{\sqrt{\frac{999 \,.\, 135}{4 \,.\, 234 \,.\, 333}} \;.\;.\;.\;.\; 1}$$

$$: \frac{333}{\sqrt{\frac{999 \,.\, 333}{4 \,.\, 234 \,.\, 432}} \;.\;.\;.\;.\; 1}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{26}{\frac{\sqrt{59}}{8} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{59}}{8}\right)} \;.\;.\;.\;.\; 1}$$

$$: \frac{48}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{45}{26}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{45}{26}}\right)} \;.\;.\;.\;.\; 1}$$

$$: \frac{37}{\frac{37}{8 \,.\, \sqrt{26}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{37}{8 \,.\, \sqrt{26}}\right)} \;.\;.\;.\; 1}$$

Bezeichnen wir die Nenner mit $p_{(\alpha)}$, $p_{(\beta)}$ und $p_{(\gamma)}$, dann ist, 5stellig berechnet:

$$p_{(\alpha)} = 0{,}96014 \,.\, 0{,}08998 \,.\, 099749 \,.\, 99937 \,.\, 0{,}99984 \,.\, 0{,}99996$$
$$.\, 0{,}99999 \,.\, 1{,}90000$$

$$p_{(\beta)} = 0{,}65779 \,.\, 0{,}91044 \,.\, 0{,}97735 \,.\, 0{,}99432 \,.\, 0{,}99858 \,.\, 0{,}99964$$
$$0{,}99964 \,.\, 0{,}99991 \,.\, 0{,}99998 \,.\, 0{,}99999 \,.\, 1{,}00000$$

$$p_{(\gamma)} = 0{,}90704 \,.\, 0{,}97648 \,.\, 0{,}99410 \,.\, 0{,}99852 \,.\, 0{,}99963 \,.\, 0{,}999991$$
$$.\, 0{,}99998 \,.\, 0{,}99999 \,.\, 1{,}00000$$

Ausmultiplicirt ist $p_{(\varkappa)} = 0{,}94735$

$$p_{(\beta)} = 0{,}58089$$

$$p_{(\gamma)} = 0{,}87875.$$ Mithin

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{26}{0{,}94735} : \frac{48}{0{,}58089} : \frac{37}{0{,}87875} \text{ oder}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = 2744495 : 8263182 : 4210526$$

Nun ist

$$\alpha = \frac{180 v}{u + w + v}$$

falls man die drei Zahlenwerte mit u, w, v bezeichnet, mithin

$$\alpha = \frac{494003100}{15218203}; \quad \beta = \frac{1487372760}{15218203}; \quad \gamma = \frac{757894680}{15218203} \text{ d. h.}$$

$$\alpha = 32{,}4617^0; \quad \beta = 97{,}7364^0; \quad \gamma = 49{,}80195^0, \text{ oder}$$

$$\alpha = 32^0\, 27'\, 42''$$
$$\beta = 97^0\, 44'\, 11''$$
$$\gamma = 49^0\, 48'\, 7''$$

Man könnte auf diese Weise aus den Seiten mit der grössten Schärfe die Winkel berechnen.

Für die Fälle, wo unser Satz beendete Werte giebt, ist es übersichtlicher, unseren Verhältnisssatz in der Form der Gleichung 15) zu nehmen, nämlich

$$\alpha . \beta : \gamma = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2^1} . \cos\frac{\alpha}{2^2} . \ldots . 1} : \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2^1} . \cos\frac{\beta}{2^2} . \ldots . 1}$$
$$: \frac{c}{\cos\frac{\gamma}{2^1} . \cos\frac{\gamma}{2^2} . \ldots . 1}$$

Berechnen wir z. E. die Verhältnisse der Seiten in Bestimmungsdreiecken regulärer Polygone, dann ist für das reguläre Zehneck

$$\alpha : \beta = 36 : 72$$
$$\alpha : \beta = 1 : 2, \text{ mithin}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2^1}, \text{ daher}$$

$$1 : 2 = \frac{a}{\cos\frac{\beta}{2^2} . \cos\frac{\beta}{2^3} \cos\frac{\beta}{2^4} . \ldots . 1}$$
$$: \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2^2} . \cos\frac{\beta}{2^3} . \cos\frac{\beta}{2^4} . \ldots . 1} \text{ oder}$$

$$1:2 = a : \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

Für $\cos\frac{\beta}{2}$ setzen wir im allgemeinen den Wert $\sqrt{\frac{s(s-b)}{ae}}$, da nun im gleichschenkligen Dreieck (und ein solches ist eben jedes Bestimmungsdreieck in regulären Polygonen) $b = c$ ist, so kommen wir zu der Formel

$$2a = \frac{b}{\sqrt{\frac{s(s-b)}{b}}} = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+2ab}{4ab}}}, \text{ daraus folgt}$$

$$4a^2 = \frac{4ab^3}{a^2+2ab}, \text{ woraus}$$

$$a^3+2a^2b = b^3, \text{ sowie weiter}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3+2\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1$$

Löst man diese Gleichung nach $\frac{a}{b}$ auf, so erhält man

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

was die Formel für den goldenen Schnitt ist.

Für das reguläre 18-Eck wollen wir der Kürze wegen nur die Gleichung aufstellen.

$$1:4 = \frac{a}{\cos\frac{\beta}{2^3}\cdot\cos\frac{\beta}{2^4}\cdot\ldots\ldots 1} : \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2^1}\cdot\cos\frac{\beta}{2^2}\cdot\cos\frac{\beta}{2^3}\cdot\ldots\ldots 1}$$

$$1:4 = a : \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{4}}$$

$$4a = \frac{b}{\sqrt{\frac{a^2+2ab}{4ab}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{a^2+2ab}{4ab}}\right)}}$$

Ueber die geometrische Ausführbarkeit dieser Formel zu sprechen, ist hier nicht am Platze. —

Hiermit wollen wir die Arbeit beenden, und was wir in dieser Arbeit nicht berücksichtigen zu müssen geglaubt haben, wie z. B. Winkel als 0te Dimension, das werden wir in nächster Zukunft besonders geben.

Das Thema ist natürlich nicht erschöpft, jedoch ist ja jedes mathematische Feld unerschöpflich, und zu den von uns hergeleiteten Sätzen führen nicht allein die angegebenen Wege, denn in der Mathematik muss jeder Weg zu jedem Ziele führen, wofern es nur die menschliche Denkweise nicht übersieht.

II.

Kettenwurzeln.

Von

Kasimir Cwojdzinski.

Eine Methode numerische Gleichungen, deren Unbekannte nur in zwei Potenzen vorkommt, mögen ihre Exponenten auch irrational sein, auf directem Wege zu lösen.

1.

Es ist bekannt, dass man numerische Gleichungen höherer Grade durch Kettenbrüche lösen kann. Beansprucht man allgemeine Kettenbrüche, also solche, deren Teilzähler nicht immer 1 betragen, so braucht man die bekannte Substitution

$$x = a + \frac{1}{y}$$

nicht, und die Lösung gestaltet sich, wie folgt:

$$x^2 + ax = b$$
$$x(x + a) = b$$
$$x = \frac{b}{a + x}$$

Ersetzen wir nun das rechte x durch den Wert des linken, so erhalten wir

$$x = \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + x}}$$, analog erhalten wir

$$x = \cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a}}}}$$

Für die numerische Berechnung ungeeignet gestalten sich die Kettenbrüche, die man aus höheren Gleichungen erhält. Es sei

$x^3 + ax = b$, dann entsteht

$$x(a + x^2) = b$$

$$x = \frac{b}{a + x^2}$$

$$x = \frac{b}{a + \left(\frac{a+x^2}{b}\right)^2} = \frac{b}{a + \frac{b^2}{a^2 + 2ax + x^2}}$$

$$= \cfrac{b}{a + \cfrac{b^2}{a^2 + 2a \cdot \frac{b}{a+x} + \frac{b^2}{a^2 + 2ax + x^2}}} \quad \text{u. s. w.}$$

Einen solchen Kettenbruch nennen wir „verzweigt“ oder „höheren Grades“.

2.

Durch ein verwandtes Verfahren kommen wir auf gewisse Wurzelgebilde, die wir „Kettenwurzeln“ nennen wollen.

Es sind noch verschiedene andere Gebilde merkwürdig, die jedoch auch nur alle Analogien zu dem oben erwähnten Verfahren sind.

Es sei mit quadratischen Gleichungen begonnen.

Z B.

$x^2 + ax = b$, daraus

$x^2 = b - ax$, ferner

$$x = \sqrt[2]{b - ax}$$

ersetzt man wiederum das rechte x durch den Wert des linken, so erhält man

$$x = \sqrt[2]{b - a\sqrt[2]{b - x}} \quad \text{analog weiter}$$

$$x = \sqrt[2]{b - a\sqrt[2]{(b - a\sqrt[2]{b - a\sqrt{b})}}} \ldots$$

Ebenso können wir eine Gleichung lösen, in der die Unbekannte in einer $m$ten und der 1ten Potenz vorkommt.

Es ist aus

$$x^m + ax = b$$

$$x = \sqrt[m]{b - a\sqrt[m]{b - a\sqrt[m]{b}}}$$

Je nach den Grössen in der Gleichung werden auch die Grössen a und b positiv oder negativ sein.

Kommt die Unbekannte in zwei verschiedene Potenzen vor, so ist das Verfahren ähnlich

$$x^m + ax^n = b$$

$$x^m = b - ax^n$$

$$x = \sqrt[m]{b - ax^n}$$

nun müssen wir x^n durch einen Ausdruck ersetzen. Es ist

$$x^n = \left(\sqrt[m]{b - ax^n}\right)^n \quad \text{oder} = \sqrt[\frac{m}{n}]{b - ax^n}$$

somit ist

$$x^n = \sqrt[m]{b - u\sqrt[\frac{m}{n}]{b - a\sqrt[m]{b - \ldots}}}$$

Da sich in den Kettenwurzeln dieselben Grössen immer wiederholen, so wollen wir sie periodisch nennen. Die letzte Gleichung war eine unreinperiodische für x, aber für

x^n eine reinperiodische, weshalb wir uns berechtigt fühlen nur reinperiodische Kettenwurzeln zu betrachten.

Kommt die Unbekannte in mehr als 2 Potenzen vor, so wird auch die Kettenwurzel verzweigt.

3.

Ueber Kettenwurzeln selbst.

Die Kettenwurzel habe die Form

$$\pm a \sqrt[n]{\pm b \pm a \sqrt[n]{\pm b \pm a \sqrt[r]{\pm b}}} \quad \text{etc.} \ldots$$

Wir nennen

$\pm a \sqrt[n]{\pm b}$ den ersten Näherungswert $= w_1$

$\pm a \sqrt[n]{\pm b \pm a \sqrt[n]{\pm b}}$ den zweiten Näherungswert $= w_2$

u. s. w.

Dann ist Gleichung

$$w_2 = \pm a \sqrt[n]{\pm b \pm w_1} \text{ allgemein}$$

$$w_{n+1} + \pm a \sqrt[n]{\pm b \pm w_n}$$

Wir nehmen Beispielsweise die Kette

$$+ a \sqrt[n]{b - a \sqrt[n]{b - a \sqrt[n]{b \ldots}}}$$

1) Die Näherungswerte einer Kettenwurzel von der Form

$$w_{n+1} = a \sqrt[u]{b - w_n}$$

sind abwechselnd kleiner und grösser als die vorhergehenden.

Behpt. $w_1 > w_2 < w_3 > w_4 < w_5 \ldots$

Es ist

$$w_1 = a \sqrt[u]{b}$$

$$w_2 = a \sqrt[n]{b - w}$$

da von den Radicanden die Grösse w_1 abgezogen ist, so muss $w_1 > w$ sein. Ferner muss $w_2 < w_3$ sein, da hier wieder der Subtrahend vermindert wurde, u. s. w.

2) Die Näherungswerte einer Kettenwurzel von der genannten Form schliessen den wahren Wert in immer engere Grenzen, falls nicht $b^{n-1} = a^n$ ist oder $b < a\sqrt[n]{b}$.

Um dies zu beweisen, brauchen wir nur darzutun, dass $w_1 > w_3$ und $ww_2 < w_4$.

Es soll

$$a\sqrt[n]{b} > a\sqrt[n]{b - a\sqrt[n]{b - a\sqrt[n]{a}}}$$

sein, falls $b > a\sqrt[n]{b}$ ist, und dies ist klar, denn dann wird

$$a\sqrt[n]{b - a\sqrt[n]{b}}$$

mehr als 0, mithin wird der Radikand b darum vermindert.

Die Näherungswerte verlaufen parallel, wenn

$$b = a\sqrt[n]{b} \text{ oder } b^{n-1} = a^n$$

d. h. es ist dann $w_1 = w_3$. analog wird es für w_2 und w_4 bewiesen.

Ist $b < a\sqrt[n]{b}$, dann ist die Kettenwurzel nur zu gebrauchen, falls die Wurzel nicht imaginär wird, und diese hängt von n ab.

Wir unterlassen Untersuchungen über n, da wir nur vom 2. Grade ab die Gleichungen mit Kettenwurzeln lösen. Lineare Gleichungen ergeben folgende parallelen Gebilde. Z. B.

$$x + x = 1$$
$$x = 1 - x$$
$$x = 1 - (1 - x) = 1 - (1 - (1 - (1 - x))))$$
$$x = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$$

während x hier $\frac{1}{2}$ beträgt.

3) Die Näherungswerte einer Kettenwurzel von der Form

$$w_{n+1} = a\sqrt[n]{b + w_n}$$

werden immer grösser, und sie nähern sich dem wahren Werte der ganzen Kettenwurzel.

Beweis: ähnlich wie bei 2) und 3).

4) Die Kettenwurzeln von der Form

$$w_{n+1} = -a\sqrt[n]{-b-w_1}$$

und die letzte Art wo $a\sqrt[n]{b}$ positiv, hangen von ähnlichen Umständen, wie einige in 2) erwähnte Fälle, ab.

Für ein negatives n brauchen wir uns nicht vorzubereiten, da der Exponent stets positiv gemacht werden kann.

4.

Ein numerisches Beispiel.

$$x^{\frac{\pi}{\psi}} + x = e$$

für $\pi = 3{,}1416$
$e = 2{,}7183$
$\psi = 0{,}6180$ (das Verhältniss des goldenen Schnittes.)

Es ist

$$x = \sqrt[\frac{\pi}{\psi}]{e - \sqrt[\frac{\pi}{\psi}]{e - \ldots}}$$

Es ist

$$w_1 = \sqrt[\frac{\pi}{\psi}]{e}, \quad w_2 = \sqrt[\frac{\psi}{\pi}]{c - w_1} \quad \text{u. s. w.}$$

setzt man nun die Werte ein, so erhält man

$$w_1 = 1{,}500$$
$$w_2 = 1{,}6351$$
$$w_3 = 1{,}6167$$
$$w_3 = 1{,}6192$$
$$w_5 = 1{,}6188$$

u. s. w.

Nebenbei sieht man, dass x dem Werte von $\frac{1}{\psi}$ nahe kommt, es ist nämlich

$$\frac{2}{\psi} = \psi + 1 = 1{,}6180$$

Die Gleichung des goldenen Schnittes ergiebt parallele Werte, da hier $b^{n-1} = a^n$ ist.

$$x^a + x = 1$$

$$x = \sqrt[a]{1 - \sqrt[a]{1 - \sqrt[a]{1 - \sqrt[n]{1}}}}$$

während $x = \psi$ ist.

Die Gleichung für $\frac{1}{\psi}$ ist

$x^a - x = 1$ und sie ergiebt

$$\sqrt[n]{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 +}}}$$

merkwürdigerweise, da ψ auch $\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}$ beträgt.

III.

Eine Lösung der Gleichung $x^2+y^2=z^2$.

(Beitrag zu den pythagoreischen Zahlen).

Von

Graeber, Oberlehrer in Höxter.

Man construire ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse z und den beiden Katheten x und y und in dasselbe den eingeschriebenen Kreis.

I. Die vom Berührungspunkt auf x gebildeten Abschnitte bezeichne man mit m und n, die auf y mit n und u. Es ist dann:

$$x = m+n$$
$$y = n+u$$
$$z = m+u$$

Nach dem Pythagoras ist:

$$(m+u)^2 = (m+n)^2+(n+u)^2$$

oder

$$m^2+u^2+2mu = m^2+n^2+2mn+n^2+u^2+2nu$$

Hieraus ergiebt sich

$$u = \frac{n^2+m.n}{m-n}$$

mithin ist

$$z = m + \frac{n^2 + mn}{m - n} = \frac{m^2 + n^2}{m - n}$$

$$y = n + \frac{n^2 + mn}{m - n} = \frac{2mn}{m - n}$$

$$x = m + n$$

Demnach sind für rationale Werte von m und n die Ausdrücke

$$\frac{m^2 + n^2}{m - n}, \quad \frac{2mn}{m - n}, \quad m + n$$

rationale Werte von z, y, x, welche der gegebenen Gleichung

$$z^2 = x^2 + y^2$$

auch dann noch genügen, nachdem man sie mit $m - n$ multiplicirt hat; also sind für beliebige ganze Zahlen m und n die Ausdrücke

$$z = m^2 + n^2 \quad y = 2mn; \quad x = m^2 - n^2$$

ganze Zahlen, welche der vorgelegten Gleichung genügen.

II. Bezeichnet man die vom Berührungspunkt auf z gebildeten Abschnitte mit m und n, dann ist

$$z = m + n$$
$$x = n + u$$
$$y = m + u \quad \text{und}$$

$$(m + n)^2 = (m + u)^2 + (n + u)^2$$

oder

$$m^2 + n^2 + 2m \,.\, n = m^2 + u^2 + 2mu + n^2 + u^2 + 2n \,.\, u$$

Hieraus ergiebt sich

1) $$u = -\frac{m + n}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 + 6m \,.\, n}$$

Soll u eine rationale Zahl sein, so muss der Ausdruck $m^2 + n^2 + 6m \,.\, n$ eine Quadratzahl sein. Es ist

$$m + n = z, \text{ mithin}$$
$$n = z - m$$

Dann ist

$$m^2 + n^2 + 3m \,.\, n = m^2 + (z - m)^2 + 6m(z - m) = v^2$$

oder

$$v^2 = -4m^2 + 4z \,.\, m + z^2$$

*) Man setze:

$$p^2(-4m^2+4zm+z^2) = (qm+pz)^2$$

Hieraus ergiebt sich

$$m = (2p \cdot q \cdot z - 4p^2z) \cdot (-4p^2-q^2)$$

oder

$$2) \qquad m = \frac{4p^2z - 2pqz}{4p^2+q^2} = \frac{z(4p^2-2p \cdot q)}{4p^2+q^2}$$

Es muss m eine ganze Zahl sein; denn bezeichnet man die Seiten eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks mit a, b, c, wo c die Hypotenuse bedeutet, und mit ϱ den Radius des einbeschriebenen Kreises, so ist

$$\varrho = S - c, \text{ wo}$$

$$S = \tfrac{1}{2}(a+b+c) \text{ bedeutet.}$$

Da in dem pythagoreischen Dreieck a, b, c ganze Zahlen sind, so müssen, wenn c eine gerade Zahl ist, a und b entweder grade oder ungrade Zahlen sein; denn die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist eine grade Zahl, wenn sie beide grade oder ungrade sind. Es ist dann auch $(a+b)$ eine grade Zahl und $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$ eine ganze Zahl. Ebenso ist S eine ganze Zahl, wenn c eine ungrade Zahl ist, denn dann muss auch (a^2+b^2) eine ungrade Zahl sein. Es ist demnach eine von den Zahlen a und b eine grade und die andere eine ungrade Zahl; folglich muss auch $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$ eine ganze Zahl sein, da von diesen 3 Zahlen zwei ungrade sind und die Summe zweier ungraden Zahlen stets eine grade Zahl ist.

Nun ist, wie aus der oben angenommenen Bezeichnung leicht zu ersehen ist,

$$\varrho = u$$

Da nun u eine ganze Zahl ist, so müssen auch m und n ganze Zahlen sein; denn sonst würde man für x, y, z keine ganze Zahlen erhalten.

Setzt man in 2) $2p = p'$, so ist

$$m = \frac{z(p'^2 - p'q)}{p'^2+q^2}$$

Der Ausdruck $\frac{p'^2-p'q}{p'^2+q^2}$ kann niemals eine ganze Zahl ergeben; es muss $\frac{z}{p'^2+q^2}$ eine ganze Zahl sein.

*) Schlüssel zu Heis' Aufgaben von Matthiessen Bd. II. § 79. 39.

Nimmt man an

$$z = p'^2 + q^2$$

dann ist

3) $$m = p'^2 - p'q \quad \text{und} \quad n = q^2 + p'q$$

Mithin ist:

4) $$\sqrt{m^2+n^2+6mn} = \sqrt{p'^4+q'^4+2p'q^2+4p'^3q-4p'q^3}$$
$$= p'^2 - q^2 + 2p'q$$

Mittelst der Gleichungen 3) und 4) ergiebt sich aus 1):

$$u = -\frac{p'^2+q^2}{2} \pm \frac{p'^2-q^2+2p'q}{2}$$

Da u nur positiv sein kann, so ist das obere Zeichen zu wählen, mithin ist

$$u = p'q - q^2$$

Hieraus folgt

5) $$z = p'^2 + q^2, \quad x = 2p'q, \quad y = p'^2 - q^2$$

Aus der Annahme $2p = p'$ folgt, dass p' eine grade Zahl ist. Ist nun q relativ prim zu p', also eine ungrade Zahl, so ist, wie leicht nachzuweisen ist $(z) = p'^2 + q^2$ eine Primzahl von der Form $4k+1$ oder ein Product aus Primzahlen von der Form $4k+1$. Die Bezeichnung (z) soll im weiteren stets eine ganze Zahl bedeuten, die sich als die Summe der Quadrate zweier Zahlen darstellen lässt, von denen die eine ungrade, die andere grade ist.

Sind p' und q verwandte Zahlen, so lässt sich der Ausdruck $\frac{z(p'^2-p'q)}{p'^2+q^2}$ mit der Quadratzahl des gemeinsamen Factors von p' und q kürzen. Es ist dann, wenn

$$p' = np'' \text{ und } q = nq' \text{ gesetzt wird,}$$

$$m = \frac{z(n^2p''^2 - n^2p''q')}{n^2(p''^2+q'^2)}, \text{ und man erhält:}$$

$$z = p''^2 + q'^2$$

Sind nun p'' und q' ungrade relative Primzahlen, so setze man:

$$p''^2 - p''q' = 2[\tfrac{1}{2}(p''-q')]^2 + \tfrac{2}{4}(p''-q)(p''+q')$$

und

$$p''^2 + q'^2 = 2\{[\tfrac{1}{2}(p''+q')[^2 + [\tfrac{1}{2}(p''-q')]^2\}$$

man erhält dann:

$$\frac{z(p^{2}-p'q)}{p'^2+q^2}=\frac{z(p''^2-p''q')}{p''^2+q'^2}$$
$$=\frac{2\cdot z\{[\frac{1}{2}(p''-q')]^2+\frac{1}{2}(p''-q')\cdot\frac{1}{2}(p''+q')\}}{2\cdot\{[\frac{1}{2}(p''+q')]^2+[\frac{1}{2}(p''-q')]^2\}}$$

Hieraus folgt:

$$z=[\tfrac{1}{2}(p''+q')]^2+[\tfrac{1}{2}(p''-q')]^2$$

Da p'' und q' ungrade relative Primzahlen sind, so sind die Zahlen $\frac{1}{2}(p''+q')$ und $\frac{1}{2}(p''-q')$ ebenfalls relative Primzahlen, von denen die eine ungrade und die andre grade ist, denn ihre Summe ist ungrade.

Aus der Gleichung:

$$6)\qquad p''^2+q'^2=2\{[\tfrac{1}{2}(p''+q')]^2+[\tfrac{1}{2}(p''-q')]^2\}=2(z)$$

ergiebt sich der Satz:

Die zweifache Hypotenuse (z) lässt sich als die Summe der Quadrate zweier ungraden relativen Primzahlen darstellen.

Aus diesen Ergebnissen folgt:

Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind durch ganze Zahlen (pythagoreische Zahlen) darstellbar, wenn die Hypotenuse von der Form $(z)=p'^2+q'^2$ oder $2(z)$ oder $n^2(z)$ ist, wo (z) sich darstellen lässt als die Summe der Quadrate zweier Zahlen, von denen die eine ungrade, die andere grade ist, und n eine ganze Zahl bedeutet.

Setzt man in 6):

$$p''=2s+1,\quad q'=2t+1$$

so erhält man:

$$(z)=(s+t+1)^2+(s-t)^2$$
$$=2s^2+2t^2+2s+2t+1$$

und analog den Gleichungen 5):

$$x=2(s-t)(s+t+1)$$
$$y=(s+t+1)^2-(s-t)^2$$
$$=4s\cdot t+2s+2t+1$$

Für beliebige ganze Zahlen für s und t und $s>t$ geben diese 3 Gleichungen für z, x, y reine pythagoreische Zahlen, d. h. solche Zahlen, deren Hypotenuse sich als Summe der Quadrate zweier relativen Primzahlen darstellen lässt, von denen eine ungrade und die andere grade ist.

Es ist oben gezeigt worden, dass der Radius des in ein pythagoreisches Dreieck beschriebenen Kreises eine ganze Zahl ist. Da nun

$$\sigma = \frac{x \cdot y}{x+y+z}$$

ist, so folgt hieraus für die pythagoreischen Zahlen der Satz:

Das aus den Kathetenzahlen gebildete Product ist durch die Summe der drei pythagoreischen Zahlen ohne Rest teilbar.

Bildet man den Quotienten aus der Summe der Kubikzahlen:

$$z^3+x^3+y^3 = (p^2+q^2)^3+(2pq)^3+(p^2-q^2)^3$$
$$= 2p^6+6p^2q^4+8p^3q^3$$

und aus der Summe der einfachen Zahlen:

$$z+x+y = 2p^2+2pq. \text{ also:}$$

$$\frac{z^3+x^3+y^3}{z+x+y} = \frac{p^6+3p^2q^4+4p^3q^3}{p^2+pq}$$
$$= p^4-p^3q+p^3q^2+3pq^3$$

so ergiebt sich der Satz:

Die Summe der Kubikzahlen der pythagoreischen Zahlen ist durch die Summe ihrer einfachen Zahlen teilbar.

Ferner ist

$$\frac{z^5+x^5+y^5}{z+x+y} = \frac{(p^2+q^2)^5+(2pq)^5+(p^2-q^2)^5}{2p^2+2pq}$$
$$= \frac{p^{10}+10p^6q^4+5p^2q^8+16p^5q^5}{p^2+pq}$$
$$= p^8-p^7q+p^6q^2-p^5q^3+11p^4q^4+5p^3q^5$$
$$-5p^2q^6+5pq^7$$

ebenso:

$$\frac{z^7+x^7+y^7}{z+x+y} = \frac{(p^2+q^2)^7+(2p-q)^7-(p^2-q^2)^2}{2p^2+2pq}$$
$$= \frac{p^{14}+21p^{10}q^4+64p^7q^7+35p^4+q^8+7p^2q^{12}}{p^2+pq}$$
$$= p^{12}-p^{11}q+p^{10}q^2-p^9q^3+22p^8q^4-22p^8q^5+22p^6q^6$$
$$+42p^5q^7-7p^4q^8+7p^3q^9-7p^2q^{10}+7pq^{11}$$

und

$$\frac{z^9+x^9+y^9}{z+x+y}=\frac{(p^2+q^2)^2+(zpq)^9+(p^2-q^2)^9}{2p^2+2pq}$$
$$=\frac{p^{18}+36p^{14}q^4+126p^{10}q^8+256p^9q^9+84p^6q^{12}+9p^2q^{16}}{p^2+pq}$$
$$=p^{16}-p^{15}q+p^{14}q^2-p^{13}q^3+37p^{12}g^4-37p^{11}q^5$$
$$+37p^{10}q^6-37p^9q^7+163p^8q^8+93p^7q^9$$
$$-93p^6q^1{}_0+93p^5q^{11}-9p^4q^{12}+9p^3p^{13}$$
$$-9p^2q^{14}+9pq^{15}$$

Nach diesen Beispielen lässt sich nun die allgemeine Gleichung aufstellen:

$$\frac{z^{2n+1}+x^{2n+1}+y^{2n+1}}{z+x+y}=\frac{(p^2+q^2)^{2n+1}+(2pq)^{2n+1}+(p^2-q^2)^{2n+1}}{2p^2+2pq}$$
$$=\frac{p^{4n+2}+\frac{2n(2n+1)}{2}p^{4n}q^2+\ldots+\frac{2^{2n+1}}{2}p^{2n+1}q^{2n+1}+\ldots}{p^2+pq}$$
$$=p^{4n}-p^{4n-1}q+p^{4n-2}q^2-p^{4n-3}q^3$$
$$+\left[\frac{(2n+1(2n)}{2!}+1\right]p^{4n-4}q^4-+\ldots$$
$$-\frac{2n+1}{1}p^2q^{4n-2}+\frac{2n+1}{1}pq^{4n-3}$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Die Summe von gleich hohen ungraden Potenzen der drei pythagoreischen Zahlen ist durch die Summe ihrer einfachen Zahlen ohne Rest teilbar.

Bildet man die Differenz aus der 4. Potenz der Hypotenuse und der Summe der 4. Potenzen der beiden Katheten, also

$$z^4-(x^4+y^4)=8p^6q^2+8p^2q^6-16p^4q^4$$

und dividirt man dieselbe durch

$$z+x+y=2pq+2p^2$$

so ergiebt sich:

$$\frac{z^4-(x^4+y^4)}{z+x+y}=\frac{4p^6q^2-8p^4q^4+4p^2q^6}{p^2+pq}$$
$$=4p^4q^2-4p^3q^3-4p^2q^4+4pq^5$$

Ebenso ist

$$\frac{z^6-(x^6+y^6)}{z+x+y}=\frac{12p^{10}q^2-24p^6q^6+12p^2q^{10}}{2p^2+2pq}$$

$$=6p^8q^6-6p^7q^3+6p^6q^4-6p^5q^5$$

$$-6p^4q^6+6p^3q^7-6p^2q^8+6pq^9$$

und

$$\frac{z^8-(x^8+y^8)}{z+x+y}=\frac{16p^{14}q^2+112p^{10}q^4-256p^8q^8+112p^6q^{10}+16p^2q^{14}}{2p^2+2pq}$$

$$=8p^{12}q^2-8p^{11}q^3+8p^{10}q^4-8p^9q^5$$

$$+64p^8q^6-64p^7q^6-64p^6q^8+64p^5q^9$$

$$-8p^4q^{10}+8p^3q^{11}-8p^2q^{12}+8pq^{13}$$

und

$$\frac{z^{10}-(x^{10}+y^{10})}{z+x+y}=10p^{16}q^2-10p^{15}q^3+10p^{14}q^4-10p^{13}q^{15}$$

$$+130p^{12}q^6-130p^{11}q^7+130p^{10}q^8-130p^9q^9$$

$$-130p^8q^{10}+130p^7q^{11}-130p^6q^{12}+130p^5q^{13}$$

$$-10p^4q^{14}+10p^3q^{15}-10p^2q^{16}+10pq^{17}$$

Aus diesen Beispielen erkennt man leicht den allgemeinen Satz: **Wenn man die Summen der gleich hohen geraden Potenzen der Kathetenzahlen von der gleich hohen Potenz der zugehörigen Hypotenusenzahl subtrahirt, so lässt sich die so entstandene Differenz durch die Summe ihrer Grundzahlen ohne Rest teilen.**

Es ist:

$$-(x^8+y^8)=16p^{14}q^2+112p^{10}q^4-256p^8q^8+112p^6q^{10}+16q^2q^{14}$$

a) $$=16p^2q^2(p^{12}+7p^8q^4-16p^6q^6+7p^4q^8+q^{12})$$

$$=16p^2q^2(p^2-q^2)^2(p^8+2p^6q^2+10p^4q^4+2p^2q^6+q^8)$$

und

$$z^{10}-(x^{10}+y^{10})=20p^{10}q^2+240p^{14}q^6-520p^{10}q^{10}+240p^6q^{14}+20p^2q^{10}$$

b) $$=20p^2q^2(p^{16}+12p^{12}q^4-26p^8q^8+12p^4q^{12}+q^{16})$$

$$=20p^2q^2(p^2-q^2)^2(p^{12}+2p^{10}q^2+15p^8q^8+28p^6q^6$$

$$+15p^4q^8+2p^2q^{10}+q^{12})$$

$$=20p^2q^2(p^2-q^2)^2(p^2+q^2)^2(p^8+14p^4q^4+q^8)$$

und

$$z^{12} - (x^{13} + y^{12}) = 4p^2q^2(p^2 - q^2)^2 (6p^{16} + 12p^{14}q^2 + 128p^{12}q^4$$
c)
$$+ 244p^{10}q^6 + 756p^8q^8$$
$$+ 244p^6q^{10} + 128p^4q^{12}$$
$$+ 12p^2q^{14} + 6q^{16}$$

Aus den Gleichungen a), b), c) ergiebt sich der Satz:

Wenn man die Summe der gleich hohen graden Potenzen der Kathetenzahlen von der gleich hohen Potenz der zugehörigen Hypotenusenzahl subtrahirt, so lässt sich die so entstandene Differenz durch das Product der beiden Katheten ohne Rest teilen.

Ferner ergiebt sich aus der Gleichung b) und aus

$$z^6 - (x^6 + y^6) = 12p^{10}q^2 - 24p^6q^6 + 12p^2q^{10}$$
$$= 12p^2q^2\, p^2 + q^2)^2$$

der Satz:

Die Differenz aus der Summe der gleich hohen Potenzen vom $2(2n+1)$ten Grade ddr Kathetenzahlen und der gleich hohen Potenz der zugehörigen Hypotenusenzahl, $(z^{2(2n+1)} - (x^{2(2n+1)} + y^{2(2n+1)}))$, ist durch das Product der Quadratzahlen. $(z^2x^2y^2)$, ohne Rest teilbar.

IV.

Ueber die Kennzeichen der Teilbarkeit dekadischer Zahlen.

Von

Prof. Dr. **Züge.**

Im 16. Teil 2. Heft dieser Zeitschrift ist von Herrn Director Dr. Theodor Lange ein Verfahren angegeben, nach dem man das Kennzeichen der Teilbarkeit einer Zahl durch eine andere, die relative Primzahl zu 10 ist, leicht ermitteln kann. Fast gleichzeitig wurde dasselbe Verfahren veröffentlicht in der wissenschaftlichen Beilage zum Programm des Königl. Gymnasiums zu Wilhelmshaven 1898, betitelt: Allgemeine Regeln über die Kennzeichen der Teilbarkeit dekadischer Zahlen. Hier soll ein kurzer Auszug dieser Arbeit folgen:

I. Für die Teiler, die Potenzen von 2 oder 5 sind, gilt bekanntlich die Regel: Es ist jede Zahl durch 2^μ oder 5^μ teilbar, wenn die aus den letzten μ Ziffern gebildete Zahl durch 2^μ oder 5^μ teilbar ist.

Für die andern Teiler kann man zwei Hauptverfahren unterscheiden:

Entweder entscheidet ein Polynom, das aus den mit bestimmten Coefficienten — den Teilbarkeitscoefficienten — multiplicirten Ziffern gebildet ist, über die Teilbarkeit der Zahl; ist dieses Polynom durch den Divisor teilbar, so ist es auch die ursprüngliche Zahl. Hierhin gehören die gebräuchlichen Regeln über die Teilbarkeit durch 3, 9, 11.

Oder es werden von der gegebenen Zahl eine oder mehrere Ziffern der niedrigsten Ordnungen abgeschnitten, von der übrig bleibenden Zahl ein bestimmtes Vielfaches der aus den abgeschnittenen Ziffern gebildeten Zahl subtrahirt und der Rest auf seine Teilbarkeit nach demselben Verfahren untersucht. (Hierhin gehören die am Anfang erwähnten Teilbarkeitsregeln).

II. Das erste Verfahren ist früher in verschiedenen Schul-Programmarbeiten behandelt *).

Mit Rücksicht darauf sollen für das erste Verfahren hier nur die Resultate der Ableitungen — bis auf eine Ausnahme — gegeben werden.

Eine Zahl habe der Reihe nach die Ziffern:

$$a_n, \quad a_{n-1}, \quad a_{n-2} \ldots a_2, \quad a_1, \quad a_0$$

es sei also

$$z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

Bestimmt man nun die Reste der Potenzen von 10 nach dem Modulus p, so dass

$$10^1 \equiv r_1, \quad 10^2 \equiv r_2 \ldots, \quad 10^n \equiv r_n \mod p$$

so muss, wenn $z \equiv 0 \mod p$ sein soll, auch

$$a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_n r_n \equiv 0 \mod p \qquad (1)$$

---

*) Dem Verfasser sind folgende bekannt geworden:

Broda, Beiträge zur Theorie der Teilbarkeit der Zahlen. Karolinenthal 1878.

Hočevar, Ueber das Kombinieren zu einer bestimmten Summe. Zur Lehre von der Teilbarkeit der Zahlen. Innsbruck 1881.

Adam, Ueber die Teilbarkeit der Zahlen. Clausthal 1889.

von der Heyden, Ueber die Kennzeichen der Teilbarkeit einer Zahl durch Zahlen von der Form $pn+1$ oder deren Teiler; in der Festschrift zur Begrüssung der 34. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Trier. Bonn 1879.

Derselbe, Zur Lehre von den Kennzeichen der Teilbarkeit der Zahlen; in der Festschrift zur Feier des 25 jährigen Bestehens der Reallehranstalt zu Essen. 1889.

J. Jacob, Zur Lehre von der Teilbarkeit der Zahlen. Mähr. Neustadt. 1893.

Alfred Holtze, Ueber periodische Decimalbrüche und ihr Analogon in anderen Zahlensystemen. Naumburg a/S. 1887.

sein. Für die Grössen r_1, r_2, r_3 . . . wählt man zweckmässig die kleinsten positiven oder positiven und negativen Zahlen: dieselben sollen im besonderen die Teilbarkeitscoefficienten genannt werden. Für den Teiler 7 sind z. B. diese Coefficienten:

$$1, \ 3, \ 2, \ 6, \ 4. \ 5$$

oder

$$1, \ 3, \ 2, \ -1, \ +3, \ -2$$

Für einen Teiler, der die Factoren 2 und 5 nicht enthält, ergiebt sich eine reine Periode der Teilbarkeitscoefficienten. Es ist gleichgültig, welchen dieser Coefficienten man bei der Untersuchung der Teilbarkeit als ersten betrachtet. (2)

Da letztere Eigenschaft in den früheren Arbeiten nicht erwähnt wird, mag hier der Beweis folgen:

Wenn ein Product aus der Zahl z und einer Potenz von z durch p teilbar ist, z. B. $z \, . \, 10^{\mu}$, so ist auch z durch p teilbar. Sind nun die Teilbarkeitscoefficienten 1, r_1, r_2 . . . r_λ, womit die Periode abschliessen mag, so ist die Bedingung der Teilbarkeit von $z \, . \, 10^{\mu}$

$$0 + 0 \, . \, r_1 + 0 \, . \, r_2 \, . \, . \, . + 0 \, . \, r_{\mu-1} + a_0 \, . \, r_\mu + a_1 \, r_{\mu+1} + a_2 \, . \, r_{\mu+2} + \, . \, . \, . \equiv 0 \text{ mod. } p$$

Dieselbe Bedingung gilt auch für die Teilbarkeit von z durch p. Man kann daher für z auch die Periode benutzen:

$$r_\mu, \ r_{\mu+1} \, . \, . \, . \, r_\lambda, \ 1, \ r_1 \, . \, . \, .$$

Beispiel: $p = 7$; Periode der Teilbarkeitscoefficienten.

$$1, \ 3, \ 2, \ -1, \ -3, \ -2$$

Dafür kann man nehmen z. B.

$$2, \ -1, \ -3, \ -2, \ 1, \ 3$$

Sei $z = 44394$;

$$2 \, . \, 4 - 1 \, . \, 9 - 3 \, . \, 3 - 2 \, . \, 4 + 1 \, . \, 4 = -14$$

durch 7 teilbar, daher auch:

Enthält der Teiler einen Factor 2^{μ} oder 5^{μ}, *so bilden die Teilbarkeitscoefficienten eine unreine Periode mit einer* μ*-gliedrigen Vorperiode.* (3)

Das erste Verfahren kann in folgender Weise verallgemeinert werden:

Teilt man die Zahl z, von den Einern anfangend, in Gruppe von je α Ziffern, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} z = \; & a_0 + a_1\,10 + a_2\,10^2 + \ldots + a_{\alpha-1}\,10^{\alpha-1} \\ & + (a_\alpha + a_{\alpha+1}\,10 + a_{\alpha+2}\,10^2 + \ldots + a_{2\alpha-1}\,.\,10^{\alpha-1})\,.\,10^\alpha \\ & + (a_{2\alpha} + a_{2\alpha+1}\,10 + a_{2\alpha+2}\,10^2 + \ldots + a_{3\alpha-1}\,10^{\alpha-1})\,.\,10^{2\alpha} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und ist $10^\alpha \equiv r_\alpha$, $10^{2\alpha} \equiv r_{2\alpha} \ldots$ mod. p, so ist z durch p teilbar, wenn

$$\left.\begin{aligned} & a_0 + a_1\,10 + a_2\,10^2 + \ldots + a_{\alpha-1}10^{\alpha-1} \\ & \quad + (a_\alpha + a_{\alpha+1}10 + a_{\alpha+2}\,10^2 + \ldots + a_{2\alpha-1}10^{\alpha-1})r_\alpha \\ & \quad + (a_{2\alpha} + a_{2\alpha+1}\,10 + a_{2\alpha+2}\,10^2 + \ldots + a_{3\alpha-1}10^{\alpha-1})r_{2\alpha} \\ & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \equiv 0 \bmod p$$

ist.

Da für einen Teiler, der relative Primzahl zu 10 ist, die Reihe der Coefficienten rein periodisch und der erste Coefficient gleich 1 ist, kann man zweckmässig α gleich der Anzahl der Periodenglieder setzen. Dann ist

$$r_\alpha = r_{2\alpha} \ldots = 1$$

Man kann daher die Regel aufstellen:

Wenn der Teiler relative Primzahl zu 10 ist, und die Periode der Teilbarkeitscoefficienten α Glieder hat, so teile man die Zahl z, von den Einern anfangend, in Gruppen von je α Ziffern und addiere diese Gruppenzahlen; ist diese Summe durch p teilbar, so auch die Zahl z. (5)

Die Regel kann bequem angewandt werden für Teiler von der Form $p = 10^\alpha - 1$. Denn es ist

$$10^\alpha \equiv 10^{4\alpha} \equiv 10^{2\alpha} \equiv \ldots 1$$

Für $\partial = 1$ ergiebt sich die bekannte Regel über die Teilbarkeit durch 9 und 3. Für $\alpha = 2$ ist die Quersumme der zweigliedrigen Gruppenzahlen zu bilden. Dies gilt also für den Teiler 99, aber auch für seine Factoren 3, 9, 11, und wir erhalten hierbei eine zweite Regel über die Teiler 3 und 9. Entsprechende Regeln sind abzuleiten für 999 ($\alpha = 3$) und deren Factoren 3, 9. 37, 111 u. s. w.

Eine noch brauchbarere Regel ergiebt sich, wenn die Hälfte der Teilbarkeitscoefficienten negative Zahlen sind, die an absolutem Werte den positiven gleich sind. Sei in diesem Falle die Anzahl der Periodenglieder 2α, so ist

$$r_0 = r_{2\alpha} = r_{4\alpha} \ldots = 1, \quad r_\alpha = r_{3\alpha} = r_{5\alpha} \ldots = -1$$

Die Regel lautet dann:

Man teile die Zahl z, von den Einern anfangend, in Gruppen von je α Ziffern und subtrahire die Summe der ungeradstelligen Gruppenzahlen von der Summe der geradstelligen; ist dieses Polynom durch p teilbar, dann auch die Zahl z. (6)

Beispiel: Für $p = 7$ ist $\alpha = 3$.

$$z = 65 \mid 626 \mid 967$$
$$65 + 967 - 626 = 406$$

durch 7 teilbar, daher auch 65626967.

Ohne weiteres ist Regel (6) anwendbar auf Teiler von der Form $10^\alpha + 1$ und deren Factoren. Denn es ist

$$10^0 \equiv 1, \quad 10^\alpha \equiv -1, \quad 10^{2\alpha} \equiv 1, \quad 10^{3\alpha} = -1 \text{ u. s. f.}$$

Für $\alpha = 1$ ergiebt sich die bekannte Regel für den Teiler 11. Entsprechende Regeln sind abzuleiten für $101 (\alpha = 2)$ $1001 (\alpha = 3)$ u. s. w. und die Teiler derselben.

III. Zweites Verfahren*).

Es sei eine Zahl

$$z = 10x + y$$

Soll z durch p teilbar sein, also

$$10x + y \equiv 0 \text{ mod. } p$$

und ist q eine ganze Zahl, so muss auch

$$10qx + qy \equiv 0 \text{ mod. } p$$

sein. Ist q relative Primzahl zu p, so gilt auch das Umgekehrte; wenn die letztere Congruenz richtig ist, dann auch die erstere.

Bestimmt man nun q so, dass

*) Das zweite Verfahren findet sich nur in der Broda'schen und der van der Heyden'schen Arbeit vor. Bei Broda bleiben jedoch die Teiler auf Primzahlen, bei von der Heyden auf Teiler von der Form $10^k . x + 1$ beschränkt.

$$10q \equiv 1\text{*)} \mod. p$$

so folgt

$$10qx \equiv x \mod. p$$

und da

$$qy \equiv qy$$

so ist

$$10qx + qy \equiv x + qy \mod. p$$

und man erhält als Kennzeichen der Teilbarkeit:

$$x + qy \equiv 0 \mod. p \tag{8}$$

Die Zahlen nun, welche Potenzen von 2 oder 5 nicht enthalten müssen von einer der Formen sein:

$$10n+1,\quad 10n+3,\quad 10n+7,\quad 10n+9$$

wenn n eine ganze, positive Zahl bedeutet. Die Congruenz (7) wird mit Hülfe von Kettenbrüchen gelöst, und man findet

für	$p = 10n+1$	$q = -n \pm fp$
„	$p = 10n+3$	$q = (3n+1) \pm fp$
„	$p = 10n+7$	$q = -(3n+2) \pm fp$
„	$p = 10n+9$	$q = (n+1) \pm fp$

wobei f eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bedeutet Setzt man die Werte in (8) ein, so ergiebt sich die Regel:

Eine Zahl $10x + y$ *ist teilbarer durch eine Zahl von der Form:*

$$\left.\begin{array}{lll} p = 10n+1, & \text{wenn} & x - (n+fp)y \equiv 0 \mod. p \\ \phantom{p = {}}10n+3, & „ & x + (3n+1+fp)y \equiv 0 \mod. p \\ \phantom{p = {}}10n+7, & „ & x - (3n+2+fp)y \equiv 0 \mod. p \\ \phantom{p = {}}10n+9, & „ & x + (n+1+fp)y \equiv 0 \mod. p \end{array}\right\} \quad (9)\text{*)}$$

Indem man f einen bestimmten Wert erteilt und dann wieder das allgemeine Glied fpy hinzufügt, das stets durch p teilbar ist, kann man die Regeln mannigfach umformen, z. B. so, dass der Ausdruck, der y als Factor enthält, überall subtractiv ist:

---

*) In meiner Arbeit war

$$10q \equiv -1$$

gesetzt. Die Aenderung (im Anschluss an Lange) bewirkt eine (allerdings unwesentliche) Vereinfachung der allgemeinen Regeln.

*) Dies sind im wesentlichen auch die Lange'schen Regeln.

$$\left.\begin{array}{ll} p = 10n+1 & x-(n+fp)y \equiv 0 \\ p = 10n+3 & x-(7n+2+fp)y \equiv 0 \\ p = 10n+7 & x-(3n+2+fp)y \equiv 0 \\ p = 10n+9 & x-(9n+8+fp)y \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (10)$$

1. Beispiel: Setzt man in der dritten Formel (10) $n = 0$, so ist $p = 7$.

Eine Zahl $10x+y$ ist durch 7 teilbar, wenn

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & f = 0 & x-2y \equiv 0 \text{ mod. } 7 \\ \text{a)} & f = 1 & x-9y \equiv 0 \text{ mod. } 7 \\ \text{c)} & f = 2 & x-16y \equiv 0 \text{ mod. } 7 \\ \text{d)} & f = -1 & x+5y \equiv 0 \text{ mod. } 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b)} & 44394 \equiv 4403 \equiv 413 \equiv 14 \equiv 0 \text{ mod. } 7 \\ \text{c)} & 44394 \equiv 4375 = 357 \equiv -77 \equiv 0 \text{ mod. } 7 \\ \text{d)} & 44394 \equiv 4459 \equiv 490 \equiv 49 \equiv 0 \text{ mod. } 7 \end{array}$$

2. Beispiel. Zu untersuchen, ob 963186 durch 213 teilbar ist.

Die zweite Formel (9) zeigt, da $n = 21$, dass für $f=0$ $x+64y$ teilbar sein muss.

$$963186 \equiv 96702 \equiv 9798 \equiv 1491 \equiv 213 \equiv 0 \text{ mod. } 213$$

Statt der vier Formeln kann man auch eine einzige entwickeln. Es bezeichne ε eine der Zahlen 1, 3, 5, 9 und $p = 10n+\varepsilon$ den Teiler. Um die Congruenz (8) zu lösen, entwickle man $\frac{10}{p}$ in einen Kettenbruch

$$\frac{10}{p} = \frac{10}{10n+1} = \cfrac{1}{n+\cfrac{\varepsilon}{10}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{10-\varepsilon}{\varepsilon}}$$

Näherungswerte:

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n+1}, \quad \frac{\varepsilon+(10-\varepsilon)}{\varepsilon(n+1)+n(10-\varepsilon)} = \frac{10}{p}$$

Man bilde die Differenz der beiden letzten Näherungswerte:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{10}{p} = -\frac{10-\varepsilon}{p(n+1)}$$

daher

$$-10(n+1)+p \cdot 1 = -(10-\varepsilon)$$

also

$$10(n+1) \equiv 10 - \varepsilon \text{ mod. } p$$

hieraus

$$10\,n \equiv -\varepsilon \text{ mod. } p$$

Soll nun

$$10\,q \equiv 1 \text{ mod. } p$$

sein, so muss auch sein

$$-10\,\varepsilon q \equiv -\varepsilon \text{ mod. } p$$

und nach Vorhergehendem

$$-10\,\varepsilon q \equiv 10\,n \text{ mod. } p$$

Da p relative Primzahl zu 10 ist, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon q &\equiv -n \text{ mod. } p \\ \text{d. h.} \quad \varepsilon q &= -n + g(10n + \varepsilon) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

wobei g eine ganze Zahl bedeutet. Dieselbe muss, da q eine ganze Zahl sein soll, so beschaffen sein, dass

$$-n + g\,.\,10n$$

durch ε teilbar ist, und da n jede beliebige ganze Zahl sein kann, dass

$$-1 + 10g \equiv 0 \text{ mod. } \varepsilon \qquad (12)$$

ist. Da ε nur eine der Zahlen 1, 3, 7, 9 sein kann, deren kleinstes Vielfaches 63 ist, so wird der Congruenz (12) genügt, wenn

$$-1 + 10g \equiv 0 \text{ mod. } 63$$

oder

$$10g \equiv 1 \quad \text{,,}$$

ist. Diese Congruenz lösen wir wieder, indem wir $\frac{10}{63}$ in einen Kettenbruch verwandeln.:

$$\frac{10}{63} = \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{3}}}$$

Näherungswerte: $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{19}$, $\frac{10}{63}$.

Differenz der beiden letzten Näherungswerte:

$$\frac{3}{19} - \frac{10}{63} = -\frac{1}{19\,.\,63}$$

oder

$$+10\,.\,19 - 3\,.\,63 = 1$$

Hieraus ergiebt sich als kleinster Wert

$$g = 19$$

Es ist somit nach (11)

$$\varepsilon q = -n + 19(10n + \varepsilon)$$

woraus sich ergiebt:

$$q = \frac{189}{\varepsilon} n + 19$$

Somit erhält man die Regel:

Eine Zahl $10x + y$ *ist teilbar durch* $p = 10n + \varepsilon$, *wenn*

$$x + \left(\frac{189}{\varepsilon} \cdot n + 19 + fp\right) y \equiv 0 \text{ mod. } p \qquad (13)$$

Dies ist die allgemeine Formel, welche die 4 Fälle (9) umfasst Man erhält

die 1te der 4 Formeln, wenn man	setzt	$\varepsilon = 1$	$f = -19$
2te „ „ „	„	$\varepsilon = 3$	$f = -6$
3te „ „ „	„	$\varepsilon = 7$	$f = -3$
4te „ „ „	„	$\varepsilon = 9$	$f = -2$

und immer wieder das allgemeine Glied $\pm fpy$ hinzufügt.

Man kann die allgemeine Regel noch in anderer Form geben, die hier ohne Ableitung angeführt werden soll:

Eine Zahl $z = 10x + y$ *ist durch einen Teiler* $p = 10n + \varepsilon$ *teilbar, wenn*

$$x + \left[(-1)^{\frac{\varepsilon+1}{2}} \cdot \varepsilon n + \frac{(-1)^{\frac{\varepsilon+1}{2}} \cdot \varepsilon^2 + 1}{10} - fp\right] \equiv 0 \text{ mod. } p \text{ ist} \qquad (14)$$

Setzt man hierin der Reihe nach $\varepsilon = 1, 3, 7, 9$, so erhält man 4 Formeln, die den Formeln (9) gleichwertig sind, die dritte mit positivem, die vierte mit negativem zweiten Gliede.

Auch das zweite Verfahren lässt eine Verallgemeinerung zu.

Zerlegt man nämlich die Zahl z in zwei Summanden $10^k x + y$. und soll

$$z = 10^k x + y \equiv 0 \text{ mod. } p$$

sein, so muss auch

$$10^k q^k x + q^k y \equiv 0 \text{ mod. } p$$

sein, und ist nun

$$10\,q \equiv 1 \text{ mod } p$$

also auch

$$10^k q^k \equiv 1 \text{ mod, } p$$

so folgt als Bedingung der Teilbarkeit

$$x + q^k y \equiv 0$$

Benutzt man die Werte von q der Formeln (9), so erhält man die Regel:

Eine Zahl $10^k x + y$ *ist teilbar durch eine Zahl von der Form*

$$\left.\begin{array}{lll} p = 10n + 1, & \textit{wenn} & x + [(1-n)^k + fp]y \equiv 0 \text{ mod. } p \\ 10n+3, & ,, & x + [(3n+1)^k + fp]y \equiv 0 \text{ mod. } p \\ 10n+7, & ,, & x + [(-(3n+2)) + fp]y \equiv 0 \text{ mod. } p \\ 10n+9, & ,, & x + [(n+1)^k + fp]y \equiv 0 \text{ mod. } p \end{array}\right\} \quad (15)$$

oder allgemein durch eine Zahl von der Form $1\,n + z$, wenn

$$x + \left[\left(-r\right)^{\frac{\varepsilon+1}{2}} . 2n + \frac{(-1)^{\frac{e+1}{2}} \varepsilon^2 + 1}{10}\Big) + fp\right] y \equiv 0 \text{ mod. } p$$

Beispiel: Es sei $p = 7$, also $n = 0$. Nach (15) ergiebt sich:

a) für $k = 2$: $\quad 100x + y$ durch 7 teilbar
   wenn $(f = 0)$ $\quad x + 4y$ durch 7 teilbar
   oder $(f = -1)$ $\quad x - 3y$ durch 7 teilbar

b) für $k = 3$ $\quad x1000x + y$ durch 7 teilbar
   wenn $(f = 1)$ $\quad x - y$ durch 7 teilbar

Hiernach zu untersuchen, ob 201344983 durch 7 teilbar

```
          201 344 | 983
          —  983
          ————————————
nach b)   201   344
          —     983
          ————————————
nach a)   200   3
          —18   3
          ————————————
          18
nach a)   +80
          ———
          98
```

Rest durch 7 teilbar, daher die gegebene Zahl.

IV. Wir haben bisher in der Zahl $10x + y$ bei den Beispielen

für y die Einer genommen, jedoch ist eine solche Voraussetzung in den Ableitungen nicht gemacht; y kann eine zusammengesetzte positive oder negative Zahl sein. So kann man z. B., um die Teilbarkeit von 443394 durch 7 zu untersuchen,

zerlegen $$44394 = 4400 \cdot 10 + 394$$

und bilden $$4400 - 2 \cdot 394 = 3612$$

ferner ist

$$3612 = 360 \cdot 10 + 12 \equiv 360 - 2 \cdot 12 \equiv 336 \equiv 0 \text{ mod. } 7$$

Setzen wir nun, wenn $a_n, a_{n-1}, a_{n-2} \ldots a_2, a_1, a_0$ die Ziffern einer Zahl bedeuten,

$$z = (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} \ldots + a_1) 10 + a_0$$

und ist q eine der Zahlen, für welche im Fall der Teilbarkeit durch p die Congruenz

$$x + qy \equiv \text{mod. } p$$

erfüllt wird, so erhalten wir als Kennzeichen der Teilbarkeit von z

$$a_n 10^{n-1} + 10^{n-2} \ldots + a_2 10 + a_1 + a_0 q \equiv 0$$

und unter Anwendung desselben Verfahrens, indem wir jetzt

$$a_1 + a_0 q = y \text{ setzen,}$$

$$a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-2} \ldots + a_3 10 + a_2 + a_1 q^2 + a_0 q^2 \equiv 0$$

u. s. w. Schliesslich ergiebt sich die Regel:

Eine Zahl

$$z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

ist teilbar durch eine Zahl

$$p = 10n + \varepsilon$$

wenn

$$a_n + q a_{n-1} + a_{n-2} q^2 \ldots + a_0 q^n \equiv 0 \text{ mod. } p \qquad (16)^{*})$$

Beispiel: 44394 ist durch 7 teilbar, weil

$$(q = -2) \quad 4 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 \equiv 0 \text{ mod. } 7.$$

---

*) Die Formel ist schon von van der Heyden aufgestellt.

Wollte man das Kennzeichen von (16) noch vereinfachen, so müsste man für die Potenzen von q die kleinsten Reste nach dem Teiler p suchen. Nun folgt aus der Congruenz

$$10\,q \equiv 1 \text{ mod. } p$$

dass q und p relative Primzahlen sein müssen, und nach dem verallgemeinerten Fermat'schen Satze, nach welchem

$$q^{(n)} \equiv \text{mod. } p$$

ist, wobei $\varphi(p)$ die Anzahl aller derjenigen Zahlen von 1 bis p bezeichnet, die relativen Primzahlen zu p sind, giebt es sicher eine Zahl λ (entweder $\varphi(p)$ oder eine kleinere Zahl), für welche

$$q^{\lambda} \equiv 1 \text{ mod. } p$$

Die Reste der Potenzen von q müssen ferner eine reine Periode bilden, wir nennen dieselben σ_0, σ_1, $\sigma_2 \cdot \cdot \cdot$ und nehmen also $\sigma_\lambda = 1$ an.

Nach Formel (16) ist nun die Bedingung für die Teilbarkeit von z:

$$a_0\,\sigma_n + a_1\,\sigma_{n-1} \cdot \cdot \cdot + a_{n-\lambda}\,\sigma_\lambda \cdot \cdot \cdot + a_n \equiv 0 \text{ mod. } p$$

Nach Formel (1) ist die Bedingung:

$$a_0 r_0 + a_1 r_1 + \cdot \cdot \cdot + a_n r_n \equiv 0 \text{ mod. } p$$

Ist nun

$$1 = r_0 = \sigma_\lambda \equiv q^{\lambda}$$

so ist

$$r_1 \equiv 10 r_0 \equiv 10\,q \,.\, q^{\lambda-1}$$

und da

$$10\,q \equiv 1$$

so folgt

$$r_1 \equiv q^{\lambda+1} \equiv \sigma_{\lambda-1}$$

d. h.

$$r_2 = \sigma_{\lambda-2}$$

wenn die kleinsten Reste genommen werden. Ebenso

$$r_2 \equiv 10\,r_1 \equiv 10 q \,.\, q^{\lambda-2}$$

$$10 q \equiv 1$$

folglich

$$r_2 \equiv q^{\lambda-2} \equiv \sigma_{\lambda-2}$$

d. h.

$$r_2 = \sigma_{\lambda-2}$$

Ebenso folgt

$$r_3 = \sigma_{\lambda+3}, \quad r_5 = \sigma_{\lambda-4} \quad \text{u. s. f.}$$

schliesslich

$$r_\lambda = \sigma_0 = 1$$

Wir erkennen, dass die Perioden der Coefficienten übereinstim-

men, und dass nur eine Verschiebung derselben in dem Polynomen gegenüber dem ersten stattfindet. Dies aber entspricht unserer Regel (2) wonach es gleichgültig, welchen Coefficienten man als ersten wählt. *Es folgt, dass Formel* (16) *uns keine wesentlich anderen Merkmale liefert, als Formel* (1). *Hier kehrt das zweite Verfahren in das erste zurück.*

Die kleinsten Reste der Potenzen von q stimmen also in umgekehrter Reihenfolge mit den Teilbarkeitscoefficienten überein; haben diese die Periode

$$1,\ r_1,\ r_2\ .\ .\ .\ r_{\lambda-1}$$

so sind die Reste der Potenzen von q der Reihe nach

$$\begin{aligned} &\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2\ .\ .\ .\ \sigma_{\lambda-2},\ \sigma_{\lambda-1} \\ = &\ 1,\ r_{\lambda-1},\ r_{\lambda-2}\ .\ .\ .\ r_2,\ r_1 \end{aligned}$$

Diese Beziehungen ermöglichen es noch, die allgemeine Bedingung der Teilbarkeit nach dem zweiten Verfahren noch in anderer Weise zu fassen.

Es war

$$10^k\,.\,x + y \equiv 0 \text{ mod. } p$$

wenn

$$x + q^k y \equiv 0$$

Nun ist

$$q^k \equiv \sigma_k$$

daher die Bedingung der Teilbarkeit:

$$x + \sigma_k y \equiv 0 \text{ mod. } p$$

und die Regel:

Eine Zahl $10^k x + y$ *ist teilbar durch*

$$p = 10n + \varepsilon$$

wenn

$$x + (\sigma_k + fp) \equiv 0 \text{ mod. } p \tag{17}$$

wobei σ_k *derjenige Teilbarkeitscoefficient ist, der in der Periode von* $1 = \sigma_0$ *ab rückwärts gezählt, an kter Stelle steht, f aber eine beliebige ganze Zahl ist.*

Beispiel: 112 1698 172 : 41.

Teilbarkeitscoefficienten für 41:

$$1,\ 10,\ 18,\ 16,\ -4$$

Nach (7) ist dann, wenn $f = 0$ gesetzt wird:

$$10^4 x + y \equiv 0 \quad \text{wenn} \quad x + 10y \equiv 0$$
$$10^2 x + y \equiv 0 \quad \text{„} \quad x + 16y \equiv 0$$
$$10\ x + y \equiv 0 \quad \text{„} \quad x - 4y \equiv 0$$

```
1 121 69 | 8172
+81 720
----------
1938 | 89
+14 24            32 | 8
------
336 | 2           —32
—8               -----
-----               0
```

durch 41 teilbar.

Es möge schliesslich noch erwähnt sein, dass das zweite Verfahren gegen das erstere einen Nachteil hat.

Geht die Zahl z durch p geteilt nicht auf, so liefert die Untersuchung des Ausdrucks (1) direct den Rest der Division. Denn da

$$z \equiv a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 \ . \ . \ . + a_n r_n \ \text{mod.}\ p$$

ist, so muss, wenn

$$z \equiv r \ \text{mod.}\ p$$

auch

$$a_0 + a_1 r_1 \ . \ . \ . + a_n r_n \equiv r \ \text{mod.}\ p$$

sein. Der Rest, den dieser Ausdruck ergiebt, ist auch der Rest der Zahl z. Anders ist es nach dem zweiten Verfahren. Ist

$$z = 10x + y \equiv r \ \text{mod.}\ p$$

und die Grösse q bestimmt, so ist

$$10qx + qy \equiv qr$$

und da

$$10q \equiv 1$$

so ist

$$x + qy \equiv qr$$

Stellt man die Zahl $x + qy$ wieder in der Form $10x_1 + y_1$ dar, so folgt, wie vorher

$$x_1 + qy_1 \equiv q^2 r$$

und dann weiter

$$x_2 + qy_2 \equiv q^3 r$$

u. s. f. Der Verkleinerung der Zahl auf der linken Seite entspricht eine Vergrösserung auf der rechten, und man muss schliesslich noch eine Congruenz lösen, um r zu bestimmen. Zur Vereinfachung wird

man allerdings wieder die kleinsten Reste der Potenzen von q nach dem Modulus p benutzen, also die Grössen σ_0, σ_1 σ_2 . . . u. s. w.

Beispiel: Zu untersuchen

$$287\,539 : 13$$

Teilbarkeitscoefficienten für 13:

$$1, \quad -3, \quad -4, \quad -1, 3, 4$$

Für q nehmen wir -9

$$\begin{array}{ll}
287\,53 \mid 9 \equiv & r \text{ mod. } 13 \\
\underline{\quad 81} & \\
2867 \mid 2 \equiv & 4r \text{ mod. } 13 \\
\underline{\quad 18} & \\
284 \mid 9 \equiv & 3r \text{ mod. } 13 \\
\underline{\ 81} & \\
203 \quad \equiv & -r \text{ mod. } 13
\end{array}$$

$$r \equiv -203 \equiv -8 \equiv 5 \text{ mod. } 13$$

also $$r = 5.$$

V.

Ueber eine besondere Art der Affinität.

Von

H. E. Timerding

in Strassburg.

Eine allgemeine affine Transformation des Raumes lässt sich, wenn man den einen im Endlichen gelegenen Punkt, der hierbei ungeändert bleibt, zum Ursprunge eines rechtwinkligen Coordinatensystems wählt, in folgender Form darstellen:

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$$

indem x_1, x_2, x_3 die Coordinaten des ursprünglichen, y_1, y_2, y_3 die des transformirten Punktes bezeichnen. Wir fragen nun, welche geometrische Bedeutung es hat, wenn zwischen den neun Coefficienten der Substitutionsgleichungen die drei Beziehungen

$$(2)\qquad a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32}$$

bestehen.

Durch die affine Verwandtschaft gehen parallele Gerade wieder in parallele Gerade über, und beliebige Paare homologer Strecken auf zwei entsprechenden Geraden stehen zu einander in demselben Verhältniss. Dieses Verhältniss hängt nur von der Richtung der ursprünglichen oder transformirten Geraden ab. Seien von

von irgend einer Strecke auf der ersteren x_1, x_2, x_3 die Projectionen auf die Coordinatenaxen, so ist das zu allen Geraden von derselben Richtung gehörende Vergrösserungsmass μ durch die Gleichung bestimmt:

$$(3) \quad \mu^2 = \frac{(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)^2+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)^2+(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

Durch die affine Verwandtschaft gehen parallele Ebenen wieder in parallele Ebenen über, und entsprechende Ebenen sind ihrerseits affin mit einander verwandt, die Flächen aller Figuren in der transformirten Ebene erscheinen den homologen in der ursprünglichen Ebene gegenüber in demselben Masse vergrössert (oder verkleinert). Dieses Vergrösserungsmass M wird für die Ebenen

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = \text{constant}$$

durch die Gleichung bestimmt:

$$(4) \quad \mu^2 = \frac{(A_{11}u_1+A_{12}u_2+A_{13}u_3)^2+(A_{21}u_1+A_{22}u_2+A_{23}u_3)^2+(A_{31}u_1+A_{32}u_2+A_{33}u_3)^2}{u_1^2+u_2^2+u_3^3}$$

wenn A_{ik} die dem Elemente a_{ik} adjungirte Unterdeterminante der Determinante

$$(5) \qquad \Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$$

bestimmt, die nicht verschwinden darf.

Gelten nun die Bestimmungen (2), so wollen wir schreiben

$$6) \quad f((x)) = a_{12} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{31} x_3 x_1 + 2a_{12} x_1 x_2$$

und setzen die halben partiellen Derivirten dieser Function nach den Veränderlichen

$$(7) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = f_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = f_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = f_3 \end{cases}$$

Es ist dann also

$$8) \qquad y_1 = f_1((x)), \quad y_2 = f_2((x)), \quad y_3 = f_3((x))$$

$$(9) \quad \text{und} \qquad f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1$$

ist die Gleichung des Ellipsoides E, dem die Kugel K mit dem Radius 1 um den Ursprung O entspricht, und dessen Radien vectoren

den reciproken Wert der Linienvergrösserung für alle Geraden ihrer Richtung angeben.

Setzen wir ferner

$$(10)\quad F((u)) = A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{23}u_2u_3 + 2A_{31}u_3u_1 + 2A_{12}u_1u_2$$

und die halben Derivirten dieser Function

$$(11)\quad \begin{cases} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 = F_1 \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 = F_2 \\ A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + u_2A_{33}u_3 = F_3 \end{cases}$$

dann wird

$$(12)\quad v_1 = F_1((u)),\quad v_2 = F_2((v)),\quad v_3 = F_3((u))$$

wenn

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 1 \quad \text{und} \quad v_1y_1 + v_2y_2 + v_3y_3 = 1$$

entsprechende Ebenen sind.

$$13)\quad F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1$$

ist die Gleichung des Ellipsoides E in Ebenencoordinaten. Seine Tangentialebenen entsprechen den Tangentialebenen der Kugel K, und die Abstände derselben vom Ursprunge geben den reciproken Wert der Flächenvergrösserung für alle Ebenen von derselben Stellung an.

Die Gleichung

$$(14)\quad f((x)) = 1$$

drückt die Bedingung dafür aus, dass der Punkt x und sein entsprechender y conjugirte Punkte bezüglich der Kugel K sind, denn diese Gleichung lässt sich auch schreiben

$$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = 1$$

Ebenso ist

$$(15)\quad F((u)) = 1$$

die Bedingung dafür, dass die einander entsprechenden Ebenen u und v bezüglich der Kugel K conjugirt sind.

Die durch die Gleichungen (14) und (15) dargestellte Fläche F kann uns zugleich mit der Kugel K dienen, um die Affinität aus zwei polaren Verwandtschaften zusammenzusetzen. Wir ordnen einem Punkte seine Polarebene bezüglich der Fläche F zu und dieser

wieder ihren Pol bezüglich der Kugel K, dann entspricht dieser Pol dem ersten Punkte in unserer affinen Verwandtschaft. Wir ersetzen nämlich die Gleichungen (8) durch das doppelte System

$$f_i((x)) = w_i \quad w_i = y_i$$

indem die w_i Ebenencoordinaten bezeichnen. Zu einer Ebene findet man ihr in der Affinität entsprechende, indem man ihren Pol bezüglich der Fläche F und von diesem Pole die Polare bezl. der Kugel K sucht.

Das Ellipsoid E ist bezüglich der Fläche F der Kugel K reciprok, wird also von den Polen ihrer Tangentialebenen gebildet und von den Polaren ihrer Punkte umhüllt. Die Hauptaxen von ε fallen darum mit den Hauptaxen von F zusammen. Wählen wir diese Hauptaxen gleichzeitig zu den Axen der neuen Coordinatensysteme, und sei in diesem die Gleichung der Fläche F:

$$(16) \qquad \left(\frac{\xi_1}{\alpha_1}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{\xi_2}{\alpha_1}\right)^2 + \varepsilon'\left(\frac{\xi_2}{\alpha_3}\right)^2 = 1, \quad x_1 x' = \pm 1$$

dann wird die Gleichung der Fläche E

$$(17) \qquad \left(\frac{\xi_1}{\alpha_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{\alpha_3}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{\alpha_3}\right)^2 = 1$$

Die Affinität wird dann durch die einfachen Gleichungen dargestellt

$$(18) \qquad \eta_1 = \frac{1}{\alpha_1^2}\xi, \quad \eta_2 = \frac{\varepsilon}{\alpha_2^2}\cdot\xi_2\,\eta_3 = \frac{\varepsilon'}{\alpha_3^2}\xi_3$$

Die Linearvergrösserung wird für die Geraden mit den Richtungs-, cosinus λ_1, λ_2, λ_3

$$(19) \qquad \mu = \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{\alpha_1^4} + \frac{\lambda_3^2}{\alpha_1^2} + \frac{\lambda_3^2}{\alpha_1^4}}$$

und die Flächenvergrösserung für die Ebenen, deren Normalen die Richtungscosinus ν_1, ν_2, ν_3 haben,

$$(20) \qquad M\sqrt{\frac{\nu_1^2}{\alpha_2^4\alpha_3^4} + \frac{\nu_1^2}{\alpha_3^4\alpha_1^4} + \frac{\nu_3^2}{\alpha_1^4\alpha_2^4}}$$

Bei einer beliebigen affinen Transformation gehen durch den im Endlichen gelegenen, sich selbst entsprechenden Punkt drei Gerade hindurch, die in sich selbst transformirt werden. Wählt man sie zu Axen eines schiefwinkligen Coordinatensystems, so stellt sich die Transformation durch eben solche Gleichungen wie die obigen (19)

dar. Aber nur für die oben behandelte besondere Art der Affinität wird das schiefwinklige Coordinatensystem zu einem rechtwinkligen. Nach Analogie der gleichseitigen Hyperbel und des gleichseitigen Kegels könnte man diese Art der Affinität als gleichseitige Affinität bezeichnen.

Auch im allgemeinen Falle lässt sich die affine Transformation aus reciproken Verwandtschaften zusammensetzen. Für die Ordnungsflächen derselben bilden die sich selbst entsprechenden Linien ein gemeinsames System conjugirter Durchmesser. Die eine der Flächen ist im übrigen willkürlich, die andere ist durch sie aber eindeutig bestimmt, so dass die quadratischen Flächen mit jenem gemeinsamen System conjugirter Durchmesser durch die Affinität in Paaren einander zugeordnet werden.

Auch für die allgemeine affine Verwandtschaft hat das Ellipsoid E eine besondere Bedeutung, für dessen Punkte der Zähler des Bruches in (3) und für dessen Tangentialebenen der Zähler des Bruches in (4) der Einheit gleich wird. Wenn für zwei affine Verwandtschaften dies Ellipsoid dasselbe ist, so unterscheidet sich die eine von der anderen nur durch die Hinzufügung einer blossen Drehung. Insbesondere ergiebt sich also, dass die allgemeine affine Transformation sich aus einer gleichseitigen und einer blossen Drehung zusammensetzen lässt. Irgend eine Figur lässt sich durch eine gleichseitige Affinität immer in eine solche verwandeln, welche der aus der ersten durch eine ganz beliebige Affinität erhaltenen Figur congruent ist.

Strassburg, den 20. April 1898.

VI.

Ueber Tetraeder, deren Seitenflächen teilweise oder sämtlich gleich sind, und über das Hyperboloid der Höhen beim gleichseitigen Tetraeder.

Von

F. August.

Der Herausgeber dieses Archivs hat in der Abhandlung: Ueber das gleichseitige und das Höhenschnittstetraeder (2. Reihe, Tl. XVI, S. 257 und 333) zwei specielle Arten von Tetraedern betrachtet, die durch mancherlei interessante Eigenschaften ausgezeichnet sind. Namentlich hat er nachgewiesen, dass bei einem gleichseitigen Tetraeder, d. h. bei einem solchen, dessen Seitenflächen gleich gross sind, diese Seitenflächen auch congruente, und zwar spitzwinklige Dreiecke sind. Dieser Nachweis ist durch eine Rechnung geführt, die zwar ganz einfach ist, mir aber doch keinen rechten Einblick in den geometrischen Zusammenhang zu gewähren scheint. Im Folgenden will ich auf rein geometrischem Wege etwas allgemeiner solche Tetraeder untersuchen, bei denen gewisse Seitenflächen einander gleich sind. Hierbei ergiebt sich im besondern auch der Hoppe'sche Satz. Daran anschliesend will ich die Gleichung des Hyperboloids aufstellen, das durch die vier Höhenlote des gleichseitigen Tetraeders und durch die vier Höhenschnittlote, d. h. die in den Höhenschnitten der Seitenflächen auf diesen errichteten Lote, hindurchgeht. Wegen

der symmetrischen Lage dieser acht Geraden beim gleichseitigen Tetraeder ist die Aufstellung dieser Gleichung überaus einfach, während sie beim beliebigen Tetraeder bei weitem verwickelter ist.

Vorweg sei an eine bekannte Eigenschaft des allgemeinen Tetraeders erinnert: Von den Geraden, die die Mitten der Kanten eines Tetraeders verbinden, bilden viermal je drei die Mittellinien einer Seitenfläche und teilen diese in vier congruente Dreiecke; die drei übrigen, die die Mitten der Gegenkanten verbinden, halbiren sich gegenseitig im Schwerpunkte des Tetraeders. Wir wollen diese letzteren drei Geraden, die im allgemeinen schief auf einander stehen, die Tetraederaxen nennen.

I. Tetraeder mit gleichen Seitenflächen.

Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 die vier Eckpunkte eines Tetraeders. (Siehe die Figur). A, B, C seien die Halbirungspunkte der Kanten P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, $A'B'C'$ diejenigen der Gegenkanten P_3P_4, P_4P_2, P_2P_3.

Die Geraden AA', BB', CC' sind die Tetraederaxen. Sie halbiren sich im Schwerpunkte O.

Sind nun zwei Tetraederflächen einander gleich, etwa $P_1P_2P_3$ und $P_1P_4P_3$, so sind die zur gemeinschaftlichen Kante P_1P_3 in beiden gehörigen Höhen einander gleich, also auch die Hälften dieser Höhen; d. h. die Kante P_1P_3 hat von den ihr parallelen Geraden AC' und $A'C$ gleichen Abstand. Projicirt man somit die Kante P_1P_3 senkrecht auf die Ebene $AC'A'C$, so hat auch die Projection von AC' und $A'C$ gleichen Abstand. Sie geht deshalb durch O, und die projicirende Ebene enthält die Axe BOB' in sich und ist durch die Punkte P_1P_3B' bestimmt. Wir haben also den Satz:

> Sind zwei Tetraederflächen gleich, so steht die Ebene, die durch die beiden gemeinschaftliche Kante und durch die Mitte der Gegenkante geht, senkrecht auf der Ebene durch die Mitten der vier übrigen Kanten. Die beiden gleichen Flächen haben überdies vom Schwerpunkte O gleichen Abstand.

Durch wiederholte Anwendung kommt man nun zu weiteren Folgerungen.

Sind zunächst drei Tetraederflächen einander gleich, etwa die drei in P_1 zusammenstossenden, so haben sie nach dem letzten Teil des ausgesprochenen Satzes alle drei von O gleichen Abstand, und

die Linie $P_1 O$ geht durch den Mittelpunkt der dem Tetraeder eingeschriebenen Kugel.

Wichtiger aber erscheint der folgende Fall:

Sind die Tetraederflächen paarweise gleich, wenn etwa

$$P_1 P_2 P_3 = P_1 P_4 P_3 \quad \text{und} \quad P_2 P_1 P_4 = P_2 P_3 P_4$$

so stehen nach dem ersten Satze die Ebenen $P_1 P_3' B'$ und $P_2 P_4 B$ beide senkrecht auf der Ebene $AC'A'C$, also ist ihre Durchschnittskante, d. h. die Axe BB', Lot auf dieser Ebene und steht deshalb auch senkrecht auf den Kanten $P_1 P_3$ und $P_2 P_4$. Lässt man das Tetraeder um BB' eine halbe Drehung machen, so kommt es wieder mit sich selbst zur Deckung, die gleichen Seitenflächen siud congruent, und es ist

$$P_1 P_2 = P_3 P_4 \quad \text{und} \quad P_2 P_3 = P_4 P_1$$

Wir haben somit weiter den Satz:

> Sind von den Tetraederflächen paarweise je zwei einander gleich, so steht die Axe, die durch die Mitten der beiden Kanten geht, in denen die gleichen Flächen zusammenstossen, senkrecht auf jenen Kanten und ist ein Lot auf der Ebene durch die Mitten der vier übrigen Kanten. Von diesen vier Kanten sind je zwei Gegenkanten einander gleich. Ueberdies sind die gleichen Flächen auch congruent.

Hieraus folgt dann ohne Weiteres:

> Im gleichseitigen Tetraeder stehen die drei Axen auf einander senkrecht, und jede Axe ist senkrecht auf den beiden Seitenkanten, deren Mitten sie verbindet. Die Gegenkanten sind einander gleich. Die Seitenflächen sind congruent.

In jedem Eckpunkt des gleichseitigen Tetraeders treten als Seiten der körperlichen Ecke die drei Dreieckswinkel einer der congruenten Seitenflächen auf. Die Summe der beiden kleinsten Seiten dieser körperlichen Ecke ist grösser als die dritte, d. h. die Summe der beiden kleinsten Winkel einer Seitenfläche ist grösser als der dritte. Der grösste Winkel der Seitenflächen ist also **spitz**, und wir können den Satz zufügen:

Die Seitenflächen eines gleichseitigen Tetraeders sind congruente spitzwinklige Dreiecke.

Der Nachweis, dass die Seitenflächen spitzwinklig sind, ist zu Anfang des Abschnittes II. noch einmal in anderer Weise geführt.

II. Das Höhenhyperboloid beim gleichseitigen Tetraeder.

Es seien die Längen der halben Axen des gleichseitigen Tetraeders

$$OA = \alpha, \quad OB = \beta, \quad OC = \gamma$$

die wir im allgemeinen als verschieden annehmen. Die Richtungen dieser drei Strecken seien die positiven Coordinatenaxen.

Dann sind die Coordinaten der Punkte

$$\begin{array}{ll} P_1: & +\alpha_1 + \beta_1 + \gamma \\ P_2: & +\alpha_1 - \beta_1 - \gamma \\ P_3: & -\alpha_1 + \beta_1 - \gamma \\ P_4: & -\alpha_1 - \beta_1 + \gamma \end{array}$$

Die Kanten des Tetraeders sind

$$\begin{aligned} a &= P_1P_2 = P_3P_4 = 2\sqrt{\beta^2+\gamma^2} \\ b &= P_1P_3 = P_2P_4 = 2\sqrt{\gamma^2+\alpha^2} \\ c &= P_1P_4 = P_2P_3 = 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{aligned}$$

Sieht man die Kanten a, b, c als gegeben an, so ergiebt sich

$$8\alpha^2 = b^2+c^2-a^2, \quad 8\beta^2 = c^2+a^2-b^2, \quad 8\gamma^2 = a^2+b^2-c^2$$

α, β, und γ sind also nur dann alle drei reell, wenn die Seitenflächen s p i t z w i n k l i g e Dreiecke sind, wie am Schluss des Abschnittes I. bereits auf anderem Wege bewiesen war.

Die Seitenfläche $P_2P_3P_4$ schneidet die Axen in den Punkten $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, hat also die Gleichung

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}+1=0$$

und die Richtungscosinus ihrer Normalen verhalten sich wie $\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma}$. Also sind durch die Gleichungen

$$x = +\left(\alpha + \frac{u}{\alpha}\right), \quad y = +\left(\beta + \frac{u}{\beta}\right), \quad z = +\left(\gamma + \frac{u}{\gamma}\right)$$

mit variirendem u die Coordinaten eines Punktes des ersten Höhenlotes dargestellt.

Um zu einem der drei anderen Höhenlote überzugehen, hat man nur vor je zwei der drei Klammern rechts statt des positiven das negative Vorzeichen zu setzen.

Ferner sind die Gleichungen

der Ebene durch P_2, lotrecht zur Geraden P_2P_4:

$$(x - \alpha) \,.\, 0 + (y + \beta) \,.\, 2\beta - (z + \gamma)\, 2\gamma = 0$$
$$\text{oder} \quad (y + \beta)\beta = (z + \gamma)\gamma$$

der Ebene durch P_3, lotrecht zur Geraden P_4P_2:

$$(z + \gamma)\gamma = (x + \alpha)\alpha$$

der Ebene durch P_4 lotrecht zur Geraden P_2P_3:

$$(x + \alpha)\alpha = (y + \beta)\beta$$

Sind zwei dieser Gleichungen erfüllt, so ist es auch die dritte Diese drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden, nämlich in dem Lote, das im Höhenschnitt des Dreiecks $P_2P_3P_4$ auf der Ebene dieses Dreiecks errichtet ist, und das wir das erste H ö h e n s c h n i t t l o t nennen wollen. Setzt man

$$(x + \alpha)\alpha = (y + \beta)\beta = (x + \gamma)\gamma = -u$$

oder

$$x = -\left(\alpha + \frac{u}{\alpha}\right), \quad y = -\left(\beta + \frac{u}{\beta}\right), \quad z = -\left(\gamma + \frac{u}{\gamma}\right)$$

so beschreibt der Punkt x, y, z mit variirendem u das erste Höhenschnittlot.

Um zu einem der drei anderen Höhenschnittlote überzugehen, hat man nur vor je zwei der drei Klammern rechts statt des negativen das positive Vorzeichen zu setzen.

Wir haben also das Resultat:

Durch die Gleichungen

$$1) \qquad x = \pm\left(\alpha + \frac{u}{\alpha}\right), \quad y = \pm\left(\beta + \frac{u}{\beta}\right), \quad z = \pm\left(\gamma + \frac{u}{\gamma}\right)$$

mit dem Parameter u sind je nach Wahl der Vorzeichen acht Gerade

dargestellt, und zwar je ein Höhenlot, wenn die Zahl der positiven Vorzeichen ungerade ist, das entsprechende Höhenschnittlot aber bei entgegengesetzter Wahl der Vorzeichen.

Wir betrachten nun eine Fläche zweiter Ordnung mit der Gleichung

$$2)\qquad Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$$

und untersuchen, ob es möglich ist, die Coefficienten derselben so zu bestimmen, dass sie alle Punkte einer der acht Geraden 1) enthält. Dies führt in allen acht Fällen auf dieselbe Bedingung, nämlich auf die, dass

$$3)\qquad A\left(\alpha+\frac{u}{\alpha}\right)^2+B\left(\beta+\frac{u}{\beta}\right)^2+C\left(\gamma+\frac{u}{\gamma}\right)^2+D=0$$

für alle Werte von u sein muss. Hieraus folgen die Gleichungen

$$4)\qquad \left.\begin{array}{ll} A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+D & =0 \\ A+B+C & =0 \\ \frac{A}{\alpha^2}+\frac{B}{\beta^2}+\frac{C}{\gamma^2} & =0 \end{array}\right\}$$

Aus den beiden letzten dieser Gleichungen folgt

$$A=\lambda\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\beta^2}\right),\quad B=\lambda\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right),\quad C=\lambda\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

und dann aus der ersten

$$-\lambda\left[\alpha^2\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)+\beta^2\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)+\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)\right]+D=0$$

also

$$\lambda=-\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2\,.\,D}{\alpha^4(\beta^2-\gamma^2)+\beta^4(\gamma^4-\alpha^2)+\gamma^4(\alpha^2-\beta^2)}$$

$$=+\frac{\alpha^2\,.\,\beta^2\,.\,\gamma^2\,.\,D}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)}$$

Mithin ist die Gleichung der Fläche 2) nach einigen Umformungen

$$5)\qquad \alpha^2(\beta^2-\gamma^2)x^2+\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)y^3+\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)z^2$$
$$+(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)=0$$

Die Gleichung 5) stellt also eine Fläche zweiter Ordnung dar, auf der die sämtlichen acht Geraden 1) d. h. die vier Höhenlote und die vier Höhenschnittlote, liegen. Diese Fläche nennen wir das Höhenhyperboloid.

Die Halbaxen des Höhenhyperboloids sind:

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)}, \quad \frac{1}{\beta}\sqrt{(\beta^2-\gamma^2)(\beta^2-\alpha^2)}$$

$$\frac{1}{\gamma}\sqrt{(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)}$$

Ist $\alpha > \beta > \gamma$, so ist der zweite dieser drei Werte imaginär, die beiden andern sind reell. Die Fläche ist also ein (einschaliges) Hyperboloid, dessen reelle Halbaxen in die x Axe und in die z Axe fallen.

Singuläre Fälle treten ein, wenn die Werte α, β, γ nicht sämtlich verschieden sind.

Sind zwei dieser drei Werte einander gleich, etwa

$$\alpha = \beta \gtrless \gamma$$

so folgt aus den Gleichungen 4)

$$D = 0, \quad C = 0, \quad A + B = 0$$

Die Gleichung der Fläche wird

$$x^2 - y^2 = 0$$

Die Fläche zerfällt also in zwei auf einander senkrechte Ebenen. Dieser Fall kann auch als Grenzfall aus dem allgemeinen Falle abgeleitet werden. Die Gleichung 5) behält ihre Gültigkeit.

Die Seitenflächen des Tetraeders sind alsdann gleichschenklig, die Höhenlote schneiden sich paarweise, und ebenso die ihnen entsprechenden Höhenschnittlote.

Sind alle drei Werte α, β, γ einander gleich, so ergeben die Gleichungen 4) nur die Bedingungen

$$D = 0, \quad A + B + C = 0$$

Alle Gleichungen von der Form

$$A(x^2 - z^2) + B(y^2 - z^2) = 0$$

bei beliebiger Wahl von A und B erfüllen die Bedingung. Diese Gleichung stellt eine Schar von Kegeln dar, die sich in den vier Geraden

$$x^2 = y^2 = z^2$$

durchschneiden. Die acht Geraden 1) fallen paarweise in je eine dieser vier Geraden zusammen. Das Tetraeder ist regulär, die Höhen schneiden sich in O und sind zugleich Höhenschnittlote.

Schliesslich wollen wir noch zwei specielle Fälle besprechen:

Soll das Hyperboloid 5) eine Umdrehungsfläche sein, so muss sein

$$\alpha^2(\beta^2-\gamma^2) = \gamma^2(\alpha^2-\beta^2), \quad \text{oder}$$

$$\frac{2}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma^2}, \quad \text{d. h.} \quad \beta = \frac{\alpha\gamma\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}$$

Wir fällen im Dreieck AOC von O die Senkrechte auf AC. Deren Länge ist gleich $\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}$; β muss also gleich der Diagonale eines Quadrats sein, dessen Seite gleich jener Senkrechten ist, damit das Höhenhyperboloid eine Umdrehungsfläche sei.

Soll einer der Hauptschnitte des Hyperboloids eine gleichseitige Hyperbel sein, z. B. der in der xy Ebene, so muss sein

$$A+B = 0$$

Da aber nach der Gleichung 4) allgemein

$$A+B+C = 0$$

ist, so folgt $C = 0$ Diese Bedingung führt also auf den oben besprochenen singulären Fall, wo das Hyperboloid in zwei auf einander senkrechte Ebenen zerfällt, und die Seitenflächen des Tetraeders gleichschenklig sind.

Berlin, im October 1898.

VII.

Die Stellung der Venus bei ihrem grössten Glanze.

Von

Prof. Dr. **F. W. Fischer** in Kempen am Rhein.

Wenn man den Lauf eines Planeten auch nur einige Zeit mit Anwendung eines Fernrohres von ganz mässiger Vergrösserung oder gar blos mit freiem Auge verfolgt, so erkennt man leicht, die Zu- oder Abnahme der Helligkeit, mit welcher derselbe zu verschiedenen Zeiten glänzt. Mars hat als untere Helligkeitsgrenze nach Prof. G. Müller die Grösse des Regulus gleich 1,5, als obere die Grössenclasse —2,7. Für Jupiter ergaben die Messungen des Prof. G. Müller, welche in den Jahren 1878-90, also während des ganzen Umlaufs dieses Planeten ausgeführt wurden, dass die mittlere Oppositionshelligkeit desselben $-2\frac{1}{4}$ Grösse beträgt, während die grösste Helligkeit, als der Planet in Opposition nahe dem Perihel war, $-2^2/_3$ Grösse erreichte. Die Helligkeit der Venus spielte zwischen —3 Grössenclasse als Minimum und —4,5 Grösse als Maximum.

Wenn nun zwar die Differenz der Helligkeitsgrenzen beim Mars diejenige der Venus übertrifft, so fällt doch der Glanz der Venus in seinem Maximum mehr auf, als der des Mars, weil der erstere im Maximum den letzteren beinahe um zwei Grössenclassen übertrifft, der Glanz der Venus also dann 6 mal so gross ist, als der des Mars, so dass die Venus zuweilen unter günstigen Umständen bei Tage mit freiem Auge gesehen wird.

Auffallend ist ferner, dass der grösste Glanz der Venus nicht, wie man erwarten sollte, zur Zeit der grössten Elongationen oder nahe bei den oberen Conjunctionen stattfindet, sondern in der Nähe der unteren Conjunctionen. Deswegen haben schon früher Halley und andere untersucht, wie die Stellung der Venus zur Erde und Sonne sein müsse, dass ihr Lichtglanz für einen Beobachter auf der Erde den grössten Wert habe. Diese Frage soll auch hier behandelt werden.

Es sei S die Sonne, T die Erde, V der Mittelpunkt der Venus, $cabd$ ein Hauptkreis derselben in der Ebene STV; ferner sei ab senkr. auf SV und cd senkr. auf TV. Es ist nun, wenn Bogen $acb = 180^0$ das Mass der erleuchteten Halbkugel der Venus, Bogen ca das Mass ihres sichtbaren Teiles; ferner ist ab die orthographische Projection von acb, so wie, wenn man noch ce senkr. auf ab zieht, ae die Projection von ac. Es verhält sich also der erleuchtete Teil zum sichtbaren Teile, wie bca zu ca oder auch wie $ab : ae$. Bezeichnet man Wkl. SVT mit v, so ist, weil

$$\text{Wkl. } SVT = bVc = v, \quad \text{Wkl. } aVc = 180^0 - v$$

Es verhält sich also jetzt, wenn man die Oberfläche der erleuchteten Halbkugel $= 1$, den sichtbaren Teil derselben $= m$ setzt,

$$1 : m = ab : ae$$

oder, wenn

$$ab = 2\varrho \text{ ist, woraus}$$

$$ea = \varrho - Ve = \varrho(1 + \cos v) = 2\varrho \cos^2 \frac{v}{2}$$

ist, wird

$$1 : m = 2\varrho : 2\varrho \cos^2 \frac{v}{2}$$

daher ist

$$m = \cos^2 \frac{v}{2}$$

Ist nun die Lichtstärke der Fläche 1 in der Entfernung 1 gleich 1, so ist für die Fläche m, in der Entfernung $TV = y$, da die Lichtstärke umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung, die Lichtstärke

$$1) \quad L = \frac{\cos^2 \frac{v}{2}}{y^2}$$

Um zu bestimmen, wann dieser Ausdruck ein Maximum werde, differentiire man ihn und setze das Differential $= 0$. Es wird dann

$$\partial L = \frac{-y^2 \cos \frac{v}{2} \sin \frac{v}{2} dv - 2y \cos^2 \frac{v}{2} dy}{y^4} = 0$$

oder

$$\cos \frac{v}{2} dy = -\frac{y}{2} \cdot \sin \frac{v}{2} \cdot dv$$

also

$$2) \quad \frac{dy}{dv} = -\frac{y}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{v}{2}$$

Mau suche jetzt noch einen anderen Wert für $\frac{dy}{dv}$ aus dem Dreieck STV. Es ist, wenn man die Entfernung ST der Erde von der Sonne mit R, die Entfernung SV der Venus von der Sonne mit r, die Entfernu ng TV mit y und den Winkel STV, die Elongation der Venus, mit T bezeichnet,

$$R^2 = r^2 + y^2 - 2ry\cos v$$

wenn man differentiirt,

$$0 = 2y\,dy + 2ry\sin v\,dv - 2r\cos v\,dy$$

$$\frac{dy}{dv} = -\frac{ry\sin v}{y - r\cos v}$$

und da

$$r \,.\, \sin v = R\sin T \quad \text{und}$$

$$y = r\cos v + R\cos T \quad \text{ist,}$$

3) $$\frac{dy}{dv} = -y \,.\, \operatorname{tang} T$$

Aus 2) und 3) folgt

4) $$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = 2\operatorname{tang} T \quad \text{und, da}$$

$$\sin T = \frac{r}{R} \cdot \sin v \quad \text{ist,}$$

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \frac{\sin T}{\cos T} = \frac{\frac{r}{R}\,.\,\sin v}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}\sin^2 v}}$$

$$\frac{R}{2r} \cdot \frac{\sin\frac{v}{2}}{\cos\frac{v}{2}} = \frac{2\,.\,\sin\frac{v}{2}\cdot\cos\frac{v}{2}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}\,.\,\sin^2 v}}$$

$$\frac{R^2}{16r^2} - \frac{\sin^2 v}{16} = \cos^4\frac{v}{2}$$

$$\frac{R^2}{16r^2} - \frac{4\sin^2\frac{v}{2}\,.\,\cos^2\frac{v}{2}}{16} = \cos^4\frac{v}{2}$$

$$\frac{R^2}{4r^2} - \cos^2\frac{v}{2} + \cos^4\frac{v}{2} = 4\cos^2\frac{v}{2}$$

$$\cos^4 \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{R^2}{12r^2}$$

$$\cos^2 \frac{v}{2} = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{R^2}{12r^2} + \frac{1}{36}}$$

$$\cos \frac{v}{2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{6} \pm \frac{1}{6r} \sqrt{3R^2 + r^2}} \tag{5}$$

Setzt man in Gl. 5) $R = 1$ und $r = 0{,}7233$, welcher Wert die halbe grosse Achse der wenig excentrischen Venusbahn angibt, wenn die mittlere Entfernung der Erde auf der Sonne $= 1$ ist, so wird

$$\cos \frac{v}{2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{6} \pm \frac{1}{4{,}3398} \sqrt{3.5232}}$$

$$\cos \frac{v}{2} = \pm 0{,}2658$$

woraus (zunächst für den positiven Wert)

$$\frac{v}{2} = 58^0\, 58' \quad \text{und}$$

$$v = 117^0\, 56' \tag{6}$$

Ferner erhält man den Wert für die Elongation T aus der Gleichung

$$\sin T = \frac{\sin v \cdot r}{R}$$

Es ergibt sich

$$T = 39^0\, 43' \tag{7}$$

Aus Gl. 6) und 7) findet sich dann der Wert für Wkl. $TSV = S$, nämlich

$$S = 22^0\, 21' \tag{8}$$

Um noch y zu finden, hat man

$$y = \frac{R \sin S}{\sin v}$$

woraus

$$y = 0{,}4304 \quad \text{ist.} \tag{9}$$

Zuletzt findet man nach Gl. 1), 6) und 9) die Lichtstärke

$$L = 1{,}4347 \tag{10}$$

Aus Gl. 8) ergibt sich, dass der grösste Glanz der Venus dann stattfindet, wenn ihr Radiusvector mit dem nach der Erde einen Winkel

$$S = 22^0\ 21'$$

macht. Da nun die mittlere Bewegung der Venus täglich 1,6 Grad, die der Erde 0,9863 Grad beträgt, so eilt die erstere der letzteren täglich um 0,6137 Grad voraus; es werden also von der Conjunction beider Himmelskörper bis zu der Stellung, in welcher ihre Radienvectoren den Winkel

$$S = 22^0\ 21'$$

bilden, so viele Tage vergehen, als 0,6137 Grad in $22^0\ 21' = 22{,}35$ Grad enthalten ist, d. h.

$$\frac{22{,}35}{0{,}6137} = 36{,}4 \text{ Tage}$$

Das Licht der Venus ist also am stärksten 36 Tage nach ihrer unteren Conjunction oder auch vor derselben, da der Winkel T auch an der anderen Seite von ST liegen kann. Die Elongation ist dann $39^0\ 43'$ (während die grössten Elongationen 45^0 bis 48^0 betragen) und ihre Entfernung von der Erde beträgt dann 0,4304 in Teilen der halben grossen Achse der Erdbahn. Das gefundene Resultat stimmt mit den Ergebnissen der Beobachtung wol überein.

Wollte man die angegebene Rechnung auch auf den Mercur anwenden, so würde man durch Substitution von $r = 0{,}387$ und $R = 1$ in Gl. 5) erhalten

$$\cos\frac{v}{2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{6} \pm \frac{1}{2{,}322}\sqrt{3{,}14977}}$$

$$\cos\frac{v}{2} = \pm\sqrt{0{,}59768}$$

$$\frac{v}{2} = 39^0\ 22'$$

$$v = 78^0\ 44'$$

Weiter findet sich

$$T = 22^0\ 18'\ 20'' \quad \text{und}$$
$$S = 78^0\ 57'\ 40''$$

Da Mercur täglich ungefähr um 4,094 Grad, die Erde 0,9863 Grad sich fortbewegt, so eilt der Mercur der Erde täglich 3,108 Grad

voraus. Nach 25 Tagen wird daher der Winkel

$$S = 78^0\ 57'$$

sein, d. h. in 25 Tagen nach der untern Conjunction würde das Licht des Mercur, bei einer Elongation von 22° 18′ am stärksten sein. Die grössten Ausweichungen des Mercur betragen 18° bis 28°.

Das hier gefundene Resultat kann wol besonders wegen der grossen Excentricität der Mercurbahn (weshalb man r nicht als constant nehmen kann) auf Genauigkeit wenig Anspruch machen.

Kempen (Rhein), den 28. Mai 1898.

VIII.

Zum Pappus'schen Lehrsatz.

Von

Dr. K. Zahradnik
in Agram.

---

1. Verschieben wir das Dreieck ABC in die Lage $A'B'C'$, so beschreiben seine Seiten Paralellelogramme, deren Flächensumme gleich null ist. Multipliciren wir

$$AB + BC + CA = 0$$

mit $AA' \equiv BB'$, so erhalten wir (Fig. 1.)

$$AB \,.\, AA' + BC \cdot BB' + CA \,.\, AA' \equiv 0 \tag{1}$$

nach Grassmann[1]) ist

$$AB \,.\, AA' = \overline{AB} \,.\, \overline{AA'} \sin BAA'$$

das äussere Product der Geraden AB und AA', dasselbe ist gleich dem Flächeninhalte des Parallelogramms $ABB'A'$, die Relation 1) können wir somit schreiben:

$$ABB'A' + BCC'B' + CAA'C' \equiv 0$$

oder

$$ABB'A' = ACC'A' + CBB'C' \tag{2}$$

Die Gleichung (1) drückt den Pappus'schen Lehrsatz in seiner Allgemeinheit aus.

---

1) Grassmann: Die lineare Ausdehnungslehre 2. Aufl. 1870. pg. 65. vergl. l. c. § 29. pg. 49.

Der planimetrische Beweis des Satzes ist sehr einfach [1]), wir wollen im folgenden einen trigonometrischen Beweis liefern und daran neue Betrachtungen knüpfen.

2. Verschieben wir das Dreieck ABC in der Richtung

$$\theta = \text{Wkl. } BAA' \text{ um } d \equiv AA'$$

Nach gewöhnlicher Bezeichnung haben wir

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $d\sin\theta$ d. i. mit der Höhe des Parallelogramms $ABB'A'$, so erhalten wir wegen

$$\cos\alpha\sin\theta = \sin(\theta - \alpha) + \sin\alpha\cos\theta$$
$$\cos\beta\sin\theta = \sin(\theta + \beta) - \sin\beta\cos\theta$$

$$de\sin\theta = ad\sin(\theta+\beta) + bd\sin(\theta - \alpha) - d\cos\theta(a\sin\beta - b\sin\pi)$$

Nun ist

$$a\sin\beta - b\sin\alpha = 0, \quad \text{somit}$$
$$dc\sin\theta = ad\sin(\theta+\beta) + bd\sin(\theta - \alpha)$$

oder

$$ABB'C' = CBB'C' + ACC'A'$$

α) Wenn $\theta = 90^0$, so ist

$$cd = ad\cos\beta + bd\cos\alpha$$

oder

$$ad = ak_1 + bk \tag{3}$$

wenn wir

$$d\cos\beta = k_1, \quad d\cos\alpha = k \quad \text{setzen.}$$

β) Ist ausserdem $d = c$ (Fig. 2), so ist

$$c^2 = ac\cos\beta + bc\cos\alpha$$

Bezeichnen wir mit A_1, B_1 die Fusspunkte der Höhen BA_1, AB_1, so ist

$$c\cos\alpha = AA_1 = a + a_1$$
$$a\cos\beta = BB_1 = b + b_1$$

wo $a_1 = CA_1$, $b_1 = CB_1$ ist, somit erhalten wir

$$e^2 = a^2 + b^2 + aa_1 + bb_1$$

---

1) J. B. Henrici Treutlein: Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Leipzig 1891. Theil 1. pg. 98. Hoffmann Ztschr. XXVI. p. 257.

ABB_1A_1 ist aber ein Kreisviereck, somit ist

$$aa_1 = bb_1$$

daher geht die obige Gleichung über in

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,aa_1 \tag{4}$$

was den Pythagoreischen Lehrsatz für ein schiefwinkliges Dreieck gibt, den wir auch schreiben können:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma \tag{5}$$

wegen

$$a_1 = AC\cos(\pi - \gamma) = -b\cos\gamma$$

γ) Ist das gegebene Dreieck bei C rechtwinklig, somit $\gamma = 90^0$, so ist Fig. 3):

$$k = AM = AA'\cos\alpha = AB\cos\alpha = AC = b$$
$$k_1 = BN = BB'\cos\beta = AB\cos\beta = BC = a$$

und 3) und 5) gehen in den gewöhnlichen Pythagoreischen Lehrsatz über.

3. Ist D Höhenschnittspunkt des Dreieckes ABC, so können wir sagen: Der Umkreis des Viereckes A_1B_1AB, sowie der Umkreis des Viereckes A_1DB_1C haben A_1B_1 zur gemeinschaftlichen Sehne. Die Senkrechte im Mittelpunkte dieser Sehne ist die Centrale beider Kreise; die Verbindungslinie der Mittelpunkte von AB und CD halbirt die Sehne A_1B_1 senkrecht (Fig. 2.)

Der Winkel ADB ist Supplement des Winkels ACB.

Das Pappus'sche Dreieck.

4. Es sei C' der Schwerpunkt des Parallelogramms $ABB'A'$, ähnlich A'', B'' für die Parallelogramme $BB'C'C$, $ACC'A'$ (Fig. 1.)

Den Eckpunkt A nehmen wir als Anfangspunkt, die Seite AB als X-achse, eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dann ist c die Abscisse von B.

Bezeichnen wir ferner mit ξ, η die Coordinaten des Scheitels C, so erhalten wir:

$$A'(d\cos\theta,\quad d\sin\theta)$$
$$B'(c + d\cos\theta,\quad d\sin\theta)$$

$$C'(\xi + d\cos\theta,\quad \eta + d\sin\theta)$$

$$A''\left(\frac{c+\xi+d\cos\theta}{2},\quad \frac{\eta+d\sin\theta}{2}\right)$$

$$B''\left(\frac{\xi+d\cos\theta}{2},\quad \frac{\eta+d\sin\theta}{2}\right)$$

$$C''\left(\frac{c+d\cos\theta}{2},\quad \frac{d\sin\theta}{2}\right)$$

Das Dreieck $A''B''C''$ wollen wir als das Pappus'sche Dreieck bezeichnen, sein Schwerpunkt

$$T''\left(\frac{\xi+c}{3}+\frac{d\cos\theta}{2},\quad \frac{\eta}{3}+\frac{d\sin\theta}{2}\right)$$

Dieses Dreieck hat folgende Eigenschaften:

α) Seine Seiten sind unabhängig von der Grösse der Trans ation d, wie von der Richtung der Translation θ, es ist

$$A''B'' = \frac{AB}{2},\quad B''C'' = \frac{BC}{2},\quad C''A'' = \frac{CA}{2}$$

β) Die Seiten des gegebenen Dreieckes sind parallel zu den Seiten des Pappus'schen Dreieckes.

γ) $\triangle A''B''C'' \backsim \triangle ABC.$

δ) Das Pappus'sche Dreieck $A''B''C''$ liegt zum gegebenen Dreiecke perspectivisch.

ε) Für gegebenes d ist der Ort (T'') der Schwerpunkte des Pappus'schen Dreiecks ein Kreis, dessen Halbmesser $\frac{d}{2}$ und dessen Mittelpunkt im Schwerpunkt T des Dreieckes ABC liegt.

ζ) Für gegebene θ ist der Ort (T'') eine Gerade, welche durch den Scherpunkt T des gegebenen Dreieckes geht, unter der Richtung θ.

η) Wenn A', B', C' Kreise beschreiben um die Punkte A, beziehungsweise B, C mit dem Halbmesser d, so beschreiben A'', B'', C'' Kreise um $\left(\frac{\xi+\eta}{2}; \frac{\eta}{2}\right)$ beziehungsweise $\left(\frac{\xi}{2}, \frac{\eta}{2}\right)$, $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ mit dem Halbmesser $\frac{d}{2}$ und der Schwerpunkt T'' beschreibt ebenfalls einen Kreis um $T\left(\frac{\xi+c}{3}, \frac{\eta}{3}\right)$ mit dem Halbmesser $\frac{d}{3}$.

ϑ) Ist T' der Schwerpunkt des Dreieckes $A'B'C'$, dann ist

$$TT'' = T''T',$$

d. i. T'' halbirt die Strecke TT'.

Involutorisch-quadratische Verwandschaft.

5) Die Senkrechten $\overline{BA_1}$, $\overline{AB_1}$ auf die Seiten AC, beziehungsweise $\overline{BC}$ schneiden sich im Punkte D (Fig. 2). Die Verbindungslinie DC ist senkrecht zu $\overline{AB}$, denn die Senkrechte von C auf $\overline{AB}$, geht durch D, den Höhenschnittpunkt des Dreieckes ABC. So entspricht dem Punkte C eindeutig der Punkt D; und umgekehrt, wenn wir vom Dreiecke ABD statt vom Dreiecke ABC ausgehen.

Die Punkte C, D sind demnach in involutorischer birationaler und wie wir gleich zeigen werden, quadratischer Verwandschaft.

Das Coordinatensystem wie in Art. 4 vorausgesetzt, finden wir für den Punkt D

$$x = \xi \qquad y = \frac{\xi(c-\xi)}{\eta} \tag{6}$$

woraus wieder

$$\xi = x \qquad \eta = \frac{x(c-x)}{y} \tag{7}$$

folgt, was unsere Behauptung erhärtet.

Die Hauptpunkte sind den beiden Systemen der Punkte (C) und (D) sind die Punkte A und B und der unendlich entfernte Punkt der y achse.

Beschreibt der veränderliche Scheitel des Dreieckes ABC die Gerade G, welcher kein Hauptpunkt angehört, so beschreibt der Punkt D auf Grund angeführter Verwandschaft eine Hyperbel, welche durch die Punkte A, B hindurchgeht und deren eine Asymptote zur Geraden AB, die andere zur Geraden G senkrecht steht.

Einer Geraden durch den Punkt A entspricht eine Hyperbel, welche in zwei Gerade zerfällt und zwar in die y-Achse und in die Gerade, welche durch den Punkt B hindurchgeht und auf der gegebenen Geraden senkrecht steht u. s. w.

Wir haben also hier mit einem speciellen Falle einer kvadratischen Inversion zu tun, welche Hirst in seiner Arbeit „On the quadric inversion of plane curves", London 1865 untersuchte.

6) Entsprechende Punkte von constanter Entfernung

$$\overline{CD} = d$$

liegen auf zwei Kreisen (Fig. 4)

$$x^2 + y^2 - cx \pm dy = 0$$

welche symmetrisch liegen zur X-Achse. Den Punkten des Bogens LDK entspricht der Bogen ACD des anderen Kreises und den Bogen $LD'K$ des ersten Kreises entspricht der Bogen $AC'B$ des zweiten Kreises. Für veränderliches d erhalten wir ein Kreisbüschel, deren Radicalachse die X-achse ist; symmetrische Kreise dieses Büschels in Bezug auf die Radicalachse gehören zu demselben d. Für $d = 0$ ist $C \equiv D$, d. i. der Kreis, dessen Durchmesser AB ist, ist der sich selbst entsprechende Kegelschnitt dieser kvadratischen Transformation.

7. Wie bekannt entspricht in dieser Transformation einem Kegelschnitte eine rationale Curve 4. Ordnung mit den Doppelpunkten in den Hauptpunkten des Systems. Geht der Kegelschnitt durch den Punkt A, so ist die transformirte Curve die y-achse und eine rationale Curve dritter Ordnung, welche eine oder drei reelle Asymptoten besitzt, je nachdem der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist. Geht der Kegelschnitt durch die Punkte A und B, zerfällt die transformirte Curve in die y-achse, und in die Gerade, welche durch den Punkt A geht und senkrecht auf der Geraden AB steht, ferner noch in einen Kegelschnitt.

Zuletzt wollen wir noch die Transformirte der Cissoide

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a_1 - x}}$$

anführen. Dieselbe ist die doppelt gezählte y-achse und eine rationale Curve dritter Ordnung, welche einen reellen Doppelpunkt hat für $a_1 > c$; einen isolirten Punkt für $a_1 < c$. Für $a_1 = c$ erhalten wir wieder eine Cissoide, welche congruent mit der gegebenen Cissoide, nur umgedreht um die Senkrechte auf AB im Mittelpunkte S dieser Strecke.

Rationale kvadratisch-reciproke Verwandschaft.

8) Im Art. 5. sahen wir, dass zwischen den Punktsystemen $C(\xi, \eta)$ $D(xy)$ eine birationale kvadratische Verwandschaft besteht, so dass wenn der Punkt C eine Gerade $G(u, v)$ beschreibt, der entsprechende Punkt D eine Hyperbel

$$H \equiv x(uy - vx) + cvx + y = 0$$

erzeugt, welche durch die Hauptpunkte der Punktsysteme (C), (D) hindurchgeht.

9. Eine Asymptote der Hyperbel H ist parallel zur y-achse, die zweite steht senkrecht auf der Geraden G. Umgekehrt kann man jede Hyperbel, deren eine Asymptote parallel ist zur y-achse, und welche durch den Anfangspunkt und den Punkt $B(c, O)$ hindurchgeht, in eine Gerade transformiren. Eine solche Hyperbel hat die Gleichung

$$H \equiv x(mx + ny) + px + y = 0$$

Die Coordinaten der zugeordneten Geraden sind $m_1 - n$ und

$$AB = c = -\frac{p}{m}$$

Bezeichnen wir nun mit S_1 den Mittelpunkt der Hyperbel H, mit x_1, y_1 seine Coordinaten, so ist

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{u} \\ y_1 &= -\frac{(c+2u)v}{u^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Der Mittelpunkt S_1 liegt demnach immer auf einer Senkrechten auf der Achse X in ihrem Durchschnitte mit der Geraden G. Umgekehrt, wenn wir einen Punkt S_1 als Mittelpunkt einer Hyperbel H betrachten, so ist dieselbe schon bestimmt (denn wir kennen von ihr drei Punkte und den Mittelpunk). Aus den Gleichungen 8) folgt auch eindeutig

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{x_1} \\ v &= -\frac{y_1}{(2x_1 - c)x_1} \end{aligned} \tag{9}$$

wir kennen somit u, v, demnach die Hyperbel H selbst.

„Es besteht zwischen der Geraden $G(u, v)$ und dem Punkte „$S_1(x_1, y_1)$ eine rationale kvadratische Verwandschaft."

Eine Curve $n$ter Ordnung, welche nicht durch die Hauptpunkte hindurchgeht, wird in eine Curve $2n$ter Classe transformirt und umgekehrt, eine Curve $n$ter Classe, welche nicht die Hauptgeraden zu ihren Tangenten hat, wird in eine Curve $2n$ter Ordnung transformirt. Schreiben wir die Gleichung der Curve $n$ter Classe

$$C_n = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_1 + \varphi_0 = 0$$

wo φ_n eine homogene Function in den Tangentialcoordinaten u, v ist, so ist die Gleichung der transformirten Curve

$$C^{2n} \equiv \Phi_n + x_1(2x_1 - c)\Phi_{n-1} + \ldots + x_1^n(2x_1 - c)^n \Phi_0 = 0 \qquad (10)$$

wo Φ_n das Resultat der Substitution von $-(2x_1 - c)$, $-y_1$ für u beziehungsweise v in φ_k bedeutet, daher ein Polynom $k$ten Grades in Bezug auf x_1, y_1 ist, nämlich

$$\Phi_k \equiv \sum_{h=0}^{k} (-1)^h m^h y_1^h (2x_1 - c)^{k+h}$$

Die Hauptpunkte sind $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ und der unendlich entfernte Punkt der y-Achse, in welchem zwei Hauptpunkte sich vereinigen. Aus diesem Grunde erhellt auch der Parallelismus der Asymptoten mit der y-Achse, so wie aus der Gl. (10).

Aehnlich würde man verfahren bei der Transformation einer Curve $n$ter Ordnung C^n mittelst der Gleichungen (8).

9. Nehmen wir nun an, dass sich die Gerade G um einen ihrer Punkte $(x_0 y_0)$ dreht.

Für jede Lage der Geraden G gilt somit:

$$x_0 u + y_0 v + 1 = 0$$

und für den betreffenden Mittelpunkt $S_1(x_1, y_1)$ zugeordneter Hyperbel H hat man mittelst Gl. (9)

$$2x_1^2 - (c + 2x_0)x_1 - y_0 y_1 + x_0 c = 0 \qquad (11)$$

Dreht sich nun die Gerade g um ihren Punkt (x_0, y_0), so beschreibt der entsprechende Mittelpunkt S_1 eine Parabel Π, deren Gleichung (11): d. i. dem Strahlenbüschel $(x_0 y_0)$ entspricht die Parabel Π, welche durch die Hauptpunkte unserer Transformation hindurchgeht.

Zwei Punkten (x_0, y_0) (x', y') als Scheiteln zweier Strahlenbüschel entsprechen zwei Parabeln, welche ausser den Hauptpunkten

der Transformation noch einen Punkt gemein haben, und zwar denjenigen Punkt, der zugeordnet ist der Verbindungslinie der Punkte $(x_0, y_0 t)$, (x', y') nach dem Gesetze (9).

10. Betrachten wir nun umgekehrt die Gerade $G(u_0 v_0)$ als Ort ihrer Punkte $S_1(x_1, y_1)$, also

$$u_0 x_1 + v_1 y_1 + 1 = 0$$

Beschreibt nun der Punkt S_1 die Gerade G, so hüllt die dem Punkte S_1 entsprechende Gerade die Parabel

$$u(u - c v_0 v) - u_0 u - 2 v_0 v = 0 \tag{12}$$

Dass der Kegelschnitt (12) eine Parabel ist, erhellt schon daraus, dass der Gleichung (12) durch $u = 0$, $v = 0$ genüge geleistet wird, d. i. die unendlich ferne Gerade berührt ihn.

11. Die Coordinaten des Scheitels $v(\xi, \eta)$ der Parabel Π, welche dem Strahlenbüschel $(x_0 y_0)$ entspricht, sind:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{2x_0 + c}{4} \\ \eta &= -\frac{(2x_0 - c)^2}{8y_0} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

aus welchen wieder

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{4\xi - c}{2} \\ y_0 &= \frac{(2z - c)^2}{2\eta} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Ist also ein Punkt $T(x_0, y_0)$ gegeben als Scheitel eines Strahlenbüschels, so ist hiemit auch der Scheitel V der Parabel Π bestimmt, und umgekehrt zu jedem Punkte (ξ, η) als Scheitel einer Parabel H entspricht ein Punkt $(x_0 y_0)$ als Scheitel eines Strahlenbüschels.

Die Punkte (x_0, y_0), (ξ, η) stehen somit in birationaler Verwandschaft und wie aus den Gleichungen (13) oder (14) ersichtlich ist, in einer kvadratischen. Das Punktsystem T ist somit mit dem Punktsystem V in Cremonascher Verwandschaft, ebenso wie das Punktsystem C mit dem Punktsystem D.

Dem gemäss können wir immer eine Gerade finden, welche durch einen Punkt T geht, für welchen S_1 mit V zusammenfällt.

Der Ort der Punkte (T), für welche VT constant ist, ist eine Curve vierter Ordnung.

Bezeichnen wir mit N den Fusspunkt der Senkrechten aus S_1

auf die Gerade G, so finden wir geometrisch oder analytisch gleich, dass der Ort der Punkte S_1, welche von der entsprechenden Geraden eine constante Entfernung d haben, eine Curve vierter Ordnung ist, nämlich

$$C^4 \equiv y_1{}^4 - d^2([2x_1 - c]^2 + y_1{}^2) = 0$$

Die Einhüllende der Geraden G, welche von ihren entsprechenden Punkten eine constante Entfernung d haben, ist eine Curve sechster Classe

$$C_6 \equiv u^4(u^2 + v^2)d^2 - (2 + cu)^2 v^4 = 0$$

IX.

Zur Kegelschnittslehre.

Von

Dr. K Zahradnik.

I. Tangentenconstruction.

Die Coordinaten x, y eines beliebigen Punktes M des Kegelschnittes

$$y^2 = 2px - qx^2 \tag{1}$$

können wir bekanntlich rational ausdrücken mit Hilfe eines Parameters $u = \operatorname{tg} MOX$, nämlich

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2p}{u^2+q} \\ y &= \frac{2pu}{u^2+q} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Tangente des Kegelschnittpunktes M lautet:

$$2uy - (u^2 - q)x = 2p$$

Dieselbe schneidet die Tangente des Scheitels A, welcher zum Anfangspunkt O der Coordinaten diametral liegt, im Punkte M_1, dessen Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2\frac{p}{q} \\ y_1 &= \frac{p}{q} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

sind.

Der Leitstrahl OM des Punktes M schneidet die Tangente des Scheitels A im Punkte B, dessen Coordinaten

$$x' = \frac{2p}{q}$$
$$y' = \frac{2p}{q} u \tag{4}$$

sind. Der Punkt M_1 halbirt somit die Strecke AB (Fig. 1), woraus sich nachstehende Tangentenconstruction eines Centralkegelschnittes ergiebt.

„Aus dem Centrum S des gegebenen Kegelschnittes ziehe eine Parallele mit dem Leitstrahl OM, welche die Tangente des Scheitelpunktes A im Punkte M_1 trifft. $\overline{MM_1}$ ist die verlangte Tangente".

2. Hätten wir einen anderen Punkt O' zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen, dessen Durchmesser zur X-achse und dessen Tangente zur Y-achse, ändert die Kegelschnittsgleichung ihre Form nicht; der Parameter u ist in diesem Falle das Teilverhältniss des Strahles OM in Bezug auf die Coordinatenachsen nämlich

$$u = \frac{\sin(XOM)}{\sin(MOY)}$$

Da nun weder die Gleichungen (3) noch die Gleichungen (4) ihre Form ändern, kommen wir zu folgender Tangentenconstruction des Kegelschnittes. „Der Leitstrahl $O'M$ schneidet die Tangente „des Diametralpunktes Q von O' im Punkte B'. Die Verbindungs-„linie des Halbirungspunktes der Strecke QB' mit dem Punkte M „die verlangte Tangente des Punktes M."

Die Coordinaten der Punkte B und M_1 hängen bloss von der Länge der Hauptachse des Kegelschnittes und vom Parameter u ab, wir können somit sagen: Gegeben sei ein Kegelschnittsbüschel mit gemeinschaftlicher Hauptachse OA. Durch den Punkt O ziehen wir einen Strahl, welcher die Kegelschnitte des Büschels in den Punkten $M^{(r)}$ schneidet, und die Tangente des anderen gemeinschaftlichen Scheitels A im Punkte B. Die Verbindungslinien $M_1 M^{(r)}$ des Halbirungspunktes M_1 der Strecke AB mit den Punkten $M^{(r)}$ sind Tangenten an die entsprechenden Kegelschnitte des Büschels.

Dass statt der Hauptachse ein Durchmesser mit den Tangenten der Endpunkte gegeben sein kann, ohne dass sich die Construction ändern würde, ist nach dem vorhergehendem klar.

3. Es sei wieder OA die Hauptachse, T_a die Scheiteltangente, O Anfangspunkt der Coordinaten, OA die X-achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems, ferner sei $O'Q$ ein Durchmesser des Kegelschnittes, T_q die Tangente des Punktes Q. Projiciren wir den Punkt M des Kegelschnittes aus den Punkten O, O' auf die Tangenten T_a, beziehungsweise T_q. Es seien B, B' die betreffenden Projectionen. Nach Art. 1 liegen die Halbirungspunkte M' der Strecken QB', welche den Punkten O' (bei veränderlichem O' am Kegelschnitte) an einer Geraden, welche den gegebenen Kegelschnitt im Punkte M berührt.

Es seien umgekehrt nun die Punkte O, O' fest am Kegelschnitte, und der Punkt M veränderlich. Für jeden Punkt M erhalten wir zwei Punkte B, B', ersten auf T_a, zweiten auf T_a. Bei veränderlichem M umhüllen die Verbindungslinien BB' einen Kegelschnitt, welcher die Tangenten T_a und T_Q berührt. Synthetisch ist der Beweis an der Hand. Projiciren wir nämlich die Punkte des gegebenen Kegelschnittes aus dessen Scheitel O auf seine Tangente T_a, so erhalten wir auf T_a eine Punktreihe (B). Aehnlich erhalten wir eine Punktreihe (B') auf T_q, wenn wir aus O' die Punkte des Kegelschnittes auf die Tangente des Punktes Q projiciren, welcher zu O diametral liegt.

Diese zwei Parameter sind projectivisch. Denn gehen wir von B an T_a aus, so betimmt $\overline{OB}$ den Punkt M am Kegelschnitte. OM trifft die T_q im zugeordneten Punkte $\overline{B'}$. Umgekehrt kommen wir eindeutig vom Punkte B' zum Punkte B. Die Punkte B, B' der Geraden T_a, T_Q sind somit in eindeutiger Verwandtschaft, d. i. die Punktreihen (B) und (B') sind projectivisch, was zu beweisen war.

4. Analytisch stellt sich der Beweis ebenso leicht. Es sei t der Parameter vom Punkte O' des gegebenen Kegelschnittes und x, y seine Coordinaten. Der Parameter v des Punktes Q, welcher zu O' diametral liegt, folgt aus der Relation

$$tv = -q$$

ist somit

$$v = -\frac{q}{t}$$

Bezeichnen wir mit x', y' die Coordinaten von Q, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2pt^2}{q(t^2+q)} \\ y' &= -\frac{2pt}{t^2+q} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Dasselbe erhellt auch geometrisch, denn es ist:

$$x' = OA - KA = 2\frac{p}{q} - x$$

$$y' = QK = -y$$

Aus diesen Gleichungen folgt wieder

$$\frac{x'}{y'} = \frac{2\frac{p}{q} - x}{-y} = -\frac{q}{t} = v$$

Die Gleichung der Tangente T_q ist

$$2qty + q(q - t^2)x = -2pt^2 \tag{6}$$

und die Gleichung der Verbindungslinie $\overline{OM}$ ist

$$(t+u)y - (tu = q)x = 2p \tag{7}$$

Die Tangente T_Q schneidet die Verbindungslinie $\overline{OM}$ im Punkte B', dessen Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2pt(2q + t^2 + tu)}{q(t^2 + q)(t - u)} \\ y &= \frac{2p(-q^2 + t^3u)}{q(t' + q)(t - u)} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Als Coordinaten ξ, η der Verbindungslinie $\overline{BB'}$ erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{-q^2 + q(t^2 + q)u^2 - q^2tu}{2p(q + tu)^2} \\ \eta &= \frac{-q[q(u+t) + 2ut^2]}{2p(q + tu)^2} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Es sei nun u veränderlich, d. i. der Punkt M ändert seine Lage am gegebenen Kegelschnitte. Die Verbindungslinie $\overline{BB'}$ umhüllt eine Curve, welche wie aus (9) ersichtlich, zweiter Classe ist, und in Tangentencoordinaten oben durch die Gleichungen (9) dargestellt wird. In rechtwinkligen Punktcoordinaten lautet ihre Gleichung

$$[qtx + (q + 2t^2)y - 4pt]^2 + 4[q(t^2 + q)x + 2pt^2][qx + ty - 2p] = 0 \tag{10}$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir, dass unabhängig von der Lage des Punktes O' auf dem Kegelschnitte die Enveloppe immer durch den Anfangspunkt der Coordinaten O geht und den Leit-

strahl OA' des Punktes A', welcher diametral zu O' ist, in O berührt. Durch den Punkt O' d. i. mit dem Parameter t ist schon der Kegelschnitt (10) bestimmt.

Vier Punkte t_1, t_2, t_3, t_4 auf dem gegebenen Kegelschnitte entsprechen vier Kegelschnitte (10), welche sich im Punkte 0 unter demselben Doppelverhältniss schneiden, welche jenen Punkten entspricht, nämlich (t_1, t_2, t_3, t_4).

5. Allen Punkten des gegebenen Kegelschnittes entspricht eine Reihe von Kegelschnitten, dessen Enveloppe eine Curve zwölfter Ordnung ist. Durch jeden Punkt der Ebene gehen vier Kegelschnitte (10) hindurch, welche den vier Parametern t_1, t_2, t_3, t_4 somit vier Punkten auf dem gegebenen Kegelschnitte entsprechen.

Der Ort des Punktes (xy), dessen Kegelschnitte harmonischen Punktgruppen auf dem gegebenen Kegelschnitte entsprechen, oder anders gesagt, deren entsprechende vier Kegelschnitte sich im Anfangspunkte der Coordinaten harmonisch schneiden, finden wir, wenn wir die Gleichung (10) nach fallenden Potenzen von t ändern, nämlich

$$A_0 t^4 + A_1 t^3 + A_2 t^2 + A^3 t + A_4 = 0 \tag{11}$$

Die Bedingung der Harmonicität [1]) ist

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0$$

Da nun A_h Functionen zweiten Grades in Bezug auf x, y sind, so ist der geometrische Ort eine Curve sechster Ordnung.

6. Wenn die Coefficienten von (11) der Bedingung

$$A_0 A_4 - 3A_3^2 = 4A_1 A_3 \tag{12}$$

so schneiden sich die vier Kegelschnitte, welche durch den Punkt (xy) hindurch gehen, aequianharmonisch. Aus der Gleichung (12) folgt unmittelbar, dass der geometrische Ort solcher Punkte eine Curve vierter Ordnung ist.

7. Aus der Gleichung (8) folgt wieder, dass der Ort der Punkte B', wenn M fest und O' veränderlich ist, eine rationale Curve dritter Ordnung ist, welche drei reale Asymptoten hat, wenn der gegebene

---

1) D. H. Durège, „Ebene Curven dritter Ordnung 1871. Leipzig pg. 15.

Kegelschnitt eine Hyperbel ist; die Curve hat eine reale und zwei imaginäre Asymptoten, wenn der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse ist.

Die unendlich fernen Punkte der rationalen Curve vierter Ordnung entsprechen dem Punkte M und den unendlich fernen Punkten des gegebenen Kegelschnittes.

8. Für die Parabel gilt dieselbe Tangentenconstruction, man muss bloss darauf Rücksicht nehmen, dass der Mittelpunkt der Parabel im Unendlichen liegt, somit alle Durchmesser parallel sind.

Ist nun ein Punkt O der Parabel gegeben, dessen Durchmesser und seine Tangente, ausserdem auch ein Punkt M der Parabel, so ziehen durch diesen Punkt eine Parallele mit dem Durchmesser OX, welchen die Tangente OY im Punkte B schneidet (Fig. 2.) Die Verbindungslinie $\overline{M_1M}$ des Halbirungspunktes M_1 der Strecke OB mit dem Punkte M ist die verlangte Tangente. Da nun $DO = OP$ denn es ist $OM_1 = PC = CM$, so ersehen wir das Verhältniss, in dem diese Construction der Tangente mit jener vermittelst der Subtangente steht.

9. Die angeführte Tangentenconstruction folgt auch aus dem Pascal'schen Satze, wenn wir den Kegelschnitt als gegeben betrachten durch zwei parallele Tangenten mit ihren Berührungepunkten in A resp. B, und den Punkt M. Aus dem Pascal'schen Sechsecke $AABBMM$, wo z. B. AA die gegebene Tangente T_a mit dem Berührungspunkte A ist, findet man nach dem Schema (Fig. 3).

$$\left.\begin{array}{lll} T_a & \ldots \overline{BM} - P \\ AB & \ldots \overline{MM} \\ T_b & \ldots \overline{MA} - Q \end{array}\right\} \Pi$$

Die Verbindungslinie $\overline{PQ}$ von T_a, $\overline{BM}$ und T_b . $\overline{MA}$ ist die Pascalsche Gerade des Sechseckes $AABBMM$. Bestimmen wir nun $R \equiv \overline{AB} . \overline{PQ}$, so ist $\overline{MR}$ die gesuchte Tangente im Punkte M des gegebenen Kegelschnittes.

Da nun $T_a \parallel T_b$, halbirt $\overline{MR}$ die Strecke AP im Punkte C, und die Strecke BQ im Punkte D. Der Halbirungspunkt S des Durchmessers AM ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes, und somit gilt wie früher $SD \parallel AM$, $DM \equiv T_m$.

Neue Eigenschaft eines Central-Kegelschnittes.

10. Gegeben seien zwei Durchmesser des Kegelschnittes $Q'Q$, MN. Die Verbindungslinie $O'M$ schneidet die Tangenten der

zu $O'M$ diametralen Punkte Q, N in den Punkten P, R, so, dass man hat:

$$MP = RO'$$

Diese Eigenschaft beweisen wir, indem wir zeigen, dass die orthogonalen Parallelprojectionen dieser Abschnitte in die X-achse gleich sind. (Fig. 4.)

Es seien u, t die Parameter der Punkte M, O'. Der Parameter des Punktes Q ist $-\frac{q}{t}$ (Art. 4), somit sind die Coordinaten von P (Art. 4. Gl. (6), (7), (8)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2pt(2q+t^2+tu)}{q(t^2+q)(t-u)} \\ y &= \frac{2p(-q^2+t^3u)}{q(t^2+q)(t-u)} \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

und die Coordinaten des Punktes R erhalten wir, wenn wir in (8') t mit u vertauschen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2pu(2q+u^2+tu)}{q(u^2+q)(u-t)} \\ y &= \frac{2p(-q^2+u^2t)}{q(u^2+q)(u-t)} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die orthogonale Projection von MP in die X-achse ist gleich dem Unterschiede der Abscissen der Punkte P und M, somit gleich

$$\frac{2pt(2q+t^2+tu)}{q(t^2+q)(t-u)} - \frac{2p}{u^2+q}$$

oder

$$\frac{2pt}{q(t-u)} + \frac{2pt(tu+q)}{q(t^2+q)(t-u)} - \frac{2p}{u^2+q}$$

Ebenso bekommen wir für die orthogonale Projection von RO' in die X-achse

$$\frac{2p}{t^2+q} - \frac{2pu}{q(u-t)} - \frac{2pu(tu+q)}{q(u^2+q)(u-t)}$$

Diese Projectionen sind identich gleich, denn es besteht

$$\frac{2pt}{q(t-u)} + \frac{2pt(tu+q)}{q(t^2+q)(t-u)} - \frac{2p}{u^2+q} \equiv \frac{2p}{t^2+q} + \frac{2pu}{q(t-u)} + \frac{2pu(tu+q)}{q(u^2+q)(u-t)}$$

Uebertragen wir alle Glieder auf die linke Seite, und kürzen mit $\frac{2p}{q}$, so erhalten wir nach kurzer Reduction:

$$1-\frac{t^2u^2-q^2}{(t^2+q)(u^2+q)}-q\,\frac{t^2+u^2+2q}{(t^2+q)(u^2+q)}\equiv 0$$

oder

$$(t^2+q)(u^2+q)+q^2\equiv t^2u^2+q(t^2+u^2+2q)$$

wo die Identität schon evident ist. Hiemit ist bewiesen, dass

$$MP = RO'$$

11. Im Falle der Ellipse können wir kürzer den Beweis fassen.

Projiciren wir die Figur 4. orthogonal, so dass die Ellipse einen Kreis zur Projection hat (Fig. 5.), so sind die Dreiecke $O'QP$ und MNR congruent, denn sie sind rechtwinklig, ferner ist

$$\text{Wkl. } NMR = \text{Wkl. } PO'Q \quad \text{und} \quad O'Q = MN$$

somit ist

$$RM = O'P$$

daher auch

$$MP = RO'$$

Da nun diese Relation durch parallele Projection sich nicht ändert, gilt sie auch für die Ellipse.

X.

Ableitung der Formeln für
$\sin(\beta \pm \gamma)$ und $\cos(\beta \pm \gamma)$
aus trigonometrischen Dreiecksformeln.

Von

Dr. **Bochow**

in Magdeburg.

Nach den neuen Lehrplänen arbeitet der Unter-Secundaner bereits mit trigonometrischen Dreiecksformeln, während erst der Ober-Sekundaner die goniometrischen Additionsformeln lernt. So ist Gelegenheit geboten, den Beweis dieser Additionsformeln an das frühere Pensum anzuknüpfen. Und mir scheint, dass wir diese Gelegenheit wol benutzen dürfen: ist es doch möglich, den Beweis in einer sehr anschaulichen Weise an einer Figur zu führen, welche sich leicht dem Gedächtniss einprägt. Man betrachte Fig. I., wie übersichtlich dieselbe die Teilausdrücke bietet, aus denen die Additionsformeln zusammengesetzt sind.

Ich nehme an, dass der „Sehnensatz" in der Form $a = 2r \sin \alpha$ durchgenommen und durch vielfache Anwendung dem Schüler vertraut sei. Von sonstigen Formeln brauchen wir nur

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + \alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

Nun sei ABC ein Dreieck im Kreise M vom Radius r, β und γ seien spitze Winkel, ob α spitz oder stumpf ist, ist gleichgültig, in

der Figur ist α stumpf, $\beta > \gamma$. Fälle ich die Höhe BD auf BC, nenne ihren zweiten Schnittpunkt mit dem Kreise A' und ziehe $A'B$ und $A'C$, so ist

$$\text{Wkl. } CA'A = \beta, \quad BA'A = \gamma$$

Die Complementwinkel von β und γ nenne ich β' und γ', also

$$\text{Wkl. } A'AB = A'CB = \beta', \quad \text{Wkl. } A'AC = A'BC = \gamma'$$

Dann ist nach dem Sehnensatz

$$\begin{aligned} CA &= 2r\sin\beta = 2r\cos\beta' \\ BA &= 2r\sin\gamma = 2r\cos\gamma' \\ BA' &= 2r\sin\beta' = 2r\cos\beta \\ CA' &= 2r\sin\gamma' = 2r\cos\gamma \end{aligned}$$

also die vier Sehnen des Kreises stellen die vier Functionen Sinus und Cosinus von β und γ resp. β' und γ' dar. Die vier rechtwinkligen Dreiecke bei D liefern weiter

$$\begin{aligned} AD &= 2r\sin\beta\sin\gamma = 2r\cos\beta'\cos\gamma' \\ CD &= 2r\sin\beta\cos\gamma = 2r\cos\beta'\sin\gamma' \\ BD &= 2r\sin\gamma\cos\beta = 2r\cos\gamma'\sin\beta' \\ A'D &= 2r\cos\beta\cos\gamma = 2r\sin\beta'\sin\gamma' \end{aligned}$$

Also auf den Schenkeln dieses rechtwinkligen Achsenkreuzes finden wir die Bestandteile der Summenformeln, und brauchen nun, z. B. die Formel für $\sin(\beta+\gamma)$ nur einfach abzulesen:

1) Nach dem Sehnensatze ist einerseits

$$BC = 2r\sin\alpha = 2r\sin(\beta+\gamma)$$

andererseits aber

$$\begin{aligned} BC &= CD + BD \\ &= 2r\sin\beta\cos\gamma + 2r\cos\beta\sin\gamma \end{aligned}$$

also, da $2r$ sich hebt,

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$$

Dabei sind β und γ spitze Winkel, es ist jedoch ganz gleichgültig ob ihre Summe ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist; während bei dem gewöhnlich benutzten Beweise bekanntlich diese Fälle unterschieden werden müssen. In der Figur ist ja allerdings $\beta+\gamma < \frac{1}{2}\pi$, nimmt man aber anstatt des Dreiecks ABC das andere $A'BC$, anstatt β und γ die Winkel β' und γ', so ist $\beta'+\gamma' > \frac{1}{2}\pi$. und die Ableitung für $\sin(\beta'+\gamma')$ bleibt dieselbe.

2) Ebenfalls nach dem Sehnensatze ist

$$AA' = 2r \,.\, \sin ABA' = 2r \,.\, \sin(\beta + \gamma') = 2r \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\pi - \gamma)$$
$$= 2r \sin[\tfrac{1}{2}\pi + (\beta - \gamma)] = 2r \cos(\beta - \gamma),$$

anderseits

$$AA' = 2r \cos\beta \cos\gamma + 2r \sin\beta \sin\gamma$$

also, da $2r$ sich hebt,

$$\cos(\beta - \gamma) = \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma$$

3) Mit einer Hilfslinie können wir diese Formel noch einmal ableiten. Wir ziehen (Fig. II) den Durchmesser AE und verbinden E mit A', so ist bekanntlich

$$\text{Wkl. } A'AE = \beta - \gamma$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck $AA'E$ folgt

$$AA' = AE \,.\, \cos(\beta - \gamma)$$

$$2r \cos\beta \cos\gamma + 2r \sin\beta \sin\gamma = 2r \cos(\beta - \gamma)$$

4) Aus demselben Dreieck finden wir

$$EA' = AE \,.\, \sin(\beta - \gamma) = 2r \sin(\beta - \gamma)$$

Nun ist aber leicht einzusehen, dass

$$EA' = CD - DB = 2r \sin\beta \cos\gamma - 2r \cos\beta \sin\gamma$$

also

$$\sin(\beta - \gamma) = \sin\beta \cos\gamma - \gamma \cos\beta \sin\gamma$$

5) Mit Hilfe einer anderen Construction können wir das noch bequemer ableiten: ich trage

$$DF = DB$$

auf DC ab und verbinde A mit F; so ist bekanntlich

$$\text{Wkl. } CAF = \beta - \gamma$$

und nach dem Sinussatz

$$CF : AF = \sin(\beta - \gamma) : \sin\gamma$$
$$AF \,.\, \sin(\beta - \gamma) = CF \,.\, \sin\gamma$$

Nun ist aber

$$AF = AB = 2r \sin\gamma$$

$$CF = CD - BD = 2r \sin\beta \cos\gamma - 2r \cos\beta \sin\gamma$$

also, da $2r \sin\gamma$ sich weghebt

$$\sin(\beta - \gamma) = \sin\beta \cos\gamma - \cos\beta \sin\gamma$$

Wir können auch so sagen: Das Dreieck AFC hat mit dem Dreieck ABC die Seite AC gemein, es liegen aber dieser Seite in den Dreiecken verschiedene Winkel gegenüber: im Dreieck ABC der Winkel β, im Dreieck AFC der Winkel AFC, welcher gleich $(\pi-\beta)$ ist; diese Winkel sind Supplementwinkel; deshalb ist der Radius des Umkreises in beiden Dreiecken gleich gross, also auch für das Dreieck AFC gleich r, und da in diesem der Seite CF der Winkel $(\beta-\gamma)$ gegenüberliegt, muss nach dem Sehnensatze

$$CF = 2r\sin(\beta-\gamma)$$

sein; andererseits

$$CF = CD - BD = 2r\sin\beta\cos\gamma - 2r\cos\beta\sin\gamma$$

6) Es fehlt nun nur noch die Formel für $\cos(\beta+\gamma)$. Wir bedenken, dass es gleich $\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$ wird, und bilden diese Grösse, d. h. wir tragen $DG = DA'$ auf DA' ab und ziehen GB. Das Dreieck ABA' hat die Winkel

$$A'AB = \beta', \quad AA'B = \gamma$$

deshalb ist

$$\text{Wkl. } GBA' = \beta' - \gamma$$

und ebenso, wie wir CF berechneten, können wir finden

$$A'G = 2r\sin GBA' = 2r\sin(\beta'-\gamma)$$
$$= 2r\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \beta - \gamma) = 2r\cos(\beta+\gamma)$$

Andererseits

$$A'G = 2r\cos\beta\cos\gamma - 2r\sin\beta\sin\gamma$$

daher

$$\cos(\beta+\gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$$

Hierbei ist $\beta+\gamma$ ein spitzer Winkel. Um auch für den Fall, dass die Summe ein stumpfer Winkel wird, die Formel zu beweisen, nehmen wir $\beta'+\gamma'$. Dies ist gleich

$$\frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{2} - \gamma = \pi - (\beta+\gamma)$$

also

$$\cos(\beta'+\gamma') = \cos[\pi - (\beta+\gamma)] = -\cos(\beta+\gamma)$$
$$= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$
$$= -\sin\beta'\sin\gamma' + \cos\beta'\cos\gamma'$$

Somit hätten wir alle vier Formeln bewiesen, für spitze Winkel, wobei es gleichgültig ist, ob deren Summe ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist. Die Ausdehnung auf grössere Winkel hätte in der gewöhnlichen Weise zu erfolgen, indem man zeigt, dass die

Formeln, falls sie für irgend zwei Winkel β und γ gelten, auch dann noch gültig bleiben, wenn man einen derselben um $\frac{1}{2}\pi$ vermehrt.

Noch andere Methoden gibt es: z. B. man ziehe durch A zu BC die Parallele, welche den Kreis zum zweiten Male in H schneidet, und verbinde H mit C; dann ist

$$\text{Wkl. } HCA = \beta - \gamma$$

Vergl. hierzu die Trigonometrie von Conradt.

Die wichtigsten von diesen Ableitungen scheinen mir Nr. 1 und 2 zu sein. Hat der Schüler sich das Achsenkreuz eingeprägt, welches, von D ausgehend, nach links und rechts $2r\sin\beta\cos\gamma$ und $2r\cos\beta\sin\gamma$, nach oben $2r\sin\beta\sin\gamma$, nach unten $2r\cos\beta\cos\gamma$ trägt: so wird er die Formeln für $\sin(\beta+\gamma)$ und $\cos(\beta-\gamma)$ einfach aus der Figur ablesen, und z. B., warum die Formel für $\cos(\beta-\gamma)$ rechter Seits ein Pluszeichen enthalten muss, wird ihm nicht zweifelhaft sein. Auch

$$CF = 2r\sin(\beta-\gamma) = 2r\sin\beta\cos\gamma - 2r\cos\beta\sin\gamma$$

wird leicht zu behalten sein.

XI.

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Von

Berthold Oster.

1.

Die Existenztheoreme für die Integrale partieller Differentialgleichungen beweisen, dass zu jeder nicht singulären Lösung z_0 einer partiellen Differentialgleichung eine unendliche Schar „unendlich benachbarter" Lösungen existirt, welche von einem Parameter ε abhangen, der hinsichtlich seiner Kleinheit keiner Beschränkung unterworfen ist, und welche durch eine Entwickelung von der Form

$$z = z_0 + \varepsilon\zeta + \ldots$$

dargestellt werden können. Substituirt man für z den vorstehenden Ausdruck in die vorgelegte Differentialgleichung, entwickelt nach Potenzen des Parameters ε und setzt sodann den Coefficienten der ersten Potenz gleich null, so ergibt sich für ζ eine homogene, lineare Differentialgleichung, die „Hülfsgleichung" der vorgelegten Differentialgleichung. So hat z. B. die Hülfsgleichung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

die Form:

$$\frac{\partial F}{\partial z}\zeta + \frac{\partial F}{\partial p}\pi + \frac{\partial F}{\partial q}\varkappa + \frac{\partial F}{\partial r}\varrho + \frac{\partial F}{\partial s}\sigma + \frac{\partial F}{\partial t}\tau = 0$$

wo die Euler'schen Bezeichnungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \varkappa, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \pi, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \varrho, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} = \sigma, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \tau$$

benutzt sind.

Der Begriff der Hülfsgleichung wurde im Jahre 1883 von Darboux für eine beliebige Differentialgleichung eingeführt[1]. Doch schien die damalige Notiz nicht die Beachtung der Mathematiker zu finden, und es blieb Darboux selbst vorbehalten, durch die erfolgreiche Anwendung auf zwei der wichtigsten und schwierigsten Probleme der Flächentheorie die Bedeutsamkeit des neuen Begriffes darzustun[2]. In allerletzter Zeit hat ferner Goursat[3] die Hülfsgleichung zur Lösung der interessanten Aufgabe benutzt, zu entscheiden, wann eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung nach der von Darboux begründeten allgemeinen Integrationstheorie[4] integrirt werden könne. Sonst aber scheint der Begriff der Hülfsgleichung noch keiner Anwendung gedient zu haben.

Die Bezeichnung „Hülfsgleichung" kann ohne Schwierigkeit verallgemeinert und auf jedes System gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen ausgedehnt werden; für ein jedes System dieser Art definirt das zugehörenden „Hülfssystem" alle zu einer gegebenen Lösung unendlich benachbarte Lösungen. Auf letzterer Eigenschaft, der Integrale der Hülfsgleichung bezw. des Hülfssystemes beruht die Bedeutung dieser insbesondre für die Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen, da sich für diese eine flächentheoretische Deutung im dreidimensionalen Raume darbietet. Einerseits nun erfordern viele Probleme der Flächentheorie ausser der Bestimmung der eigentlichen Lösung] der betreffenden Differentialgleichung auch die der unendlich benachbarten. Andererseits aber ist klar, dass

---

1) G. Darboux, Sur les équations aux dérivées partielles. Comptes rendus, t. 96 (1883), p. 766.

2) G Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. IV (1896), Note XI: „Sur l'équation auxiliaire", p. 505—516.

3) E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, t. II (1898), Note 1: Sur l'équation auxiliaire, p. 334—336. — Auch zu den folgenden Entwicklungen ist dieses Werk zu vergleichen.

4) G. Darboux, Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, t. VII (1870), p. 163—173.

die vollständige Integration eines Systemes von Differentialgleichungen die des Hülfssystemes nach sich zieht[5]), und dass die Kenntniss einer particulären Lösung des ersteren die einer particulären Lösung des letzteren vermittelt. Dieser einfache Zusammenhang legt die Vermutung nahe, dass das gleichzeitige Studium eines Systemes von Differentialgleichungen und des zugehörenden Hülfssystemes von Nutzen sei. Indem wir die Prüfung dieser Annahme zum Gegenstande unserer Untersuchung machen, wollen wir uns der Einfachheit wegen auf die Betrachtung des Falles einer einzigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung beschränken.

2.

Es sei

$$F \equiv F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

die vorgelegte Differentialgleichung erster Ordnung,

$$\Phi \equiv \frac{\partial F}{\partial z}\zeta + \frac{\partial F}{\partial p}\pi + \frac{\partial F}{\partial q}\varkappa = 0 \tag{2}$$

die zugehörende Hülfsgleichung, welche in ζ, π, $\varkappa$ homogen und linear ist und deren Coefficienten Functionen von x, y, z, p, q sind. Wir beabsichtigen, diejenigen Functionen z, ζ von x, y zu bestimmen, welche, zusammen mit ihren beziehlichen Ableitungen in die Differentialgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{ll} F \equiv F(x, y, z, p, q) = 0 & (1) \\ \Phi \equiv \Phi(x, y, z, \zeta, p, \pi, q, \varkappa) = 0 & (2^*) \end{array} \right.$$

eingesetzt, diese gleichzeitig zu Identitäten machen. Es ist dabei zu beachten, dass die Gleichung $F = 0$ die Grössen ζ, π, $\varkappa$ nicht enthält.

Aus den Gleichungen (1), (2) möge folgen:

$$p = P(x, y, z, \zeta, \pi, \varkappa) \tag{3}$$

$$q = Q(x, y, z, \zeta, \pi, \varkappa) \tag{4}$$

Die Functionen P, Q müssen die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

erfüllen, wo

---

5) Vgl. Darboux, Leçons etc., t. IV, p. 506.

$$\frac{dP}{dy} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} Q + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \varkappa + \frac{\partial P}{\partial \pi} \sigma + \frac{\partial P}{\partial \varkappa} \tau$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} P + \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \pi + \frac{\partial Q}{\partial \pi} \varrho + \frac{\partial Q}{\partial \varkappa} \sigma$$

ist. Es ergiebt sich daher eine Differentialgleichung

$$G(x, y, z, \zeta, \pi, \varkappa, \varrho, \sigma, \tau) = 0 \tag{5}$$

welche z, ζ und die partiellen Ableitungen von ζ bis zur zweiten Ordnung enthält. Entnimmt man nun aus dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für ζ den Wert von z, — was ohne Differentiations- oder Integrationsprocesse möglich ist, — und setzt ihn nebst den in Bezug auf x und y genommenen partiellen Ableitungen erster Ordnung in die Gleichungen (3) und (4) ein, so erhält man zwei partielle Differentialgleichungen dritter Ordnung für ζ, deren Integration auch den Wert von z vermöge der Gleichung (5) ergiebt. Hiernach ist das Problem der gleichzeitigen Bestimmung der Integrale einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und der unendlich benachbarten Integrale im allgemeinsten Falle aequivalent dem Probleme der Integration von zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung.

Die in den Gleichungen (3) und (4) enthaltene Voraussetzung der Auflösbarkeit der Gleichungen (1) und (2) nach den partiellen Ableitungen p und q ist übrigens nicht notwendig zur Aufstellung der Integrabilitätsbedingung. Differentiirt man nämlich unter Beachtung der Relationen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \pi} = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varkappa} = \frac{\partial F}{\partial q} \tag{6}$$

die Gleichungen (1) und (2) partiell in Bezug auf x und y, so erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial F}{\partial q} t = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p + \frac{\partial \Phi}{\partial p} r + \frac{\partial \Phi}{\partial q} s + \frac{\partial F}{\partial z} \pi + \frac{\partial F}{\partial p} \varrho + \frac{\partial F}{\partial q} \sigma = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q + \frac{\partial \Phi}{\partial p} s + \frac{\partial \Phi}{\partial q} t + \frac{\partial F}{\partial z} \varkappa + \frac{\partial F}{\partial p} \sigma + \frac{\partial F}{\partial q} \tau = 0$$

Ersetzt man darauf mit Hülfe der Gleichung (2) die partiellen Ab-

leitungen von Φ durch solche von F, so führt die Elimination von r, s, t zu der Gleichung:

$$
\begin{aligned}
0 = & \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 \varrho + 2\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}\sigma + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 \tau \\
& + \left\{-\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] - \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] + \frac{\partial F}{\partial p}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right] + \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \frac{\partial F}{\partial q}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right]\right\}\pi \\
& + \left\{-\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] - \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] + \frac{\partial F}{\partial p}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]\right. \\
& \qquad \left. + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] + \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right\}\varkappa \\
& + \left\{-\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] - \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] + \frac{\partial F}{\partial p}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]\right. \\
& \qquad \left. + \frac{\partial F}{\partial q}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]\right\}\zeta
\end{aligned}
\tag{7}
$$

wobei die Abkürzungen

$$
\left[\frac{\partial}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}
$$

benutzt sind. Sodann ergiebt sich die Integrabilitätsbedingung (5) durch Elimination von p und q aus den Gleichungen (1), (2) und (7).

3.

Es ist von Wichtigkeit, zu bemerken, dass die Gleichung (5) in jedem Falle partielle Ableitungen zweiter Ordnung von ζ wirklich enthält. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass letzteres nicht der Fall sei, ist nämlich die, dass in der Gleichung

$$
\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}
$$

die Coefficienten von ϱ, σ, τ verschwinden, dass also

$$
\frac{\partial P}{\partial \varkappa} = \frac{\partial Q}{\partial \pi} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial \pi} = \frac{\partial Q}{\partial \varkappa}
$$

ist und daher die Gleichungen (3), (4) die Form haben:

$$
\begin{aligned}
p &= f(x, y, z, \zeta)\pi + g(x, y, z, \zeta) \\
q &= f(x, y, z, \zeta)\varkappa + h(x, y, z, \zeta)
\end{aligned}
$$

Hierzu ist notwendig, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p}\lambda - \frac{\partial F}{\partial q}\mu, & \frac{\partial F}{\partial \pi}\lambda - \frac{\partial F}{\partial \varkappa}\mu \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p}\lambda - \frac{\partial \Phi}{\partial q}\mu, & \frac{\partial \Phi}{\partial \pi}\lambda - \frac{\partial \Phi}{\partial \varkappa}\mu \end{vmatrix}$$

für alle Wertepaare (λ, μ) verschwindet. Diese Determinante hat aber den Gleichungen (1) und (6) zufolge den Wert

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\lambda - \frac{\partial F}{\partial q}\mu\right)^2$$

es müsste also

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

sein, ein Fall, der selbstverständlich ausgeschlossen ist.

Unser Problem erfährt eine bedeutende Vereinfachung durch die Annahme, dass in der vorgelegten Gleichung (1) die abhängige Variable z explicite nicht auftritt. Da alsdann nämlich die Hülfsgleichung (2) nach ihrer Definition weder z noch ζ enthält, so treten diese Grössen auch in den Gleichungen (3), (4) und der Integrabilitätsbedingung (5) nicht auf, und es stellt daher in diesem Falle die Gleichung (5) eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für ζ dar. Aus ihrem Integrale ergiebt sich sodann z vermittelst der Gleichungen (3) und (4) durch eine Quadratur.

Nach der soeben gemachten Bemerkung sind dieser besondere und der in Nr. 2. betrachtete allgemeinste Fall die einzigen Möglichkeiten, die sich für unser Problem darbieten.

4.

Auf ähnliche Weise kann das allgemeinere Problem behandel werden, zu einem vorgelegten Systeme von Differentialgleichungén ausser den eigentlichen Lösungen auch die zugehörenden, jenen unendlich benachbarten Lösungen zu ermitteln. Doch soll an dieser Stelle hierauf nicht weiter eingegangen werden, ebensowenig wie auf eine Erörterung über die bei dem vorliegenden Probleme auftretenden willkürlichen Constanten und Functionen. Hinsichtlich der nächstliegenden Ausdehnung auf partielle Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung möge nur erwähnt werden, dass für

diese die einschlägigen Untersuchungen von Bianchi[6], König[7], Pennacchietti[8]) und Vályi[9]) mit Nutzen verwendet werden können.

Um nun wieder zu dem betrachteten Falle des aus einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und ihrer Hülfsgleichung bestehenden Systemes zurückzukehren, so ist vorerst klar, dass die im allgemeinen Falle sich ergebenden simultanen Differentialgleichungen dritter Ordnung entweder selbst schon eine elementare Form haben oder durch geeignete Combination auf eine elementare Gleichung reducirbar sein können, sodass schon hier eine Vereinfachung des Problemes (das ja ursprünglich in der Integration der Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

besteht) erzielt wäre. Ungleich grösser aber kann die Vereinfachung für den in Nr. 3 betrachteten Fall werden, in welchem die Gleichung $F = 0$ die gesuchte Function z nicht enthält. Die partielle Differentialgleichung für ζ, auf welche sich hier die Gleichung (5) reducirt und welche ζ selbst explicite nicht enthält, kann sodann elementaren Charakter haben oder aber einer schnelleren Behandlung nach den allgemeinen für die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestehenden Integrationsmethoden zugänglich sein, als es für die Gleichung (1) möglich wäre. Dass übrigens bei allen hier in Frage kommenden Problemen das Nichtauftreten von z in der betreffenden Differentialgleichung vorausgesetzt werden kann und nötigenfalls durch Hinzunahme einer neuen unabhängigen Veränderlichen zu erreichen ist, ist bekannt.

Es möge noch bemerkt werden, dass die im Vorstehenden dargelegte Methode auch insofern von Interesse sein dürfte, als sie ganze Classen integrabler Differentialgleichungen zweiter Ordnung liefern kann, falls z in F nicht enthalten ist. Enthält nämlich die Gleichung (1) eine willkürliche Function und ist sie nach irgend welchen bekannten Methoden integrirbar, so ist es auch nach einer oben (Nr. 1.) gemachten Bemerkung die zugehörende Hilfsgleichung und daher auch die Gleichung zweiter Ordnung (5), welche nun im allgemeinen ebenfalls eine willkürliche Function enthält und daher die Repräsentantin einer ganzen Classe von Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist.

Von allen sonstigen Problemen, die sich an diese Betrachtung

---

6) Atti della Reale Accademia dei Lincei, ser. IV, vol. II. (1886),

7) Mathematische Annalen, Band 24 (1884).

8) Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. VII (1893).

9) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 95 (1882).

anschliessen, möge nur folgendes erwähnt werden: „Alle Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F(x, y, p, q) = 0$$

zu bestimmen, für welche die Integrabilitätsbedingung (5) eine vorgeschriebenene Gestalt hat". Soll die Gleichung (5) z. B. eine Laplace'sche Gleichung sein, also die Form

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y} + a(x, y)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

haben, so erhält man für F eine Function zweiten Grades von p q, deren Coefficienten drei willkürliche Functionen von x und y enthalten; für die sich so ergebenden Gleichungen $F = 0$ ist auf Grund von Imschenetsky und Darboux über die Laplace'schen Gleichungen angestellten Untersuchungen das Integrationsproblem ohne weiteres zu erledigen.

Die zu dem letzten Resultate führende Rechnung bietet keine principiellen Schwierigkeiten dar und bedarf daher keiner weiteren Ausführung. Dagegen soll auf eine Erörterung der hier unerledigt gebliebenen Probleme in einer späteren Arbeit näher eingegangen werden.

Berlin, December 1898.

XII.

Ueber die Auflösung der binomischen Congruenzen n ten Grades.

Von

G. Speckmann.

Für die Auflösung einer binomischen Congruenz 2 ten Grades haben wir in diesem Archiv ein einfaches Verfahren angegeben. — Durch dasselbe Verfahren können nun

1) alle binomischen Congruenzen, deren Exponent eine Potenz von 2 ist, vollständig aufgelöst werden,

2) alle binomischen Congruenzen, deren Exponent eine mit einem ungeraden Teiler behaftete Zahl ist, auf Congruenzen mit ungeraden Exponenten zurückgeführt werden.

Für die Auflösung der Congruenzen mit ungeradem Exponenten gelten die folgenden Betrachtungen. Ist eine Congruenz 3. Grades $x^3 \equiv k$ (mod. m) gegeben, so kann man den Betrag $x^2+3x+2+r$ ($r =$ Rest von $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 : m$) mit $\frac{m-3}{2} - x$ multipliciren und die entstehenden Coefficienten $> m$ nach m verkleinern. $(x^2+3x+2+r)\left(\frac{m-3}{2}-x\right)$ ist $\equiv k$(mod. m). x ist kleiner als $\frac{m-3}{2}$ und lässt sich in vielen Fällen leicht finden. — Sodann kann man für die Lösung der binomischen Congruenzen mit ungeraden Exponenten die folgende Methode anwenden. Es sei eine Congruenz n ten Grades $x^n \equiv k$(mod. m) gegeben. Die zugehörige Congruenz $n-1$ ten Grades ist $x^{n-1} \equiv r$ (mod. m). Man kann also die Gleichung aufstellen $xr = mn+k$ oder $x = \frac{mn+k}{r}$. Setzt man in $mn+k$ für n nach einander die Zahlen 0, 1, 2, 3, . . . ein, so wird bald eine Zahl entstehen, die den richtigen Factor r enthält. Dann ist die Congruenz gelöst.

Zur Erläuterung der obigen Ausführungen mögen einige Beispiele hier folgen:

1) Es sei die Congruenz $x^8 \equiv 17$ (mod. 43) gegeben. Wir führen diese Congruenz zunächst auf eine Congruenz 4. Grades und dann auf eine solche 2. Grades zurück und lösen die Congruenz 2 ten Grades auf.

$$43n + 17 - 11. \quad \left(\frac{43-1}{2}\right)^2 \equiv 11 \text{ (mod. 43)}$$

$$n = 0, \quad 6 = 2^2 + 2$$

$\frac{43-1}{2} - 2 = 19$ und $\frac{43+1}{2} + 2 = 24$ sind Wurzeln.

$$43n + 24 - 11$$

$$n = 0. \quad 13 = 3^2 + 4$$

$$n = 1. \quad 56 = 7^2 + 7$$

$\frac{43-1}{2} - 7 = 14$ und $\frac{43+1}{2} + 7 = 29$ sind Wurzeln.

$$33n + 24 - 11$$

$$n = 0. \quad 3 = 1^2 + 2$$

$$n = 1. \quad 46 = 6^2 + 10$$

$$n = 2. \quad 89 = 9^2 + 8$$

$$n = 3. \quad 132 = 11^2 + 11$$

$\frac{43-1}{2} - 11 = 10$ und $\frac{43+1}{2} + 11 = 33$ sind Wurzeln.

Damit wäre die gegebene Congruenz 8. Grades vollständig gelöst.

2) Es sei die Congruenz $x^6 \equiv 75$ (mod. 97) gegeben. Wir führen diese Congruenz auf eine Congruenz 8. Grades zurück.

$$97n + 75 - 73. \quad \left(\frac{97-1}{2}\right)^2 \equiv 73 \text{ (mod. 97)}$$

$$n = 0. \quad 2 = 1^2 + 1$$

Wurzeln sind $\frac{97-1}{2} - 1 = 47$ und $\frac{97+1}{2} + 1 = 50$

Jetzt lösen wir die Congruenz 3. Grades $x^3 \equiv 47$ (mod. 97) auf. Nach der ersten Methode erhalten wir

$$2(\tfrac{1}{2}pt^2) + \tfrac{1}{2}p_1 t^2 + \tfrac{1}{2}p_2 t^2 = 0, \quad \text{woraus folgt,}$$

$$2p + p_1 + p_2 = 0 \tag{1}$$

Die Spannung in der Schnur sei S. Denkt man sich die Schnur, wie in Figur 1. angedeutet ist, zerschnitten, so wirken auf die einzelnen Gewichte die Kräfte $P - 2S$, $P_1 - S$, $P_2 - S$.

Demnach erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} P - 2S &= \frac{P}{g}\,p \\ P_1 - S &= \frac{P_1}{g}\,p_1 \\ P_2 - S &= \frac{P_2}{g}\,p_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst:

$$S = \frac{4PP_1P_2}{P(P_1 + P_2) + 4P_1P_2} \tag{3}$$

Setzen wir diesen Wert für S in die Gleichungen (2) ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{P(P_1 + P_2) - 4P_1P_2}{P(P_1 + P_2) + 4P_1P_2}\,g \\ p_1 &= \frac{4P_1P_2 - P(3P_2 - P_1)}{P(P_1 + P_2) + 4P_1P_2}\,g \\ p_2 &= \frac{4P_1P_2 - P(3P_1 - P_2)}{P(P_1 + P_2) + 4P_1P_2}\,g \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Es interessirt nun zu wissen, unter welchen Bedingungen diese Beschleunigungen positiv, negativ oder gleich null sind, welche der Gewichte demnach fallen, steigen oder auch in Ruhe bleiben.

Sehen wir nun P als constante Einheit an und nehmen P_1 und P_2 als variabele Grössen, als Coordinaten eines Punktes B in einem rechtwinkligen Coordinatensystem, so stellt jeder Punkt der Ebene einen bestimmten Belastungsfall unserer Fallmaschine dar (Fig. 2). Die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} p &= 0 \\ p_1 &= 0 \\ p_2 &= 0 \end{aligned}$$

bedeuten dann drei gleichseitige Hyperbeln, die sich ausser im Anfangspunkte 0 des Coordinatensystems noch in einem zweiten Punkte A schneiden. Für diesen Punkt ist

$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{2}P$$

und das Rollensystem in Ruhe. Durch jede Hyperbel wird die Ebene in zwei Teile geteilt. Alle Punkte der Ebene auf der convexen Seite der Curve geben für die Beschleunigung einen positiven, auf der concaven Seite einen negativen Wert. Die Ebene ist durch alle drei Hyperbeln in sechs Felder geteilt; alle Punkte desselben Feldes geben dieselbe Bewegungsart der Rollenverbindung In der folgenden Tabelle sind die Resultate übersichtlich zusammengestellt.

Punkt B liegt auf:	P	P_1	P_2	Die Spannung S im Faden.
Feld 1.	fällt	steigt	steigt	$\frac{1}{2}P > S > \substack{P_1 \\ P_2}$
Grenze zwischen $\frac{1}{2}$	fällt	in Ruhe	steigt	$\frac{1}{2}P > S = P_1 > P_2$
Feld 2.	fällt	fällt	steigt	$\substack{\frac{1}{2}P \\ P_1} > S > P_2$
Grenze zwischen $\frac{2}{3}$	in Ruhe	fällt	steigt	$P_1 > S = \frac{1}{2}P > P_2$
Feld 3.	steigt	fällt	steigt	$P_1 > S > \substack{\frac{1}{2}P \\ P_2}$
Grenze zwischen $\frac{3}{4}$	steigt	fällt	in Ruhe	$P_1 > S = P_2 > \frac{1}{2}P$
Feld 4.	steigt	fällt	fällt	$\substack{P_1 \\ P_2} > S > \frac{1}{2}P$
Grenze zwischen $\frac{4}{5}$	steigt	in Ruhe	fällt	$P_2 > S = P_1 > \frac{1}{2}P$
Feld 5.	steigt	steigt	fällt	$P_2 > S > \substack{\frac{1}{2}P \\ P_1}$
Grenze zwischen $\frac{5}{6}$	in Ruhe	steigt	fällt	$P_2 > S = \frac{1}{2}P > P_1$
Feld 6.	fällt	steigt	fällt	$\substack{\frac{1}{2}P \\ P_2} > S > P_1$
Grenze zwischen $\frac{6}{1}$	fällt	steigt	in Ruhe	$\frac{1}{2}P > S = P_2 > P_1$
Punkt A	in Ruhe	in Ruhe	in Ruhe	$S = P_1 = P_2 = \frac{1}{2}P$

Breslau, im Januar 1898.

XIV.

Miscellen.

1.

Bemerkung über den Erdmagnetismus.

Exner gibt als Potentialgefälle der atmosphärischen Elektricität 1390 Daniell pro meter an.

Rechnet man 1 Daniell = 0·00357 Einheiten im elektrostatischen Masssystem, so wäre

$$\frac{dV}{dn} = \frac{4 \cdot 64}{1^{m}} = \frac{4 \cdot 64}{100^{cm}}$$

für die Dichte der Ladung an der Erdoberfläche ergibt sich

$$\mu = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dn}$$

und daher für die gesamte Ladung der Erde:

$$4\pi R^2 \cdot \mu = R^2 \cdot \frac{dV}{dn} = -6 \cdot 4^2 \cdot 10^{16} \cdot \frac{4 \cdot 64}{100}$$

$$= -2 \cdot 10^{16} \, [\text{cur. gr sec.}]$$

wo $R = 6 \cdot 4 . 10^{8cm}$ den Radius dar Erde bedeutet.

Diese elektrische Masse bewegt sich mit der Geschwindigkeit der Erde in der Ekliptik und kann daher als ein elektrischer „Verschiebungsstrom" betrachtet werden.

Schätzt man näherungsweise die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn auf: $3 . 10^{6cm}$, so ergibt sich für die pro sec durch einen Querschnitt der Bahn bewegte Elektricitätsmenge, oder für die Intensität des Verschiebungsstromes im elektrostatischen Mass:

$$\frac{M \cdot 3 \,.\, 10^6}{2R} = \frac{2 \,.\, 10^{16} \,.\, 3 \,.\, 10^6}{2 \,.\, 6 \cdot 4 \,.\, 10^8} = 0 \cdot 5 \,.\, 10^{14}$$

Die Stromstärke im elektromagnetischen Mass wird daher gleich:

$$\frac{0 \cdot 5 \,.\, 10^{14}}{3 \,.\, 10^{10}} = 0^0 17 \,.\, 10^4$$

Nach den Maxwell'schen Anschauungen wäre zu erwarten, dass ein derartiger Verschiebungsstrom auch auf einen Punkt, der sich mit der elektrischen Masse selbst bewegt, magnetische Kräfte ausübt.

Für die Intensität der magnetischen Kraft auf die Einheit der magnetischen Masse an einem Punkte der Erdoberfläche ergäbe sich, wenn der Strom als ein geradlinig „linearer" aufgefasst wird, der in der Bahn des Erdmittelpunktes circulirt,

$$H = \frac{2i}{R} = \frac{0 \cdot 34 \,.\, 10^4}{6 \cdot 4 \,.\, 10^8} = 0 \cdot 5 \,.\, 10^{-5}$$

Die magnetische Permeabilität des Schmiedeeisens, die für eine magnetisirende Kraft $H = 5$ etwa gleich 2000 ist, wird für geringere magnetisirende Kräfte wesentlich grösser; für $H = 1^0 7$ ist sie gleich 3000.

Es wäre also für die Permeabilität der Erde bei schwachen magnetisirenden Kräften eine 4stellige Zahl vielleicht möglich; dem würde eine Beeinflussung der magnetischen Erdkraft durch den elektrischen Verschiebungsstrom entsprechen, die schon in der zweiten Decimalstelle von H zum Ausdruck käme.

Was die Richtung dieser magnetisirenden Kraft anbelangt, so wäre, da die negativ geladene Kugel vom Nordpol betrachtet, umgekehrt wie ein Uhrzeiger rotirt, der in der Ekliptik kreisende Strom ersetzbar durch eine magnetische Platte, die auf der dem Nordpol zugewendeten Seite mit negativem Magnetismus belegt ist. Die Erde würde also in einer Richtung senkrecht auf die Ekliptik magnetisirt und müsste beim astronomischen Norden südlichen Magnetismus zeigen, wie es ja ungefähr den Tatsachen entspricht.

Wessely.

2.

Ueber die Zerlegung der Zahlen in Factoren.

Scheidet man von den Zahlen der natürlichen Zahlenreihe diejenigen aus, welche resp. durch 2^n, 3^n und 5^n teilbar sind, so bleiben nur noch Zahlen von der Form $6n \mp 1$ zurück. Die Teiler der Zahlen von der Form $6n \mp 1$ haben alle auch die Form $6n \mp 1$. Da immer leicht festzustellen ist, ob eine Zahl einen von den Teilern 2^n, 3^n und 5^n hat, so sind für solche Zahlen keine Teilbarkeitsregeln mehr nötig. Wir beschäftigen uns also nur mit der Zerlegung der Zahlen von der Form $6n \mp 1$ (mit Ausschluss der mit dem Teiler 5 behafteten Zahlen).

Ist ein Product $ab = P$ gegeben, so ist bei Anwendung der Logarithmentafeln $\log a + \log b = \log P$. Man hat also für das Product einer aus den beiden Factoren a und b zusammengesetzten Zahl immer $\log a + \log b = \log P$. Es ist also auch $\log P - \log a = \log b$ und $\log P - \log b = \log a$. Nimmt man also den Logarithmus von einem Product P, welches man auf die Teilbarkeit durch eine bestimmte Zahl a untersuchen will, und subtrahirt davon $\log a$, so muss $\log P - \log a$ den log des Factors b dieses Products geben.

Fertigt man sich nun eine Tabelle an, worin die Logarithmen der Zahlen von der Form $6n \mp 1$ enthalten sind und nimmt man den Logorithmus eines zu zerlegenden Products von der Form $6n \mp 1$, so kann man nach einander die Logarithmen der Zahlenreihe $6n \mp 1$ von dem Logarithmus des Products P absetzen und dann nachsehen, ob der Restlogarithmus den Logarithmus einer Zahl $6n \mp 1$ darstellt. Tritt dies ein, so sind die Factoren a und b des betreffenden Products gefunden. Es ist dabei aber nicht einmal nötig, dass man die ganzen Logarithmen der betreffenden Zahlen in die Tabelle einführt und es genügt vollständig, wenn man die zweistelligen Endungen derselben benutzt, da es selten zutrifft, dass die zweistellige Endung des Logarithmus irgend einer Zahl von der Form $6n \mp 1$ mit der zweistelligen Endung des Logarithmus einer anderen Zahl von derselben Form gleich ist.

Wir lassen unten eine Tafel der zweistelligen Endungen der 7 stell. Logarithmen der Zahlen von der Form $6n \mp 1 < 500$ folgen. Die Anwendung ist leicht. Man nimmt die zweistellige Endung des Logarithmus einer zu teilenden Zahl von der Form $6n \mp 1$ und setzt von derselben nach einander die zweistelligen Endungen der Logarithmen der Zahlen von der Form $6n \mp 1$ ab. Findet man dann in der Tafel eine zweistellige Endung, die mit dem Rest übereinstimmt, so sind die beiden Factoren der betreffenden Zahl gefunden.

Tafel der zweistelligen Endungen der Logarithmen der Zahlen von der Form $6n \mp 1 < 500$.

Zahl	2stell. Endung des log	Zahl	2stell. Endung des log	Zahl	2stell. Endung des log	Zahl	2stell. Endung des log	Zahl	2stell. Endung des log	Zahl	2stell. Endung des log
7	80	97	17	187	16	281	63	371	39	457	62
11	27	101	14	191	34	283	64	373	88	461	09
13	34	103	72	193	73	287	19	377	14	463	10
17	89	107	38	197	62	289	78	379	92	467	69
19	36	109	65	199	81	293	76	383	88	469	28
23	78	113	84	203	60	299	12	389	96	473	11
29	80	119	70	209	63	301	65	391	68	479	55
31	17	121	54	211	25	307	84	397	05	481	51
37	17	127	37	217	97	311	04	401	44	487	90
41	39	131	13	221	23	313	43	403	50	491	15
43	85	133	16	223	49	317	93	407	44	493	69
47	79	137	06	227	59	319	07	409	33	497	64
49	61	139	48	229	55	323	25	413	01	499	03
53	59	143	60	233	59	329	59	419	40		
59	20	149	63	239	79	331	80	421	21		
61	98	151	69	241	70	337	99	427	79		
67	48	157	97	247	70	341	44	431	73		
71	83	161	59	251	37	343	41	433	79		
73	29	163	76	253	05	347	95	437	14		
77	07	167	65	257	31	349	54	439	45		
79	71	169	67	259	98	353	47	443	37		
83	81	173	61	269	57	359	44	449	63		
89	00	179	30	271	23	361	72	451	65		
91	14	181	86	277	93	367	61				

G. Speckmann.

3.

Ueber Primzahlen.

I.

Es lassen sich arithmetische Reihen zweiter Ordnung bilden, in denen sehr viele Zahlen Primzahlen sind. Die allgemeine Formel zu solchen Reihen ist $\pm ax^2 + bx + p$ (p = Primzahl). Solche Reihen sind z. B. die folgenden:

5, 11, 19, 29, 41, 55, 71, . . . (Formel: x^2+5x+5)
11, 23, 37, 53, 71,91, 113, . . . (Formel: $x^2+11x+11$)
23, 47, 73, 101, 131, 163, 197, . . . (Formel: $x^2+23x+23$)
7, 13, 17, 19 . . . . (Formel: $-x^2+7x+7$)
13, 37, 59, 79, 97, 113, 127 . . . . (Formel: $-x^2+25x+13$)
u. s. w.

II.

Für die Anzahl der Primzahlen innerhalb einer Grenze x^2 lassen sich zu bestimmten Classen von Quadratzahlen arithmetische Reihen bilden. Es ist z. B.:

Quadratzahlgrenze:	Anzahl der Primzahlen:
$(1 . 2^2)^2$	6
$(2 . 2^2)^2$	18
$(3 . 2^2)^2$	34
u. s. w.	u. s. w.

Formel für die Anzahl der Primzahlen: $2x^2+10x+6$
$(x=0,\ 1,\ 2, \ldots)$

Man kann diese Verhältnisse auch so ausdrücken:

Quadratzahlgrenze: $(n\,2^2)^2$. Anzahl der Primzahlen: $n(n+3)-1)$. Bis zu der Quadratzahl $(8 . 2^2)^2 = 1024$ und der Anzahl der Primzahlen $(8 . 11-1)2 = 174$ stimmen diese Verhältnisse genau. Von hier ab treten Abweichungen ein, die aber auch von regelmässiger Form sind und die Bildung weiterer arithmetischer Reihen für die Anzahl der Primzahlen ermöglichen. G. Speckmann.

4.

Auflösung einer Congruenz *n*ten Grades.

Es sei eine Congruenz $x^n \equiv a (\text{mod. } m)$ gegeben. — Der Rest z, den die Potenz x^{n-1} nach dem Modul m giebt, ist uns nicht bekannt. Weil aber $zx \equiv a (\text{mod. } m)$ ist, können wir die Gleichung

$$x = \frac{my+a}{z} \tag{1}$$

aufstellen. In dieser Gleichung sind y und z unbekannte Grössen. Setzen wir in die Gleichung 1) für y nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, . . . ein, so wird der Betrag $my+a$ bald eine Zahl bilden, die einen Teiler z hat. Ist die richtige Zahl getroffen, so ist x auch gefunden.

Beispiele:

1)
$$x^3 \equiv 8 \pmod{31}$$
$$x = \frac{31y+8}{z}$$
$$y = 1. \quad 31 \,.\, 1 + 8 = 39$$
$$y = 2. \,.\, 31 \,.\, 2 + 8 = 70$$
$$z = 7, \quad x = 10$$

2)
$$x^4 \equiv 16 \pmod{17}$$
$$x = \frac{17y + 16}{z}$$
$$y = 1. \quad 17 \,.\, 1 + 16 = 33$$
$$y = 2. \quad 33+17 = 50$$
$$y = 3. \quad 50+17 = 67$$
$$y = 4. \quad 67+17 = 84$$
$$y = 5. \quad 84+17 = 101$$
$$y = 6. \quad 101+17 = 118$$
$$y = 7. \quad 118+17 = 135$$
$$z = 15, \quad x = 9.$$

G. Speckmann.

5.

Ueber arithmetische Reihen, worin Anfangsglied und Differenz teilerfremd sind.

Aus einer arithmetischen Reihe der obengenannten Art kann man immer in leichter Weise Reihen absondern, welche die constante Differenz $6n$ haben und deren Glieder von der Form $6n \mp 1$ sind. Es sei z. B. eine Reihe mit dem Anfangsgliede 5 und der Differenz 13 gegeben. Um die in dieser Reihe vorkommenden Glieder von der Form $6n+1$ zu erhalten, stellen wir die Gleichung auf:

$$1)\quad 13m + 5 = 6n + 1$$

$$\text{oder}\quad 13m + 4 = 6n$$

Man sieht sofort, dass, wenn man in $13m + 4$ m gleich 2 nimmt, eine Zahl von der Form $6n$ entsteht. $13 \,.\, 2 + 5 = 31$ ist also eine Zahl von der Form $6n + 1$, die in der Reihe $13m + 5$ vorkommt. Weitere Zahlen von derselben Form sind

$$13 \,.\, (2 + 6) + 5 = 109$$

$$13 \,.\, (2 + 12) + 5 = 187$$

$$13 \,.\, (2 + 18) + 5 = 265$$

u. s. w.

Es kommen also die Zahlen der Reihe $78n + 31$ in der Reihe $13m + 5$ mit vor. Will man nun aus der Reihe $78n + 31$ die teilbaren Zahlen ausscheiden, so ist das eine leichte Sache. Da die zerlegbaren Zahlen von der Form $6n + 1$ oder von der Form $6n - 1$ zerlegt werden können, so kann man die Gleichungen aufstellen:

$$2)\quad (6i + 1)(6k + 1) = 78n + 31$$

$$3)\quad (6l - 1)(6m - 1) = 78n - 31$$

Nach Multiplication und Reducirung durch 6 entstehen hieraus die Gleichungen:

$$4)\quad n = \frac{6ik + k + i - 5}{13}$$

$$5)\quad n = \frac{6lm - m - l - 5}{13}$$

Die Werte, welche für i, k, l, m in die Gleichungen 4) und 5) eingeführt, Zahlen von der Form $13n$ entstehen lassen, findet man leicht. Für die Gleichung 5) sind z. B. 1 und 9 solche Zahlen. Man kann also für $bi - 1$ und $bk - 1$ die Zahlen 6 und 53 nehmen. Diese sind Teiler einer Zahl von der Form $78n + 31$. Ebenso sind die Zahlen von der Form $78n + 5$ und $78n + 53$ Teiler von Zahlen der Zahlenreihe $78n + 31$. G. Speckmann.

6.

Facultätscongruenzen.

Für eine Reihe von aufeinander folgenden Facultäten und für einen beliebigen Modul m bestehen die folgenden Congruenzeu:

$$\left.\begin{array}{r} 2! + (m-2)1! \\ 3! + (m-3)2! \\ 4! + (m-4)3! \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ (m-1)! + (m-[m-1])(m-2)! \end{array}\right\} \equiv 0 \pmod{m}$$

Beispiel:

$m = 11$

$$\begin{array}{l} 2! + 9 . 1' = 11 \\ 3! + 8 . 2! = 22! \\ 4! + 7 . 3! = 66 \\ 5! + 6 . 4! = 264 \\ 6! + 5 . 5! = 1320 \\ 7! + 4 . 6! = 7920 \\ 8! + 3 . 7! = 55440 \\ 9! + 2 . 8! = 443520 \\ 10! + 1 . 9! = 3991680 \end{array}$$

Die entstandenen Producte sind alle durch 11 teilbar.

G. Speckmann.

7.

Ueber periodische Kettenbrüche.

Diejenigen Quadratzahlen, welche, wenn man sie resp. durch 1^2, 2^2, 3^2, u. s. w. dividirt, den Rest 1 gebon, lassen sich in der Weise bestimmen, dass man zu jedem Quadrate n^2 zwei Reihen bildet, in denen die ersten Wurzelzahlen gleich $n^2 \mp 1$ sind und die folgenden durch fortgesetzte Hinzunahme von n^2 gebildet werden. So sind z. B. diejenigen Quadratzahlen, welche, wenn man sie durch 2^2 dividirt, den Rest 1 geben, die folgenden:

$$\begin{array}{l} 3^2,\ 7^2,\ 11^2, \ldots \\ 5^2,\ 9^2,\ 13^2, \ldots \end{array}$$

Dividirt man nun solche Quadratzahlen nach Abzug von 1 durch 2^2 resp. n^2 und entwickelt die Quadratwurzeln aus den entstehenden Quotienten in Kettenbrüchen, so bilden die so gewonnenen ganzen Zahlen und die Nenner der Kettenbrüche in bestimmter Weise fortschreitende Reihen. Für $n^2 = 1^2$ und $n^2 = 2^2$ sind die betreffenden Quotienten oder Determinanten der Pell'schen Gleichung auch in je einer einzelnen Reihe darzustellen. = Es mögen einige Abteilungen der Kettenbruchentwicklungen hier folgen.

1) $n^2 = 1^1$. Determinantenform $x^2 + 4x + 3$.

$\sqrt{3} = 1 + (1, 2)$ Ganze Zahlen, Natürl. Zahlenreihe.
$\sqrt{8} = 2 + (1, 4)$ 1. Kettenbruchnenner 1.
$\sqrt{15} = 3 + (1, 6)$ 2. Kettenbruchnenner $2x$.
$\sqrt{24} = 4 + (1, 8)$ $(x = 1, 2, 3, \ldots)$
u. s. w.

2) $n^2 = 2^2$. Determinantenform $x^2 + 3x + 2$.

$\sqrt{2} = 1 + (2)$ Ganze Zahlen: Natürl. Zahlenreihe.
$\sqrt{6} = 2 + (2, 4)$ 1. Kettenbruchnenner 2.
$\sqrt{12} = 3 + (2, 6)$ 2. Kettenbruchnenner $2x$.
$\sqrt{20} = 4 + (2, 8)$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$
u. s. w.

3) $n^2 = 3^2$. Determinantenform:

$9x^2 + 24x + 7.$	$9x^2 + 28x + 11.$
$\sqrt{7} = 2 + (1, 1, 1, 4)$	$\sqrt{11} = 3 + (3, 6)$
$\sqrt{32} = 5 + (1, 1, 1, 10)$	$\sqrt{40} = 6 + (3, 12)$
$\sqrt{75} = 8 + (1, 1, 1, 16)$	$\sqrt{87} = 9 + (3, 18)$
$\sqrt{136} = 11 + (1, 1, 1, 22)$	$\sqrt{152} = 12 + (3, 24)$
u. s. w.	u. s. w.

4) $n^2 = 4^2$. Determinantenform:

$16x^2 + 45x + 14.$	$16x^2 + 49x + 18.$
$\sqrt{14} = 3 + (1, 2, 1, 6)$	$\sqrt{18} = 4 + (4, 18)$
$\sqrt{60} = 7 + (1, 2, 1, 14)$	$\sqrt{68} = 8 + (4, 16)$
$\sqrt{138} = 11 + (1, 2, 1, 22)$	$\sqrt{150} = 12 + (4, 24)$
$\sqrt{248} = 15 + (1, 2, 1, 30)$	$\sqrt{264} = 16 + (4, 32)$
u. s. w.	u. s. w.

5) $n^2 = 5^2$. Determinantenform:

$25x^2+72x+23$.	$25x^2+76x+27$.
$\sqrt{23} = 4+(1, 3, 1, 8)$	$\sqrt{27} = 5+(5, 10)$
$\sqrt{96} = 9+(1, 3, 1, 18)$	$\sqrt{104} = 10+(5, 20)$
$\sqrt{219} = 14+(1, 3, 1, 28)$	$\sqrt{231} = 15+(5, 30)$
$\sqrt{392} = 19+(1, 3, 1. 38)$	$\sqrt{408} = 20+(5, 40)$
u. s. w.	u. s. w.

Allgemein ist die Determinantenform zu $n^2 > 2$ gleich

$$n^2x^2+(n^2\mp 1)3+(n\mp 2)$$

Für die zu einem jeweiligen $n^2 > 2$ gehörige 1. Determinantenform ist der erste Kettenbruchnenner gleich 1, der zweite gleich $n-2$, der dritte gleich 1 und der vierte gleich $(n-1)2+2n$. Für die zweite Determinantenform ist der erste Kettenbruchnenner gleich $2n$ und der zweite gleich $2nx$. Die Reihe der ganzen Zahlen ist gleich

$$nx+(n-1)$$
resp. $nx+n$

G. Speckmann.

8.

Ueber Reihensysteme, deren Modul ein Vielfaches von 6 ist.

In meinen „Beiträgen zur Zahlenlehre"*) habe ich pag. 40 den folgenden Satz aufgestellt und begründet:

„Ist eine Zahl Z von der Form $xn\mp 1$ gegeben und „hat ein Primfactor p derselben ebenfalls die Form $xn\mp 1$, „so ist $\frac{Z\pm 1}{n}\pm\frac{p\pm 1}{n}$ durch p teilbar."

Da nun jede Primzahl > 3 die Form $6n\mp 1$ oder $6xn\pm r$ hat, so kann bei denjenigen Zahlen, die aus Factoren von der Form $6n\mp 1$ zusammengesetzt sind, für den anzuwendenden Modul z immer ein Vielfaches der Zahl 6 gesetzt werden. Es dürfte deshalb eine Aufstellung der primitiven Zahlformen für diejenigen Reihensysteme, deren Modul von der Form $6n$ ist, nicht ohne Nutzen sein. — Es ist

---

*) Verlag von Eschen & Fasting zu Oldenburg i. Gr.

nun gleich ersichtlich, dass in einem Reihensystem mit dem Modul $6n$ nur diejenigen Anfangsglieder, die eine Primzahl oder ein ungerades Vielfaches einer Primzahl darstellen, nebst der Zahl 1, relativ prim zum Modul sein können. Es ist deshalb leicht, die betreffenden Zahlformen zu finden. — Praktisch wendet man die folgende Regel an. Man dividire zunächst den Modul $6n$ durch 2 und stelle fest, welche Zahlen von der Form $6n \mp 1$ unter $\frac{6n}{2}$ liegen. Von diesen Zahlen kann man diejenigen streichen, die mit $6n$ den gleichen Teiler haben. Setzt man die übrig gebliebenen Zahlen nebst der 1 in die Formel $6xn \pm r$ nach einander für r ein, so erhält man für das betr. System die sämtlichen Formen, in denen Anfangsglied und Differenz zu einander relativ prim sind.

Für die Moduln 6, 12, 18, 24, 30 mögen die betreffenden Formen hier folgen.

Modul:	Zahlformen:
6	$6n \pm 1$
12	$12n \pm 1$
	$12n \pm 5$
18	$18n \pm 1$
	$18n \pm 5$
	$18n \pm 7$
24	$24n \pm 1$
	$24n \pm 5$
	$24n \pm 7$
	$24n \pm 11$
30	$30n \pm 1$
	$30n \pm 7$
	$30n \pm 11$
	$30n \pm 13$

G. Speckmann.

9.

Formeln für die Wurzeln der Pythagoräischen Gleichung.

Bei beliebigem x besteht die Gleichung

$$1)\qquad \left(\frac{x^2+(x-2)^2}{2}\right)^2-(x[x-2])^2=\left(\frac{x^2-(x-2)^2}{2}\right)^2$$

Nach Multiplication und Reduction entsteht aus Gleichung 1) die Gleichung

$$2)\qquad (x^2-2x+2)^2-(x^2-2x)^2=(2x-2)^2$$

Für die Wurzeln X, Y, Z der Pythagoräischen sind also bei beliebigem x zu setzen:

$$X=x^2-2x+2$$
$$Y=x^2-2x$$
$$Z=2x-2$$

G. Speckmann.

10.

Ein Satz vom Kreisviereck.

Lehrsatz: Die Diagonalen des Kreisvierecks verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Viereckswinkel.

Beweis. $ABCD$ sei ein Viereck, AC und BD seine Diagonalen Dann ist nach trigonometrischer Formel

$$\frac{AB}{\sin ACB}=\frac{AC}{\sin ABC}$$

$$\frac{AB}{\sin ADB}=\frac{BD}{BAD}$$

Geht ein Kreis durch A, B, C, D, so sind ACB und ADB als Peripheriewinkel auf Bogen AB einander gleich, folglich auch die linken Seiten beider Gleichungen, mithin auch die rechten, und man hat:

$$AC:BD=\sin ABC:\sin BAD$$

was zu beweisen war.

Dr. Demeter Danitsch,
Professor in Belgrad.

11.

Ueber Darstellbarkeit von Zahlen als Summen zweier Quadrate.

Es ist bekannt und bewiesen, dass jede Primzahl von der Form

$$z = 4n + 1$$

eine Summe zweier Quadrate ist. Von den vielen hieran sich knüpfenden Folgerungen und Fragen, die jedoch nicht erwähnt zu werden pflegen, möge nur eine hier Platz finden. Sei

$$z = a^2 + b^2$$
$$z_1 = a_1^2 + b_1^2$$

dann ist

$$zz_1 = (aa_1 \pm bb_1)^2 + (ab_1 \mp ba_1)^2 \tag{1}$$

Die Aufgabe der Zerlegung des Products in eine Quadratsumme hat also 2 Lösungen. Fügt man nach derselben Formel dem Product zz_1 die analogen Factoren z_2, z_3 . . . nach einander hinzu, so folgt, dass die Zerlegung des Products $zz_1z_2 \ldots z_{m-1}$ im allgemeinen auf 2^{m-1} Arten möglich ist. Wendet man den oben genannten Satz an, beachtet auch, dass

$$2 = 1^2 + 1^2$$

ist, so lässt sich das Ergebniss folgendermassen aussprechen:

Jede Zahl, die durch keine Zahl von der Form $4n - 1$ teilbar ist, ist 2^{m-1} im allgemeinen nicht identischen Summen zweier Quadrate gleich, wo m die Anzahl ihrer Primfactoren bezeichnet.

Im besondern bemerkt man leicht, dass die 2 Zerlegungen (1) für $z = 2$ identisch sind; daher ist m beschränkt auf die ungeraden Primfactoren.

R. Hoppe.

XV.

Die Entwicklung nach Bernoulli'schen Functionen.

Von

Franz Rogel.

---

1. Eindeutigkeit der Entwicklung.

Sei $R \equiv \Sigma a_m B_m(x)$ eine zwischen gewissen Grenzen convergente Reihe, geordnet nach den Bernoulli'schen Functionen B_m, $m = 1, 2, \ldots$, und bestünde eine von dieser verschiedene, doch gleichwertige Entwicklung

$$R \equiv \Sigma b_m B_m(x)$$

so gibt die Differenz

$$\Sigma c_m B_m(x) = 0, \quad c_m = a_m - b_m$$

giltig für ein den obigen Reihen gemeinsames Convergenzgebiet. Für eine continuirliche Reihe solcher x-Werte, für welche x und $x+1$ innerhalb der Convergenzgrenzen letzterer Reihe liegen, ist dann auch

$$\Sigma c_m B_m(x+1) = 0,$$

daher

$$\Sigma c_m [B_m(x+1) - B_m(x)] = 0$$

oder zufolge einer bekannten Eigenschaft dieser Functionen (S. Schlömilch Comp. II. p. 207 ff.)

$$\Sigma m c_m x^{m-1} = 0$$

was für eine stetige aufeinanderfolgende Reihe von x-Werten nur bestehen kann, wenn $c_m = 0$ oder

$$a_m = b_m$$

ist, d. h. **Gleichwertige Entwicklungen nach den B_n sind identisch.**

Auf die hier zu betrachtenden Reihen ist, wenn dieselben convergiren, daher der Satz der „unbestimmten Coefficienten" anwendbar.

2. Entwicklung einer gegebenen Function nach B_m.

Sei $f(x)$ eine nach dem Taylor'schen Satze entwickelbare Function, und werde abkürzungsweise

$$f^{(r)}(k) = f_r, \quad f^{(r)}(k+h) - f^{(r)}(k) = \Delta_r, \quad \frac{x}{h} = u$$

unter h und k beliebige Constante verstanden, so giebt der Boole'sche Satz (Schl. p. 221)

$$hf_1 = \Delta - \frac{h}{2}\Delta_1 + \frac{B_1}{2!}h^2\Delta_2 - \frac{B_2 h^4}{4!}\Delta_4 + - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{B_{n-1}h^{2n-2}}{(2n-2)!}\Delta_{2n-2} + R_{2n} \ldots \ldots (1)$$

wo

$$R_{2n} = \begin{cases} -\dfrac{h^{2\alpha+1}}{(2n)!}\displaystyle\int_0^1 B_{2n}(t) f^{(2n+1)}(k+ht)\,dt \ldots (\alpha) \\[2ex] +\dfrac{h^{2n}}{(2n-1)!}\displaystyle\int_0^1 B_{2n-1}(t) f^{(2n)}(k+ht)\,dt \ldots (\beta) \end{cases}$$

Wird derselbe der Reihe nach für $f_1, f_2, f_3, \ldots f_{2n-1}$ derart in Anspruch genommen, dass für die f mit geradem Zeiger die Restform (β) und für jene mit ungeradem Zeiger die Form (α) gewählt, und dass der Ordnungszeiger der unter dem Integralzeichen stehenden Function f durchgehends $= 2n$ wird, so entsteht, wenn die $r$te Gleichung, $r = 1, 2, \ldots 2n-1$ mit $\frac{x^r}{r!}$ multiplicirt wird, das System

$$hxf_1 = x\Delta - \frac{h}{2}x\Delta_1 + \frac{B_1 h^2}{2!}x\Delta_2 - \frac{B_2 h^4}{4!}x\Delta_4 + - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{B_n h^{2n-2}}{(2n-2)!}x\Delta_{2n-2}$$
$$+ \frac{h^{2n}}{(2n-1)!}x\int_0^1 B_{2n-1}(t) f^{(2n)}(k+ht)\,dt$$

$$\frac{hx^2}{2!} f_2 = \frac{x^2}{2!} \Delta_1 - \frac{h}{2} \frac{x^2}{2!} \Delta_2 + \frac{B_1 h^2}{2!} \frac{x^2}{2!} \Delta_3 - \ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{B_{u-1} h^{3n-2}}{(2u-2)!} \frac{x^2}{2!} \Delta_{2n-1}$$

$$- \frac{h^{2n-1}}{(2n-2)!} \frac{x^2}{2!} \int_0^1 B_{2n-1} (t(f^{(2n)} (k + ht) dt$$

$$\frac{hx^3}{3!} f_3 = \frac{x^3}{3!} \Delta_2 - \frac{h}{2} \frac{x^2}{3!} \Delta_3 + \ldots + (-1)^{a-1} \frac{B_{n-2} h^{2n-4}}{(2n-4)!} \frac{x^3}{3!} \Delta_{2n-2}$$

$$+ \frac{h^{2a-2}}{(2n+3)!} \frac{x^3}{3!} \int_0^1 B_{2n-3}(t) f^{(2n)} (n + ht) dt$$

$$\frac{hx^4}{4!} f_4 = \frac{x^4}{4!} \Delta_3 - + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{B_{n-2} h^{2n-4}}{(2n-4)!} \frac{x^4}{4!} \Delta_{2n-1}$$

$$- \frac{h^{2n-3}}{(2n-4)!} \frac{x^4}{4!} \int_0^1 B_{2n-4}(t) f^{(2n)} (k + ht) dt$$

. . . .

$$\frac{hx^{2n-1}}{(2n-1)!} f_{2n-1} = \frac{x^{2} {}^{-1}}{(2n-1)!} \Delta_{2a-2} - \frac{h}{2} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \Delta_{2r-1}$$

$$+ \frac{h^2}{1!} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_0^1 [B_1(t) - \tfrac{1}{2}] f^{(3n)} (k + ht) dt$$

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} \Delta_{2n-1} - \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Delta_{2n-1}$$

Die Addition ergiebt auf der linken Seite die Taylor'sche Reihe, während rechter Hand die gewünschte, eine willkürliche Constante enthaltende Entwicklung nach Bernoulli'schen Functionen hervorgeht:

$$h[f(k+x) - f(k) - R_{2n}] = \frac{h}{1!} \Delta B_1(u) + \frac{h^2}{2!} \Delta_1 + B_2(u) \frac{h^3}{3!} \Delta_2 B_3(u) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} \Delta_{2n-2} B_{2n-1}(u) + \frac{h^{2n}}{(2n)!} \Delta_{2n-1} B_{2n}(u) - \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Delta_{2n-1}$$

$$+ \frac{h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 M f^{[2n)} (k + ht) dt - \tfrac{1}{2} \frac{h^{2n} u^{2n-1}}{(2n-1)!} \Delta_{2n-1}$$

worin

$$M = \binom{2n}{1} u B_{2n-1}(t) - \binom{2n}{2} u^2 B_{2n-2}(t) + \dots$$
$$+ \binom{2n}{2n-1} u^{2n-1} B_1()$$
$$= D_v^{2n} \left\{ v \frac{e^{tv}-1}{e^v-1} (1-e^{-uv}) \right\}_{v=0}$$
$$= B_{2n}(t) + B_{2n}(-u) - B_{2n}(t-u)$$

das M enthaltende Rest-Integral ist demnach

$$-\frac{h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 [B_{2n}(t) - B_{2n}(t-u)] f^{(2n)}(k+ht)\,dt$$
$$-\tfrac{1}{2} \frac{h^{2n} u^{2n-1}}{(2n-1)!} \varDelta_{2n-1} + \frac{h^{2n}}{(2n)!} B_{2n}(-u) \varDelta_{2n-1}$$

Mit Berücksichtigung von

$$B_{2n}(-u) = B_{2n}(u) + 2n u^{2n-1}$$

ist nach gehöriger Reduction und Division mit h schliesslich

$$f(x+k) = f(k) + \frac{h^0}{1!} \varDelta B_1(u) + \frac{h'}{2!} \varDelta_1 B_2(u) + \frac{h^2}{3!} \varDelta_2 B_3(u) + \dots$$
$$\dots + \frac{h^{2n-2}}{(2n-1)!} \varDelta_{2n-2} B_{2n-2}(u) + 2 \frac{h^{2n-1}}{(2n)!} \varDelta_{2n-1} B_{2n}(u)$$
$$- \frac{h^{2n-1}}{(2n)} ! u^{2n-1} \varDelta_{2n-1}(u-n)$$
$$+ \frac{h^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 [B_{2n}(t) - B_{2n}(t-u)] f^{(2n(}(k+ht)\,dt$$
$$+ \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} \int_0^1 (1-w)^{2n-1} f^{(2n)}(k+xw)\,dw \quad \dots\dots (2)$$

Die Betrachtung der Restglieder führt zu dem Schlusse, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^{2n-1}}{(2n)!} \varDelta_{2n-1} B_{2n}(u) = 0 \quad \dots\dots (3)$$

und

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 N f^{(2n)}(k+ht)\,dt = 0, \quad N = B_{2n}(t) - B_{2n}(t-u) \quad \dots (4)$$

die Bedingungen der Entwickelbarkeit von Functionen der

genannten Art nach Bernoulli'schen Functionen sind; denn die Grenzwerte der anderen Glieder des Restes verschwinden schon zufolge der über f gemachten Voraussetzung.

Dem Reste kann durch Entfernung der Integralzeichen eine andere Form gegeben werden.

Zu diesem Zwecke werde zuerst das Intervall $u = 0$, $u = -\frac{1}{2}$ ins Auge gefasst, wofür sich dann vorstehendes Integral in Grenzen einschliessen lässt.

In Ansehung dessen, dass für s nur das Intervall (0, 1) in Betracht kommt, wird $t=u$ zwischen 0 und $\frac{3}{2}$ liegen, innerhalb welchen Intervalles $B_{2a}(s-u)$ das Zeichen nicht wechselt.

Denn es besitzt $B_{2n}(v)$ innerhalb (0, 1) dasselbe Zeichen $(-1)^n$ (Schl. p. 215, Fig. 41 u. 42); nun ist aber

$$B_m(v+1) = B_m(v) + mv^{m-1}$$

woraus hervorgeht, dass $B_{4r}(v)$ auch von $v=1$ bis $v=2$, somit im Intervall $(0, \frac{3}{2})$ positiv bleibt.

Ferner ist

$$B_{4r\pm 2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4r+2-(2^{4r+2}-1)B_{2r+1}}{2^{4r+1}}$$

wegen

$$B_{2r+1} > \frac{4r+2}{2^{4r+2}-1}, \quad r > 1$$

stets negativ.

Würde nun $B_{4r+2}(v)$, das samt seiner Ableitung für $v=0$ verschwindet, innerhalb $(1, \frac{3}{2})$ sein Vorzeichen wechseln, so müssten in diesem Intervalle, geometrisch gesprochen, mindestens zwei Wendepunkte liegen, daher $DB_{4r+2}(v) = B_{4r}(v)$ zwischen $v=1$ und $x=\frac{3}{2}$ mindestens zweimal verschwinden, was nach dem Vorigen aber nicht der Fall ist. B_{2a} besitzt daher in dem Intervalle $(0, \frac{3}{2})$ dasselbe Zeichen $(-1)^n$.

Es ist somit wegen der angenommenen Stetigkeit und Endlichkeit von f gestattet zu setzen

$$\int_0^1 B_{2n}(t-u)\, f^{(2n)}(k+ht)\, dt = (-1)^n f^{(2n)}(k+n\theta) \int_0^1 B_{2n}(t-u)dt$$

$$= ((-1)^n u^{2n}) + B_n f^{(2n)}(k+h\theta), \quad 0 < \theta < 1$$

und aus demselben Grunde auch

$$\int_0^1 B_{2n}(t) f^{(2n)}(k+ht)\,dt = (-1)^n f^{(2n)}(+ht') \int_0^1 B_{2n}(t)\,dt =$$

$$= B_n f^{(2n)}(k+h\theta'),\quad 0 < \theta' < 1;$$

folglich ist wegen

$$f^{(2n)}(k+h\theta') - f^{(2n)}(k+ht) =$$

$$= \varepsilon h\, f^{(2n+1)}(k+\vartheta h),\quad 0<\varepsilon,\quad 0<\vartheta<1 \text{ nun}$$

$$\frac{h^{2n}}{(2n)!}\int_0^1 N f^{(2n)}(k+ht)\,dt = \frac{\varepsilon h^{2n+1}}{(2n)!} B_n f^{(2n+1)}(k+\vartheta h)$$

$$-(-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!} u^{2n} f^{(2n)}(k+\Theta t)$$

$$-\tfrac{1}{2} \leqq u \leqq 0$$

Endlich kann das zweite Rest-Integral in (2) durch

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(k+\alpha x),\quad 0<\alpha<1$$

ersetzt werden.

Die Darstellungsbedingungen (3) und (4) gehen jetzt, wenn noch Δ_{2n-1} durch $hf^{(2n)}(k+\mu h)$ ersetzt wird, über in

$$\lim_{u=\infty} \frac{h^{2n}}{(2n)!} B_{2n}(u) f^{(2n)}(k+\mu h) = 0,\quad 0<\mu<1 \quad \ldots\ldots (5)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^{2n}}{(2n)!} \left(\varepsilon h B_n f^{(2n+1)}(k+\vartheta h) - (-1)^n u^{2n} f^{(2n)}(k+\theta h)\right) = 0 \quad . (6)$$

$$0<\varepsilon<1,\quad 0<\theta<1,$$

$$-\tfrac{1}{2} \leqq u \leqq 0$$

Ein einfacheres, jedoch nur hinreichendes — nicht notwendiges Kriterium für die Convergenz der gefundenen Reihe

$$f(x+k) = \Sigma\, a_m B_m(u) \equiv R$$

lässt sich wie folgt ableiten.

Es wird R ganz gewiss convergiren, wenn

$$R' \equiv \Sigma \mid a_m \mid \mathfrak{b}_m$$

wo $\mathfrak{b}_m$ das absolute Maximum von $B_m(u)$ innerhalb (0, 1) vorstellt, convergirt.

Für gerade m ist

$$\mathfrak{b}_m = |B_m(\tfrac{1}{2})| = \frac{2^m - 1}{2^{m-1}} B_{\frac{m}{8}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Für ungerade m ist $\mathfrak{b}_m$ zwar allgemein nicht bestimmbar, es lässt sich aber hiefür eine obere Grenze angeben.

Werden nämlich in den Punkten $u = 0$, $u = \frac{1}{2}$, Tangenten an das geometrische Bild von B_m (Schl. p. 216. Fig. 43, 44) gezogen, welche sich in dem Punkte M schneiden mögen, so ist seine Ordinate (absolut genommen)

$$\frac{m}{2} \frac{2^{m-2} - 1}{2^{m-1} - 1} B_{\frac{m-1}{2}} > \mathfrak{b}_m, \; m \text{ ungerade;}$$

nun ist

$$\tfrac{1}{2} > \frac{2^{m-2} - 1}{2^{m-1} - 1}$$

umsomehr

$$\frac{m}{4} B_{\frac{m-1}{2}} > \mathfrak{b}_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Wird jetzt in R' das erste Glied als unwesentlich ausgelassen, und für die $\mathfrak{b}_m$ (m gerade) ihre Werte, für jene mit ungeradem m der in letzterer Ungleichung linker Hand stehende Ausdruck ($m = 3, 5, 7 \ldots$) gesetzt, so entstehen zwei neue Reihen

$$r_1 = |a_2| \frac{2^2 - 1}{2^1} A_1 + |a_4| \frac{2^4 - 1}{2^3} B_2 + \ldots,$$

$$r_2 = |a_3| \tfrac{3}{4} B_1 + |a_5| \tfrac{5}{4} B_2 + \ldots,$$

wobei $R' - |a_1 > \mathfrak{b}_1 < r_1 + r_2$ ist.

Durch Vergleich derselben mit den Reihen

$$\frac{2^2-1}{2^1} B_1 \frac{x^2}{2!} + \frac{2^4-1}{2^3} B_2 \frac{x^4}{4!} + \ldots = \frac{x}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{4}, \quad -2\pi < \pi < +2\pi$$

$$3B_1 \frac{x_2}{2!} + 5B_2 \frac{x^4}{4!} + \ldots = 1 + \tfrac{1}{4} x^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} - x \cot \frac{x}{2},$$
$$-2\pi < x < +2\pi$$

ergiebt sich sodann die Tatsache, dass eine Reihe $\Sigma a_m B_m(u)$ zwischen $u = 0$ und $u = 1$ gewiss convergirt, wenn bei jedem geradem m

$$| a_m | < \frac{(2\pi)^m}{m!}$$

und bei ungeradem m

$$| a_m | < \frac{(2\pi)^{m-1}}{(m-1)!} \text{ ist.}$$

8. Convergenzgrenzen.

Wenn die Convergenz der für $f(x+k)$ gefundenen Reihe

$$R = \Sigma a_m B_m(u)$$

festgestellt ist, so lassen sich die Grenzen derselben von jenen ungleich leichter bestimmbaren $-g$ und $+g$ der Reihe

$$R = \sum_1 a_m u^m = \frac{1}{h} \int_0^x (f(x+h+k) - f(x+k))\, dx \quad \ldots\ldots (9)$$

in einfacher Weise ableiten.

Aus

$$B_m(u+k) = B_m(u) + m(u^{m-1} + \overline{u+1}^{m-1} + \ldots + \overline{u+k-1}^{m-1})$$

folgt, wenn $u+k$ so gewählt wird, dass

$$u+k-1 = g$$

d. h. der oberen Grenze von $\mathfrak{R}$ ist, sofort

$$u+k = g+1$$

als obere Grenze bezüglich R Zufolge

$$B_m(1+g) = (-1)^m B_m(-g) \quad \text{(Schl. p. 211. Formel 12)}$$

ist dann $-g$ die untere Grenze. Es gilt daher

> „Die Convergenzgrenzen einer als convergent befunde-
> „nen Reihe $\Sigma a_m B_m(u)$ sind $-g$ und $g+1$, wenn jene der
> „Reihe $\Sigma a_m u^m$ $-g$ und $+g$ sind."

Diese Untersuchung giebt aber noch weiter zu erkennen, dass notwendig Divergenz vorhanden ist, wenn sich

$$\int_0^x [f(x+h+k) - f(x+k)]\, dx$$

nicht nach **Mac' Laurin's** Satz entwickeln lässt.

Im bejahenden Falle folgt hieraus jedoch noch keineswegs die Convergenz der Reihe R.

4. Unbedingte Convergenz.

Werden die positiven und negativen Glieder von $B_m(u)$ zu je einer Gruppe

$$\mathfrak{B}_m'(u) = u^m + \binom{m}{2} B_1{}^{m-2} + \binom{m}{6} B_3 u^{m-6} + \cdot \;.\;.$$

$$= u^m + \frac{1-2^3}{4} m u^{m-1} + \tfrac{1}{2}(B_m(u) - (-i)^m B_m(iu)) \quad . \; . \; (10)$$

$$\mathfrak{B}_m''(u) = \frac{m}{2} u^{m-1} + \binom{m}{4} B_2 u^{m-4} + \binom{m}{8} B_4 u^{m-8} + \;.\;.\;.$$

$$= u^m + \frac{1-i}{4} m u^{m-1} - \tfrac{1}{2}(B_m(u) + (-i)^m B_m(iu)) \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

zusammengefasst, so ist

$$B_m = \mathfrak{B}_m' = \mathfrak{B}_m''$$

und das als convergent vorausgesetzte

$$R \equiv \Sigma a_m B_m = f(x+k)$$

nimmt hiefür die Form an

$$R = f(k) + R_1 - R_2, \quad \text{wo}$$

$$R_1 = \sum_1 a_m \mathfrak{B}_m' \quad \text{und} \quad R_2 = \sum_1 a_m \mathfrak{B}_m'' \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Da $\mathfrak{B}_m'$ und $\mathfrak{B}_m''$ nur positive Glieder enthalten, so sind sie im Gebiete des Positiven positive Functionen; sind dann auch noch sämtliche a_m positiv, so haben beide Reihen nur positive Glieder, werden daher unbedingt convergiren, folglich auch R, wenn sich $f(x+k) - f(k)$, dessen Entwickelbarkeit nach den Bernoulli-schen Functionen vorausgesetzt wird, derartig zerlegen lässt, dass die Bedingungen für die Entwickelbarkeit auch für die Teile erfüllt bleiben.

Die Entscheidung wird am einfachsten durch Summirung der R_1 und R_2 herbeigeführt.

Zufolge (2) und (12) ist

$$R_1 = \Delta\mathfrak{B}_1'(u) + \frac{h}{2!}\Delta_1\mathfrak{B}_2'(u) + \frac{h^2}{3!}\Delta_2\mathfrak{B}_3'(u) + \dots$$

$$= \Delta\left(u + \frac{1-i}{4}u^0 + \frac{B_1(u)+iB_1(iu)}{2}\right)$$

$$+ \frac{h}{2!}\Delta_1\left(u^2 + \frac{1-z'}{4}zu' + \frac{B_2(u)+B_2(iu)}{2}\right).$$

$$+ \frac{h^2}{3!}\Delta_2\left(u^3 + \frac{1-i}{4}3u^2 + \frac{B_3(u)-iB_2[iu)}{2}\right)$$

$$+ \frac{h^2}{4!}\Delta_3\left(u^4 + \frac{1-i}{4}4u^3 + \frac{B_4(u)-B_4(iu)}{1}\right)$$

. . . .

$$= \Delta u + \frac{h}{2!}\Delta_1 u^2 + \frac{h^2}{3!}\Delta_2 u^3 + \dots$$

$$+ \frac{1-i}{4}\left(\Delta u^0 + \frac{h}{1}\Delta_1 u^1 + \frac{h^2}{2!}\Delta_2 u^2 + \dots\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\Delta B_1(u) + \frac{h}{2!}\Delta_1 B_2(u) + \frac{h^2}{3!}\Delta^2 B_3(u) + \dots)$$

$$+ \tfrac{1}{2}(i\Delta B_1(iu) + \frac{h}{2!}\Delta_1 B_1(iu) - i\frac{h^3}{3!}\Delta_2 B_2(iu) - \frac{h^3}{4!}\Delta_3 B_4(iu) + \dots)$$

In dieser Form ist die Summiruug mit Hilfe des Taylor'schen Satzes und mittelst (2) ausführbar, und ergiebt

$$R_1 = \frac{1}{h}\int_0^x (f(x+h+k) - f(x+k)dx$$

$$+ \frac{1-i}{4}f(x+h+k) + \frac{1+i}{2}(f(x+k) - f(k)) \quad \dots\dots (13)$$

ebenso findet sich

$$R_2 = \frac{1}{h}\int_0^x (f(x+h+k) - f(x+k))dx +$$

Die Betrachtung dieser Ausdrücke führt nun unmittelbar zu dem wegen

$$B_m(u+1) = (-1)^m B_m(-u)$$

auch für negative Argumente gültigen Satze:

„Die für $f(x+k)$ gefundene convergente Reihe nach

„$B_m(u)$ ist sicher **unbedingt** convergent, wenn sämtliche „Coefficienten positiv sind, und

$$\int_0^x (f(x+h+k)-f(x+k))\,dx$$

„sich nach $B_m(u)$ entwickeln lässt."

Differentiirbarkeit.

Wird die für $f(x+k)$ sich ergebende als convergent vorausgesetzte Reihe

$$R \equiv f(k) + \Delta\,.\,B_1(u) + \frac{h}{2!}\Delta_1 B_2(u) + \frac{h^2}{3!}\Delta_2 B_3(u) + \ldots$$

mit Berücksichtigung von

$$D_z B_{2n}(z) = 2n B_{2n-1}(z), \quad n > 1,$$

$$D_z B_{2n+1}(z) = (2n+1)[B_{2n}(z) + (-1)^{n-1} B_n] \qquad \text{(Schl. p. 213; 18, 19)}$$

nach x differentiirt, so kommt, wenn mit h beiderseits multiplicirt und nach B und $\mathfrak{B}$ geordnet wird

$$h\frac{X}{dx}R = hR' = P + Q,$$

wo

$$P = \Delta + \frac{h}{1}\Delta_1 B_1(u) + \frac{h^2\Delta_2}{2!}B_2(u) + \frac{h^3\Delta_3}{3!}B_3(u) + \ldots$$

$$Q = -\frac{h}{2}\Delta_1 + \frac{h^2}{2!}\Delta_2 B_1 - \frac{h^4}{4!}\Delta_4 B_2 + - \ldots$$

Ist $f'(x+k) - f'(k)$ durch die B_m darstellbar, so ist zufolge (2)

$$P = \Delta + (f'(x+k) - f'(k))$$

Letztere Reihe ist mittelst (1) summirbar und giebt

$$Q = kf_1(k) - \Delta$$

wenn der Grenzwert des Restes, nämlich

$$\lim_{n=\infty}\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 B_{2n}(t) f^{(2n+1)}(k+ht)\,dt = 0$$

ist für unendlich zunehmende n.

In diesem Falle ist dann tatsächlich

$$R' = f'(x+k)$$

Das Ergebniss ist daher:

„Jene Reihe, welche durch gliedweises Differentiiren „der sich für die stetige, endliche differentiirbare Function $f(x+k)$ ergebende convergente Reihe nach den „B_m entsteht, hat nur dann $f(x+k)$ zur Summe, wenn „letzteres sich ebenfalls durch die B_m darstellen lässt „und ausserdem noch

$$\lim \frac{h^{2n}}{(2n)!}\int_0^1 B_{2n}(t)f^{(2n+1)}(k+ht)\,dt = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35)$$

„ist".

Beispiele.

a) $f(x) = x^m$

$$\Delta_r = r!\binom{m}{r}((k+h)^{m-r} - k^{m-r})$$

$$(x+k)^m = k^m + \frac{(k+h)^m - k^m}{1}B_1(u) + k\binom{m}{1}\frac{(k+h)^{m-1} - k^{m-1}}{2}B_2(u)$$

$$+ h^2\binom{m}{2}\frac{(k+h)^{m-2} - k^{m-2}}{3}B_3(u) + \ldots$$

$$+ h\binom{m}{m-1}\frac{(k+h) - k}{m}B_m(u)$$

Für

$$k = iq - 1, \quad q = \operatorname{tang}\varphi, \quad h = 2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

wird

$$\Delta_r = r!\binom{m}{r}((iq+1)^{m-r} - (iq-1)^{m-r})$$

$$= \begin{cases} 2ir!\binom{m}{r}P_{m-r}, \quad P_n = \dfrac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi}, \quad m-r \text{ gerade} \\[2ex] 2s!\binom{m}{r}Q_{m-r}, \quad Q_n = \dfrac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi}, \quad m-r \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$(x+iq-1)^m = (iq-1)^m + \frac{2^2}{2}\binom{m}{1} Q_{m-1} B_2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$+\frac{2^4}{4}\binom{m}{3} Q_{m-3} B_4\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots$$
$$+i\left(\frac{2}{1}\binom{m}{0} P_m B_1\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2^3}{3}\binom{m}{2} P_{m-2} B_3\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots\right)$$

m gerade

woraus, da für negative φ die P negativ und die Q positiv werden,

$$\frac{(x+iq-1)^m+(x-iq-1)^m}{2} = Q_m + \frac{2^2}{2}\binom{m}{1} Q_{m-1} B_2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$+\frac{2^4}{4}\binom{m}{3} Q_{m-3} B_4\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots$$

} *m* gerade . . . (17)

$$\frac{(x+iq-1)^m-(x-iq-1)^m}{2i} = P_m + \frac{2}{1}\binom{m}{0} P_m B_1\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$+\frac{2^3}{3}\binom{m}{2} P_{m-2} B_3\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots$$

ebenso findet sich

$$\frac{(x+iq-1)^m+(x-iq-1)^m}{2} = - Q_m + \frac{2}{1}\binom{m}{0} Q_m B_2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$+\frac{2^2}{3}\binom{m}{2} Q_{m-2} B_3\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots$$

} *m* ungerade . . . (18)

$$\frac{(x+iq-1)^m-(x-iq-1)^m}{2i} = P_m + \frac{2^2}{2}\binom{m}{1} P_{m-1} B_2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$+\frac{2^4}{4}\binom{m}{3} P_{m-3} B_4\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots$$

b) Kugelfunctionen erster Art.

$$P^n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} D_x{}^n (x^2-1)^n$$

$$D^r P^n(x)\}_0 = \begin{cases} \dfrac{-1)^{\frac{n-c}{2}} (n+r)!}{2^n \left(\frac{n-r}{2}\right)!\left(\frac{n+r}{2}\right)!}, & n-r \text{ gerade} \\ 0 & n-r \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$D_r P^n(x)\}_1 = \frac{(n+r)!}{r!\,(n-r)!\,2^r}$$

Für $k = 0$, $h = 1$ ist dann

$$P^{2n}(x) = B_1(x) + \frac{(2n+1)!}{1!\,2!\,(2n-1)!\,2^1} B_2(x) + \frac{(2n+2)!}{2!\,3!\,(2n-2)2^2} B_3(x) + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}} \left(\frac{B_1(x)}{(n!)^2} - \frac{(2n+2)!\,B_3(x)}{3!\,(n-1)!\,(n+1)!} \right.$$

$$\left. + \frac{(2n+4)!\,B_5(x)}{5!\,(n-2)!\,(n+2)!} - + \ldots \right) \quad \ldots (19)$$

$$P^{2n+1}(x) = B_1(x) + \frac{(2n+2)!}{1!\,2!\,9n!\,2^1} B_2(x) + \frac{(2n+3)!}{2!\,3!\,(2n-1)!\,2^2} B_3(x) + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+1}} \left(\frac{(2n+2)!}{2!\,n!\,(n+1)!} B_2(n) - \frac{(2n+4)!}{4!\,(n-1)!\,(n+2)!} B_4(x) \right.$$

$$\left. + \frac{(2n+6)!}{6!\,(n-2)!\,(n+3)!} B_6(x) - + \ldots \right) \quad \ldots\ldots (20)$$

c) Hermite'sche Polynome. (M. Hermite: Sur un nouveau développement en série des fonctions. C. R. T. LVIII. p. 93 et 266.)

$$(-1)^n U_n = (2x)^n - 2\binom{n}{2}(2x)^{n-2} + 3\,.\,4\binom{n}{4}(2x)^{n-4}$$

$$-4\,.\,5\,.\,6\binom{n}{6}(2x)^{n-6} + - \ldots$$

$$U_n(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$D^r U_n = (-1)^r 2^r \frac{n!}{(n-r)!} U_{n-r}$$

Das nicht weiter reducirbare $U_n(1)$ mit c_n bezeichnet und $k = 0$, $u = 1$ genommen, giebt wegen

$$\Delta_r = \begin{cases} (-1)^r 2^r \dfrac{n!}{(n-r)!} \left(C_{n-r} - (-1)^{\frac{n-r}{2}} \dfrac{(n-r)!}{\left(\frac{n-r}{2}\right)!} \right) & n-r \text{ gerade} \\ (-1)^r 2^r \dfrac{n!\,C_{n-r}}{(n-r)!}, & n-r \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(2n)!} U_{2n}(x) = \frac{C_{2n}}{(2n)!} B_1(x) - \frac{2^1 C_{2n-1}}{2!\,(2n-1)!} B_2(x) + \frac{2^2 C_{2n-2}}{3!\,(2n-2)!} B_3(x) - \ldots$$

$$+ (-1)^n \left(\frac{1}{n!} - \frac{2^0}{1!\,n!} B_1(x) + \frac{2^2}{3!\,(n-1)!} B_3(x) \right.$$

$$\left. - \frac{2^4}{5!\,(n-2)!} B_5(x) + - \ldots \right) \quad \ldots (21)$$

$$\frac{1}{(2n+1)!} U_{2n+1}(x) = \frac{C_{2n+1}}{(2n+1)!} B_1(x) - \frac{2^1 C_{2n}}{2!(2n)!} B_2(x)$$

$$+ \frac{2^2 C_{2n-1}}{3!(2n-2)!} B_3(x) - \dots$$

$$+(-1)^n \left(\frac{2^1}{2!\,n!} B_2(x) - \frac{2^3}{4!\,(n-1)!} B_4(x) \right.$$

$$\left. + \frac{2^5}{6!\,(n-2)!} B_6(x) - \dots \right) \dots\dots \quad (22)$$

d) Exponentialfunctionen.

$$f(x) = e^x, \quad h - 0, \quad \Delta_r = e^h - 1$$

$$\frac{e^x - 1}{e^h - 1} = \frac{h^0}{1!} B_1(u) + \frac{h^1}{2!} B_2(u) + \frac{h^2}{3!} B_3(u) + \dots \quad (23)$$

Da hier

$$| a_m | = \frac{h^{m-1}}{m!} < \frac{(2\pi)^m}{m!}$$

z. B. durch die Annahme $h = \log 2$, wofür linker Hand $e^x - 1$ entsteht, erfüllt wird, so convergirt die erhaltene Reihe sicher zwischen 0 und $\log 2$; ihre Convergenzgrenzen sind, da

$$\Sigma a_m u^m = \frac{1}{h} e^{\frac{x}{h}}$$

also für jeden x-Wert gültig ist, $-\infty$ und $+\infty$.

Wird dieselbe mit der für $|h| < 2\pi$ convergirenden Reihe für $\frac{h}{e^h - 1}$ multiplicirt und wieder nach Potenzen von h geordnet, so ist das Resultat von dem in (23) erhaltenen bis auf den Factor h nicht verschieden, woraus geschlossen werden kann, dass die Grenzen letzterer Reihe $-2\pi < h < +2\pi$ und $-\infty < x < +\infty$ sind. Dasselbe gilt für die durch algebraische Addition und Multiplication aus e^x hervorgehenden Functionen. Z. B, $\sin x$, $\cos x$, $e^{ax} \sin bx$ etc. Es ist ferner

$$\cos(x+k) = \cos k + (\cos(k+h) - \cos k) \left(B_1(u) + \frac{h^2}{3!} B_3(u) + \dots \right)$$

$$+ (\sin(k+h) - \sin k) \left(\frac{h}{2!} B_2(u) + \frac{h^3}{4!} B_4(u) + \dots \right) \quad (24)$$

woraus durch Differentiation nach k

wo a und m beliebig, n und r positiv ganzzahlig ist, gewählt, so ist derselbe

$$= \begin{cases} 0, & 0 \leq r < n \\ m^n n!, & r = n \\ > 0, & r > n \end{cases}$$

$$\text{ferner} = (n+1)!\, m^n \left(a + \frac{mn}{2}\right) \quad \text{für} \quad r = n+1$$

Für

$$m = 1, \quad d = 0$$

geht er über in den Ausdruck

$$n^r - \binom{n}{1}(n-1)^r + \binom{n}{2}(n-2)^r \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} 1^r$$

welcher in der von R. Hoppe begründeten „Theorie der höheren Differentialquotienten" als Coefficient eine wichtige Rolle spielt.

2. Um einige Eigenschaften des Polynoms (1) kennen zu lernen, werde zunächst $-a$ an Stelle von $+a$ gesetzt und eine ganze positive Zahl p unter der Bedingung

$$\overline{p+1}\, m > a$$
$$pm < a$$

eingeführt, so dass

$$(mn-a)^r - \binom{n}{1}(m\overline{n-1} - a)^r + \binom{n}{2}(m\overline{n-2} - a)^r \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-p-1}\binom{n}{n-p-1}(m\overline{p+1} - a)^r$$
$$+ (-1)^r \left\{ (-1)^{n-p}\binom{n}{n-p}(a-mp)^r \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(a-m)^r + (-1)^n\binom{n}{n} a^r \right\} \quad \ldots (2)$$

entsteht, woraus für

$$a - pm = d$$

und

$$r < n$$

$$(mp+d)^r-\binom{n}{1}(\overline{mp-1+d})^r+\binom{n}{2}(\overline{mp-2}+d)^r\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{p-1}\binom{n}{p-1}(m+d)^r+(-1)^p\binom{n}{p}d^r$$

$$=(-1)^{r+n+1}\left\{(\overline{n-p})m-d)^r-\binom{n}{1}(\overline{n-p-m-d})^r\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{n-p-1}\binom{n}{n-p-1}(m-d)^r\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

hervorgeht.

Dieser Relation kann, wenn der linksseitige Teil mit

$$\overset{n,r}{\underset{p,d}{\mathfrak{L}}}$$

bezeichnet wird, noch die Form

$$\overset{n,r}{\underset{p,d}{\mathfrak{L}}}=(-1)^{n+r+1}\overset{n,r}{\underset{n-p-1,\ n-d}{\mathfrak{L}}}\qquad(4)$$

oder

$$\overset{n,r}{\underset{p,d}{\mathfrak{L}}}=(-1)^{n+r+1}\overset{n,r}{\underset{n-p,\ -d}{\mathfrak{L}}}+(-1)^{n+pr}d\qquad(5)$$

$$r<n$$

gegeben werden.

Der Bedingung $r<n$ wird durch Vertauschung von n mit $n+1$ und von r mit n entsprochen, wofür $\overset{n,r}{\underset{p,d}{\mathfrak{L}}}$ in den Coefficienten $\overset{n+1}{\underset{p,d}{\mathfrak{L}}}$ übergeht, welcher in der vom Verfasser in seiner Abhandlung „Nullwerte höherer Differentialquotienten gewisser, „zusammengesetzter Functionen". (Archiv, 2. Reihe, T. XI p. 62 ff.) gegebenen Summenformel Nr. 106 *) erscheint.

Zufolge (5) ist für $d=0$

$$\overset{n+1}{\underset{p,0}{\mathfrak{L}}}=\overset{n+1}{\underset{n-p,0}{\mathfrak{L}}}\qquad(6)$$

d. h. in dem unter dem Zeichen Σ in [106] stehenden Polynome sind für $d=0$ die Coefficienten gleich weit von den Enden abstehender Glieder einander gleich.

---

*) $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu m+d}(\nu m+d)^n=\frac{d}{(1-z^m)^{n+1}}\sum_{p=0}^{p=n}\overset{n+1}{\underset{p,d}{\mathfrak{L}}}\,.\,z^{mp}$.

3. Da (1) für alle r von $r = 0$ bis $r = n-1$ verschwindet, so muss, wenn $g(x)$ eine **ganze rationale** Function $(n-1)$ten Grades vorstellt, für dieselben r-Werte auch die Identität

$$g(mn+a)-\binom{n}{1}g(\overline{mn-1}+a)+\binom{n}{2}g(\overline{mn-2}+a)\;.\;.\;.$$

$$.\;.\;.+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}g(m+a)+(-1)^{n}\binom{n}{n}g(a)=0\;.\;.\;.\;.\;(7)$$

bestehen, welche identisch ist der zwischen den $n+1$ Elementen

$$u_0,\; u_1,\; u_2,\; .\;.\;.\;,\; u_n$$

einer **arithmetischen Reihe** von **höchstens** $(n-1)$-ter Ordnung geltenden.

Denn da

$$\Delta^r \mu_0 = u_0-\binom{n}{1}u_1+\binom{n}{2}u_2\;.\;.\;.+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}u_{n-1}+$$

$$+(-1)^n\binom{n}{n}u_n\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(8)$$

wo

$$\Delta^r \mu_m = \Delta^{r-1}u_{m-1}-\Delta^{r-1}u_m$$

das **erste** Glied der $r$ten **Differenzenreihe** in üblicher Weise bezeichnet und an Stelle obiger Elemente auch $u_i,\; u_{i+1},\;.\;.\;u_{i+n}$ treten können, so verschwindet das linksseitige $\Delta^r u_0$ für alle $r<n$. Wird der linksseitige Ausdruck in (8) durch „$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$" dargestellt, so gilt daher

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{cases} 0, & r<n \\ >0, & r>n \\ a_r n!\, m^n, & r=n \end{cases}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(9)$$

wo a_r den Coefficienten von x^r in der die arithmetische Reihe erzeugenden Function $g(mx)$ bedeutet.

Ein bemerkenswerter Fall ist

$$g(x) = x^{r-1}-1$$

wofür aus (7), wenn durch r dividirt wird, eine Summe von Ausdrücken von der Form

$$\pm\binom{n}{q}\frac{q^{r-1}-1}{r}$$

hervorgeht, welche nur für gegen r teilerfremde q ganze Zahlen sind. Hieraus folgt aber, dass

$$\sum_{\lambda=1, 2, 3, \ldots} (-1)^{n-\lambda r} \binom{n}{\lambda r} \frac{(\lambda r)^{r-1} - 1}{r} + \frac{(-1)^{n-1}}{r}$$

unter der Voraussetzung

$$0 \leqq r < n$$

eine ganze Zahl zur Summe hat.

4. Die Identität (9) für $n+1$ verschiedene arithmetische Reihen $u_{i0}, u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, von höchstens $(n-1)$-ter Ordnung in Anspruch genommen, liefert $n+1$ Gleichungen, aus welchen für

$$0 \leqq r < n$$

durch Elimination der Binominalcoefficienten die weitere Identität

$$\Sigma \pm u_{00} u_{11} u_{22} \ldots u_{nn} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

hervorgeht.

Zu demselben Resultate gelangt Herr Dr. F. J. Studnička in seinem Aufsatze „Neuer Beitrag zur Theorie der Determinanten“ (Prager Bericht, 1896, VI.) mittels des verallgemeinerten Hankelschen Satzes (Siehe Baltzer, Determ. 1875. § 3. 13), wonach eine Determinante unverändert bleibt, wenn an Stelle der Elemente die Anfangsglieder ihrer Differenzienreihen gesetzt werden.

Herr Dr. F. J. Studnička stellt obige Tatsache (10) als einen besonderen Fall des weit allgemeineren Satzes hin: „Eine Determinante $n$ten Grades hat den Wert null, wenn die Elemente von h Zeilen oder Colonnen arithmetische Reihen von höchstens $(h-2)$ter Ordnung vorstellen“ — welcher mit Hilfe eines neuen Determinantensatzes (Dr. F. J. Studnička: „Ueber eine neue Determinantentransformation“, Prag. Ber. 1873) bewiesen wird.

Der Beweis lässt sich übrigens auch mittels allgemein bekannter einfacherer Determinanten-Eigenschaften wie folgt erbringen.

Sei $p(< n)$ die Ordnungszahl der die Elemente von h Zeilen repräsentirenden Reihen, so besteht zufolge (9):

$$u_{ik} - \binom{p+1}{1} u_{i,k+1} + \binom{p+1}{2} u_{i,k+2} \ldots + (-1)^{p+1} \binom{p+1}{p+1} u_{i,k+p+1} = 0 \ldots (11)$$

$$i = 0, 1, \ldots h$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-p-1$$

Wird nun von je einer Colonne, von der 0ten bis zur $(n-p-2)$ ten, die $\binom{p+1}{2}$-fache zweitnächste addirt etc., so verschwinden gemäss der Identität (11) in diesen h Zeilen $n-p-1$ Colonnen.

Die die Determinante ungeändert lassende Vertauschung ihrer Elemente mit den Anfangsgliedern ihrer Differenzenreihen ergiebt wegen

$$\Delta^{p+1} = \Delta^{p+2} = \ldots = \Delta^{n-1} = 0$$

dasselbe.

Nach dem Jacobi'schen Satze (Determ., 5): „Wenn ein System in h Zeichen mehr als $n-k$ Colonnen null hat, so ist seine Determinante null", wird die transformirte Determinante aber verschwinden, wenn

$$n-p-1 > n-h$$

oder

$$p < h-1$$

ist, womit obiger Satz bewiesen erscheint.

5. Abstrahirt man von der ursprünglichen Bedeutung der Grösse r als Wiederholungsexponent und ersetzt sie durch die jeder Werte fähigen Veränderlichen x, so stellt

$$(mn+a)^x - \binom{n}{1}(m\overline{n-1}+a)^x + \binom{n}{2}(m\overline{n-2}+a)^x \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(m+a)^x + (-1)^n \binom{n}{n} a^x \equiv \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}$$

eine holomorphe Function von x dar, von welcher bekannt ist, dass die Werte $x = 1$, $x = 2, \ldots, x = n-1$ Wurzeln derselben sind. Von der Beschaffenheit etwaiger anderer reeller Wurzeln lässt sich nur so viel behaupten, dass dieselben nicht von der Form

$$\frac{p}{q}$$

sind, wo p, q endlich und teilerfremd sind. Hieraus folgt aber, dass

$$\left[\frac{n}{\frac{n}{r}}\right] = \begin{cases} 0, & r\,(>1) \text{ Teiler von } n \\ \gtrless 0, & n \text{ und } r \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Dem Wilson'schen Satze zufolge ist $(p-1)!+1$ nur dann durch p teilbar, wenn p eine Primzahl ist, mithin ist

$$\left[\frac{(p-1)!}{\frac{(p-1)!+1}{p}}\right] = \begin{cases} 0, & p \text{ Primzahl} > r \\ \gtrless 0, & p \text{ zusammengesetzt} \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

denn $[(p-1)!+1]:p$ ist für alle $p>2$ kleiner als $(p-1)!$.

6. Mit Hilfe der Identität (9) kann noch eine mannigfaltige Reihe von Discontinuitätsfactoren construirt werden, unter welchen die nachfolgenden die bemerkenswertesten sein dürften.

a)
$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix}' = \begin{cases} 0, & n \gtrless r \\ a_r b_r (r!)^2, & n = r \end{cases} \quad \ldots (13)$$

wo der Accent andeuten soll, dass den Ausdrücken $\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$ verschiedene arithmetische Reihen zu Grunde liegen, und a_r, b_r die Coefficienten der höchsten Potenzen der diese Reihen erzeugenden ganzen Function $g(x)$ sind $(m=1)$.

b)
$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = \begin{cases} 0, & r < n \text{ oder } n < s \\ \gtrless 0, & r > n \text{ und } n > s \end{cases} \quad (14)$$

c)
$$\frac{\begin{bmatrix} a \\ r \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} b \\ r \end{bmatrix}} = \begin{cases} 0, & b-1 < r < a \\ \gtrless 0, & r < b-1 \text{ und } r > a \end{cases} \quad \ldots (15)$$

d)
$$\left\{\left[\frac{n}{r}\right]\right\}^{\begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix}'} = \begin{cases} 0, & r < n \\ 1, & r > n \\ (a_r r!)^{b_r r!}, & r = n \end{cases} \quad \ldots (16)$$

e) $$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a\\2b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2b\\a\end{bmatrix}\cdot\cdot\cdot+\begin{bmatrix}a\\(a-1)b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(a-1)b\\a\end{bmatrix}\equiv\begin{Bmatrix}a\\b\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{cases}0, & b \text{ in } a \text{ nicht enthalten}\\ a_a b_a (a!)^2 & a \text{ ein Vielfaches von } b\end{cases} \qquad (17)$$

wo a_r, b_r wieder obige Bedeutung haben.

f) $$\frac{1}{a_1'b_1'}\begin{Bmatrix}1\\q\end{Bmatrix}+\frac{1}{a_2''b_2''(2!)^2}\begin{Bmatrix}2\\q\end{Bmatrix}\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{a_p^{(p)}b_p^{(p)}(p!)^2}\begin{Bmatrix}p\\q\end{Bmatrix}$$

$$=E\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\cdot \qquad (18)$$

„grösstes Ganze"

g) $$\sum_{\lambda=1,2,\ldots}^{z}\frac{1}{a_\lambda^{(\lambda)}b_\lambda^{(\lambda)}(\lambda!)^2}\begin{Bmatrix}z\\\lambda\end{Bmatrix}\lambda^s=$$

„Summe der *s*ten Potenzen der Teiler von *z*"

$\ldots (19)$

s beliebig reell oder imaginär.

für $s=1$: Anzahl der Teiler von *z*

h) Sei $a_\lambda^{(\lambda)} < b_\lambda^{(\lambda)} = 1.\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots$

dann ist die Summe der *s*ten Potenzen aller Teiler von *z*, welche *k* nicht übertreffen,

$$=\sum_{\lambda=1,2,\ldots}^{k}\frac{1}{(\lambda!)^2}\begin{Bmatrix}z\\\lambda\end{Bmatrix}\left[\frac{1}{\lambda!}\begin{bmatrix}\lambda\\k\end{bmatrix}\right]^{\frac{1}{\lambda!}\begin{bmatrix}k\\\lambda\end{bmatrix}}\lambda^s\ldots\ldots\ldots \qquad (20)$$

i) Sind *n*, *p* und *q* ganze Zahlen, so ist

$$1-\frac{1}{(p!)^2(q!)^2}\begin{Bmatrix}p\\n\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}q\\n\end{Bmatrix}\begin{cases}0, \text{ wenn } n \text{ in } p \text{ und } q \text{ enthalten ist}. \quad (21)\\ 1, \text{ wenn } n \text{ nur in einer der beiden oder in keiner enthalten ist,}\end{cases}$$

folglich, wenn $p < q$

$$\prod_{n=2}^{p}\left[1-\frac{1}{(p!)^2(q!)^2}\begin{Bmatrix}p\\n\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}q\\n\end{Bmatrix}\right]=\begin{cases}0, \text{ wenn } p \text{ und } q \text{ teilerfremd} \quad \ldots (22)\\ 1, \text{ wenn } p \text{ und } q \text{ ein von 1 verschiedenes gemeinschaftliches Mass besitzen}\end{cases}$$

k) Anzahl der zu q relativen Primzahlen

$$= \sum_{p=2}^{q-1} \left\{ 1 - \prod_{n=2}^{p} \left[1 - \frac{1}{(p!)^2 (q!)^2} \begin{Bmatrix} p \\ n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ n \end{Bmatrix} \right] \right\} \quad \ldots \ldots (23)$$

l) $$\prod_{\lambda=2}^{q-1} \prod_{\mu=2}^{\lambda} \left[1 - \frac{1}{(\lambda!)^2 (q!)^2} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \mu \end{Bmatrix} \right] = \begin{cases} 0, & q \text{ Primzahl} \\ 1, & q \text{ zusammengesetzt} \end{cases} \quad \ldots (24)$$

m) $$\sum_{\nu=2}^{z} \left\{ 1 - \prod_{\lambda=2}^{\nu-1} \prod_{\mu=2}^{\lambda} \left[1 - \frac{1}{(\lambda!)^2 (\nu!)^2} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu \\ \mu \end{Bmatrix} \right] \right\} \nu^s + 1 \quad \ldots (25)$$

= Summe der $s$ten Potenzen aller Primzahlen $\leqq z$;

$s = 0$: Anzahl der Primzahlen $\leqq z$.

Barmen im Juni 1897.

XVII.

Potenzschliesser.

Von

Dr. **Alfred Hauke** in Wien.

Jede positiv-ganze Wurzel ${}^{s}{}_{m}z_r$ der Gleichung

$$(1_a)\qquad z_r^m = ks^r + z_r$$

in welcher $s-1$, $m-1$ und r positiv-ganz gegeben sind, heisse r ziffriger Schliesser $m$ter Potenz oder auch $m$ter Potenzschliesser in s. Bei Zugrundelegung des Basissystems s bilden nämlich die Schlussziffern von z_r^m die r ziffrige Zahl z_r oder schliesst z_r die $m$te Potenz.

Die trivialen Lösungen ${}_0z_1 = 0$ und ${}_1z$ = beliebig sind ausgeschlossen. (1_a) ist also identisch mit der Gleichung

$$(1_b)\qquad z_r(z_r-1)(z_r^{m-2} + z_r^{m-3} + \ldots + 1) = ks^r$$

Aus (1) folgt unmittelbar

$$(2)\qquad {}_mz_r^{(m-1)n+1} = ks^r + {}_mz_r$$

[n positiv-ganz] d. h. $m$te Potenzschliesser sind auch $[(m-1)n+1]$te in s. Z. B. schliessen 2te Potenzschliesser jede, 3te jede ungerade Potenz in s.

Die Substitution in (1) ergibt die Richtigkeit der Gleichung

$$(3)\qquad {}_mz_r = \zeta_\varrho s^{r-\varrho} + {}_mz_{r-\varrho}$$

[ϱ und $r-\varrho$ Zifferanzahlen] d. h. Zahlen, welche aus z_s durch Weglassen einer beliebigen Anzahl Ziffern von links an entstehen, schliessen

mit diesem dieselben Potenzen. Da ζ_1 nicht mehr Werte annehmen kann, so hat man die einem $\underset{m}{\varrho} z$ entsprechenden $\underset{m}{{}^s\varphi_r}$ nur unter s Werten zu suchen.

Im folgenden sind die $s\lambda$ in

$$s = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots s_n$$

als zu einander teilerfremd und in $\frac{k\lambda\, s\lambda r}{n}$ n als positiv-ganz, zu $k\lambda$ teilerfremd und als Factor von $s\lambda$ vorausgesetzt.

Die Wurzeln von

$$_2(1) \quad z_r(z_r - 1) = ks^r \quad \text{sind} \quad {}_2z_r = k_1 s_2{}^r + 1$$

Wie sich apagogisch leicht zeigen lässt, existiren ausser den selbstverständlichen ${}_2z_1 = 0$ und 1 nur 2 Wurzeln ${}_{s_2}z_r$ und ${}_{s}z_r'$ die in der Beziehung

$$s_2(z) \quad {}_{s_2}z_r + {}_{s_2}{}' z_r = s^r + 1 \quad \text{stehen.}$$

Für das dekadische System $s = 2 \cdot 5$ sind die

$$^{10}{}_2z = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \ldots 92256259918212890625 \\ \ldots 07743740081787109376 \end{cases}$$

Die Wurzeln von

$$_3(1)\, z_r(z_r - 1)(z_r + 1) = k s^r \quad \text{sind nebst den } {}^s{}_2z_r$$

$$_{s_3}z_r = \begin{cases} s^r = 1 \\ {}^s{}_2z_r - 1 \\ k_1 s_1{}^r + 1 = k_2 s_2{}^r - 1 \quad \text{ungerade: } (2_2 z_r - 1)_r, \text{ d. h. die Klammergrösse ohne eventuell } r + 1\text{te Ziffer gerade existiren nur für ungerade } s. \\ k_1 s_1{}^r = k_2 s_2{}^r + 1 = k_3 s_3{}^r - 1 \end{cases}$$

für gerade st kommen hinzu noch die ungeraden

$$2t_3z_k = \begin{cases} \frac{s^r}{2} \pm 1 \\ k_1 s_1^r = k_2 \frac{s_2^r}{2} \pm 1 \\ 2k_1 s_1^r \pm 1 = k_2 \frac{s_2^r}{2} \mp 1 \\ k_1 s_1^r = k_2 \frac{s_2^r}{2} \pm 1 = 2k_3 s_3^r \mp 1 \end{cases}$$

welche aus den entsprechenden ${}_s z^s$ durch Addition resp. Subtraction von $\frac{s^r}{2}$ entstehen, wobei natürlich bloss eine Operationen durchführbar ist.

Es sind demnach sämtliche

$$^{10}{}_3z = \begin{cases} \ldots \dot{0}0000000000000000001 \\ \ldots \dot{9}9999999999999999999 \\ \ldots 92256259918212890625 \\ \ldots 07743740081787109375 \\ \ldots 84512519836425781249 \\ \ldots 15487480163574218751 \\ \ldots 07743740081787109376 \\ \ldots 92256259918212890624 \\ 0 \end{cases}$$

5 zur höchsten Stelle addirt resp. subtrahirt, liefert die ${}^{25}{}_3z_r$

Die allgemeine Beziehung zwischen je zwei ${}^s{}_3z_r$

$$^s{}_3(z)_r \; {}^s{}_3z_r + {}^s{}_3z'_r = s^r$$

wird durch diese Anordnung illustrirt.

$${}_4(1) z_r(z_r - 1)(z_r^2 + z_v + 1) = ks^r$$ liefert nebst den ${}^s{}_2x_r$

$$s_4z_r = \begin{cases} [r^s] \\ k_1 s_1^r = k_2 s_2^r + 1 = [r^v{}_3] \\ k_1 s_1^r + 1 = [r s_2] \\ k_1 s_1^r = [ks_2] \end{cases}$$

wobei symbolisch $\frac{\sqrt{4k^\lambda s^k \lambda - 3} - 1}{2} = [r^s \lambda]$

$s_0 = s$ und $k\lambda s\lambda$ ungerade ist, und

${}^{3t}z_r$ von der Form $3n+1$ von denen

$$k_1 s_1^r = \frac{k_2 s_2^r}{3} + 1$$

hervorgehoben sei. Die übrigen enthalten statt $s\lambda^r$ unter dem Wur-

zelzeichen $3s_\lambda{}^r$ resp. $\frac{s\lambda^r}{:3}$ und könnten $[{}_r{}^3s_\lambda]$ resp. $[r^{\frac{1}{3}}{}_{r}s_\lambda]$ bezeichnet werden.

Da 7 kein Quadrat schliesst, sind alle

$$^{10}{}_4z_r \equiv {}^{10}{}_2z_r$$

Von

$$5^{(1)}\, z_r(z_r - 1)(z_r + 1)(z^2 + 1) = k s^r$$

sei nur erwähnt, dass jede einziffrige Zahl ${}^0{}_5z_1$ ist.

Mit wachsendem m nimmt der grösstmögliche gemeinsame Teiler $\varrho = m - 1$ des 2. und 3. Factors von (1_b), der Grad des 3. und im allgemeinen die Anzahl von dessen Teilfactoren zu, wodurch Complicationen eintreten.

Anderseits schwindet mit der Anschaulichkeit wol auch jedes allgemeinere Interesse für höhere Potenzschliesser.

XIX.

Ueber hyperboloidische Gerade, die sich aus einem Tetraeder und einer Fläche 2. Ordnung ableiten lassen.

Von

Dr. **Karl Doehlemann**
in München.

---

1) Irgend vier Gerade a, b, c, d, welche der Reihe nach durch die Ecken A, B, C, D des Fundamental-Tetraeders gehen, seien gegeben durch die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{array}{cccc} \times & \dfrac{x_2}{a_{12}} & = \dfrac{x_3}{a_{13}} & = \dfrac{x}{a_{14}} \\[2ex] \dfrac{x_1}{a_{21}} & \times & = \dfrac{x_3}{a_{23}} & = \dfrac{x_4}{a_{24}} \\[2ex] \dfrac{x_1}{a_{31}} = & \dfrac{x_2}{a_{32}} & \times & = \dfrac{x_4}{a_{34}} \\[2ex] \dfrac{x_1}{a_{41}} = & \dfrac{x_2}{a_{42}} & = \dfrac{x_3}{a_{43}} & \times \end{array}$$

Dann gehören diese der gleichen Regelschaar eines Hyperboloids an oder haben „hyperboloidische Lage“, wenn, wie Hermes (Crelle Bd. 56) gezeigt hat,

$$(2)\qquad a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

Schneiden sich zwei von vier solchen Geraden z. B. a und b, so muss die Ebene durch a und durch die Tetraederkante AB identisch sein mit der Ebene durch b und die gleiche Kante. Dies liefert sofort die Bedingung

$$a_{14}\, a_{23} - a_{24}\, a_{13} = 0 \tag{3}$$

Das Verschwinden dieser Determinante ist aber gleichzeitig die Bedingung dafür, dass sich auch die Geraden c und d begegnen.

Wenn also von vier hyperboloidischen Geraden irgend zwei sich begegnen, so tun dies auch die beiden anderen Geraden. Schneiden sich überdies noch a und c, ist also auch

$$a_{12}\, a_{34} - a_{32}\, a_{14} = 0 \tag{4}$$

so folgt aus (3) und (4) sofort

$$a_{24}\, a_{13} - a_{12}\, a_{34} = 0 \tag{5}$$

Diess ist die Bedingung dafür, dass sich b und c (oder a und d) schneiden. Wenn also die Bedingungen (3) und (4) erfüllt sind, so schneiden sich die 4 hyperboloidischen Geraden in einem Punkte. —

Sind endlich vier Gerade in den Coordinaten-Ebenen der Reihe nach gegeben durch:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, \quad \times \quad \frac{x_2}{b_{12}} + \frac{x_3}{b_{13}} + \frac{x_4}{b_{14}} = 0 \\
x_2 &= 0, \quad \frac{x_1}{b_{21}} \quad \times + \frac{x_3}{b_{23}} + \frac{x_4}{b_{24}} = 0 \\
x_3 &= 0, \quad \frac{x_1}{b_{31}} + \frac{x_2}{b_{32}} + \times \quad \frac{x_4}{b_{34}} = 0 \\
x_4 &= 0, \quad \frac{x_1}{b_{41}} + \frac{x_2}{b_{42}} + \frac{x_3}{b_{43}} \quad \times \quad = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

so liegen diese, wieder nach Hermes (l. c.), hyperboloidisch, wenn

$$b_{ik} = b_{ki}, \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 2,\ 4) \tag{7}$$

Es soll nun folgender Satz bewiesen werden:

„Gegeben sind ein Tetraeder $ABCD$ und eine Fläche 2. Classe f. Greift man eine Tetraederfläche z. B. ABC heraus und legt durch jede ihrer Kanten je eine Ebene, welche mit den durch die Kanten an die Fläche gehenden Tangentialebenen und mit der Tetraederfläche ein bestimmtes, übrigens ganz beliebiges Doppelverhältniss bilden, so schneiden sich diese drei Ebenen in einem Punkte D'. Auf gleiche Weise findet man unter Beibehaltung des für das Doppel-

verhältniss gewählten Wertes die Punkte A', B', C'. Dann haben die Verbindungslinien AA', BB', CC', DD' hyperboloidische Lage."

Der dual entsprechende Satz für die Fläche 2. Ordg. ist leicht zu formuliren. Aus diesen beiden Sätzen werden sich geometrische Deutungen ergeben für hyperboloidische Quadrupel, die allgemein durch die Gleichungen (1) oder (6) gegeben sind. Ferner wird der bekannte Steiner'sche Satz, dass die Höhen eines Tetraeders hyperboloidische Lage haben (Crelle Bd. 2), als ein ganz specieller Fall des ersten Satzes erscheinen.

2) Ist die Fläche 2. Classe gegeben durch

$$f = \Sigma a_{ik} u_i u_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

und wird das gegebene Tetraeder als Fundamentaltetraeder gewählt, so ist z. B. für die Tangentialebenen durch die Kante AB

$$\frac{u_3}{u_4} = \frac{-a_{34} \pm A_{34}}{a_{33}}$$

wobei

$$A_{34} = +\sqrt{a_{34}^2 - a_{33} a_{44}}$$

Bezeichnen wir den dem positiven Vorzeichen entsprechenden Wert mit λ_1, den andern Wert mit λ_2. Dann ist eine Ebene

$$x_4 - \mu_3 x_3 = 0$$

zu bestimmen, so dass sie mit den Ebenen

$$x_4 + \lambda_1 x_3 = 0$$
$$x_4 + \lambda_2 x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$

das beliebige Doppelverhältniss α bildet. Es ergibt sich leicht

$$\mu_3 = \frac{a_{44}(\alpha - 1)}{a_{34}(\alpha - 1) + A_{34}(\alpha + 1)}$$

Für die Ebenen

$$x_4 - \mu_1 x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_4 - \mu_2 x_2 = 0$$

durch BC und CA erhält man ebenso:

$$\mu_1 = \frac{a_{44}(\alpha - 1)}{a_{13}(\alpha - 1) + A_{14}(\alpha + 1)} \quad \text{und}$$

$$\mu_2 = \frac{a_{44}(\alpha - 1)}{a_{24}(\alpha - 1) + A_{14}(\alpha + 1)}$$

Der Punkt D' als Schnittpunkt dieser drei Ebenen hat dann die Coordinaten

$$x_1' : x_2' : x_3' = \{a_{14}(\alpha-1)+A_{14}(\alpha+1)\} : \{a_{24}(\alpha-1)+A_{24}(\alpha+1)\} : \{a_{34}(\alpha-1)+A_{34}(\alpha+1)\}$$

Für die Verbindungslinien AA', BB', CC', DD' erhalten wir also die Gleichungen:

$$
\begin{array}{cccc}
\times & \dfrac{x_2}{a_{12}(\alpha-1)+A_{12}(\alpha+1)} & = \dfrac{x_3}{a_{13}(\alpha-1)+A_{13}(\alpha+1)} & = \dfrac{x_4}{a_{14}(\alpha-1)+A_{14}(\alpha+1)} \\[2ex]
\dfrac{x_1}{a_{21}(\alpha-1)+A_{21}(\alpha+1)} & \times & = \dfrac{x_3}{a_{23}(\alpha-1)+A_{23}(\alpha+1)} & = \dfrac{x_4}{a_{24}(\alpha-1)+A_{24}(\alpha+1)} \\[2ex]
\dfrac{x_1}{a_{31}(\alpha-1)+A_{31}(\alpha+1)} & = \dfrac{x_2}{a_{32}(\alpha-1)+A_{32}(\alpha+1)} & \times & = \dfrac{x_4}{a_{34}(\alpha-1)+A_{34}(\alpha+1)} \\[2ex]
\dfrac{x_1}{a_{41}(\alpha-1)+A_{41}(\alpha+1)} & = \dfrac{x_2}{a_{42}(\alpha-1)+A_{42}(\alpha+1)} & = \dfrac{x_3}{a_{43}(\alpha-1)+A_{43}(\alpha+1)} & \times
\end{array}
\tag{8}
$$

Da die Bedingung (2) sichtlich erfüllt ist, so sind dies in der Tat vier hyperboloidische Gerade.

Lässt man α variiren, so rücken die Punkte A', B', C', D' je auf bestimmten Geraden fort. Auf diesen liegen auch die Schnittpunkte von je drei einander zugewiesenen Tangentialebenen. Die drei Ebenenbüschel, welche für jede Tetraederfläche construirt werden, sind perspectiv zu diesen Geraden.

3) Bei dieser Ableitung wurden stillschweigend immer diejenigen Tangentialebenen in den Doppelverhältnissen einander zugewiesen, welche den gleichen Vorzeichen der Grössen A_{ik} entsprechen. Das ist aber nicht notwendig. Wir müssen also noch die andern Zuordnungen untersuchen, für welche der Satz seine Giltigkeit behält.

Man kann z. B. von den zwei durch BC gehenden Tangentialebenen die dem n e g a t i v e n Quadratwurzel-Vorzeichen entsprechenden

den Ebenen durch AB und CA zuweisen, die zu dem positiven Vorzeichen gehören. Die Ebene wird dann

$$x_4 - \mu_1' x_1 = 0$$

wobei aber jetzt

$$\mu_1' = \frac{a_{44}(\alpha - 1)}{a_{14}(a-1) - A_{14}(\alpha + 1)}$$

In den drei ersten Coordinaten des Punktes D' von 2) ändert sich folglich blos das Vorzeichen von A_{14}. Um aber jetzt wieder ein symmetrisches System von Coefficienten zu erhalten gemäss der Bedingung (2), muss in den Gleichungen (8) auch in der ersten Zeile der Coefficient A_{14} mit negativem Vorzeichen auftreten. Man hat also auch hier eine entsprechende Aenderung in der Zuweisung vorzunehmen. Am übersichtlichsten erkennt man die sämtlichen Möglichkeiten, wenn man sich die Vorzeichen der A_{ik} in einem Determinanten-Schema anschreibt:

$$\begin{matrix} & - & + & - \\ - & & - & + \\ + & - & & + \\ - & + & + & \end{matrix}$$

Dann können in dem herausgegriffenen Falle in der ersten Zeile noch zwei Vorzeichen, in der zweiten Zeile noch ein Vorzeichen beliebig gewählt werden. Es ist dann auch zu berücksichtigen, dass zwei Schemata, die sämtliche Vorzeichen entgegengesetzt enthalten, die gleiche geometrische Anordnung liefern. Eine leichte Abzählung ergibt dann, dass man 64 Zuordnungen erhält. Man kann also 64 Quadrupel hyperboloidischer Geraden angeben.

4) Setzt man $\alpha = -1$, construirt man also immer die vierten harmonischen Ebenen zur betreffenden Tetraederfläche bezüglich der Tangentialebenen, so gehen die Gleichungen (8) über in die Gleichungen (1). Die Punkte A', B', C', D' werden die Pole der Tetraederebenen in Bezug auf die Fläche f und es folgt also *):

---

*) Herr Professor R. Mehmke hat mich in dankenswerter Weise auf seine Notiz (Annalen 1885) aufmerksam gemacht: „Bemerkung über die Subdeterminanten symmetrischer Systeme". Der folgende Satz findet sich schon bei Chasles, Aperçu. histor. Note XXXII.

„Construirt man zu den Ebenen eines Tetraeders in Bezug auf eine Fläche 2. Classe die Pole und verbindet sie mit den gegenüber liegenden Ecken des Tetraeders, so liegen diese vier Geraden hyperboloidisch."

Damit ist aber ferner eine einfache, geometrische Deutung von vier hyperboloidischen Geraden gewonnen, die ganz allgemein durch die Gleichungen (1) gegeben sind. Da die Coefficienten a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} gar nicht vorkommen, so können sie in der Fläche 2. Classe beliebig angenommen werden. Es gibt also noch ∞^3 solche Flächen, in Bezug auf welche die gegebenen Geraden die in dem letzten Satze angeführte geometrische Eigenschaft zeigen.

5) Hält man irgend eine Zuordnung der $A_{i,k}$ fest, z. B. die durch die Gleichungen (8) gegebene und lässt α variiren, so rücken die Punkte A', B', C', D' auf den Geraden a', b', c', d' fort. In Bezug auf die Anordnung der Geraden AA', BB', CC', DD' sind dann folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Im allgemeinen werden die Geraden a', b', c', d' nicht durch die Punkte A, B, C, D bzhw. hindurch gehen. Die Strahlen AA', BB', CC', DD' beschreiben dann Strahlenbüschel in den Ebenen (Aa'), (Bb'), (Cc') und (Dd').

b) In einem speciellen Falle können die Geraden a', b', c', d' der Reihe nach durch A, B, C, D hin durchgehen. Dann fallen für jeden Wert von α die vier Geraden AA', BB', CC', DD' mit diesen vier Geraden a', b', c', d' selbst zusammen.

Fassen wir zunächst den ersten Fall ins Auge. Irgend einem Werte α entspricht ein hyperboloidisches Quadrupel AA', BB', CC', DD'.

Betrachtet man die sämtlichen Erzeugenden, die zur gleichen Regelschaar wie das Quadrupel gehören, so erhält man für ein variables α ∞^2 Gerade, also eine Strahlencongruenz.

Ohne hier auf eine ausführliche Untersuchung derselben bereits einzugehen, mögen nur Ordnung und Classe derselben durch folgende Ueberlegungen ermittelt werden.

Hat man drei windschiefe Gerade mit den Coordinaten p_{ik}, p_{ik}', p_{ik}'', so lässt sich das durch sie bestimmte Hyperboloid in folgender, von Professor G. Bauer dahier in seinen Vorlesungen benutzten, Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} p_{12}x_2+p_{13}x_3+p_{14}x_4 & p_{21}x_1+p_{23}x_3+p_{24}x_4 & p_{21}x_1+p_{32}x_2+p_{34}x_2 \\ p_{12}'x_2+p_{13}'x_3+p_{14}'x_4 & p_{21}'x_2+p_{23}'x_3+p_{24}'x_4 & p_{31}'x_1+p_{32}'x_2+p_{34}'x_4 \\ p_{12}''x_2+p_{13}''x_3+p_{14}''x_4 & p_{21}''x_1+p_{23}''+p_{24}''x_4 & p_{31}''x_1+p_{32}''x_2+p_{34}''x_4 \end{vmatrix}$$
$$= 0$$

Nehmen wir als solche Gerade die 3 ersten der durch die Gleichungen (1) gegebenen Geraden, so erhält man für die p folgende Verhältnisszahlen:

$$\begin{array}{ll|ll} p_{12} = 0 & p_{23} = a_{13}a_{14} & p_{21}' = 0 & p_{13}' = a_{23}a_{24} \\ p_{13} = 0 & p_{24} = -a_{13}^2 & p_{23}' = 0 & p_{14}' = -a_{23}^2 \\ p_{14} = 0 & p_{34} = a_{12}a_{13} & p_{24}' = 0 & p_{34}' = a_{21}a_{23} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} p_{31}'' = 0 & p_{12}'' = a_{31}a_{34} \\ p_{32}'' = 0 & p_{14}'' = -a_{32}^2 \\ p_{14}'' = 0 & p_{24}'' = a_{31}a_{32} \end{array}$$

Die Gleichung des Hyperboloids wird dann nach Unterdrückung eines unwesentlichen Factors:

$$\begin{aligned} &a_{34}(a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23})x_1x_2+a_{24}(a_{14}a_{23}-a_{12}a_{34})x_1x_3 \\ &+a_{23}(a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24})x_1x_4+a_{12}(a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23})x_3x_4 \\ &+a_{13}(a_{14}a_{23}-a_{12}a_{34})x_2x_4+a_{14}(a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24})x_2x_3 = 0 \end{aligned}$$

Die Klammerausdrücke sind die Determinanten (3), (4), (5), deren Verschwinden nach (1) zur Folge hatte, dass die vier hyperboloidischen Geraden sich in einem Punkte schneiden. Setzt man jetzt in dieser Gleichung statt der a_{ik} die Grösse

$$\alpha(A_{ik}+\dot{a}_{ik})+A_{ik}-a_{ik}$$

so erhält man Coefficienten, die in α den 3. Grad erreichen. Durch einen beliebigen Raumpunkt gehen also 3 solche Hyperboloide, die Strahlencongruenz ist von der dritten Ordnung. Es folgt dann auch unmittelbar, dass sie von der sechsten Classe, also in einer beliebigen Ebene 6 Strahlen enthält. Die Punkte A, B, C, D sind singuläre Punkte 1. Classe. Durch sie gehen je unendlich viele Strahlen, die', in einer Ebene gelegen, einen Büschel bilden.

6) Den zweiten der erwähnten Fälle können wir realisiren, wenn wir der Fläche eine besondere Lage dem Coordinaten-Tetraeder gegenüber anweisen. Soll nämlich z. B. die Gerade d' durch D gehen, also der Punkt

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

auf ihr liegen, so ergeben sich dafür die Bedingungen:

$$\begin{vmatrix} k_{12} & b_{24} \\ c_{12} & e_{24} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} b_{24} & b_{34} \\ s_{24} & c_{34} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} b_{34} & b_{14} \\ c_{34} & c_{14} \end{vmatrix} = 0$$

Für a', b', c' erhält man analog je eine Gruppe von Gleichungen. Geht man auf die A_{ik} und a_{ik} zurück, so liefern die obigen Gleichungen

$$\begin{vmatrix} a_{14} & a_{24} \\ A_{14} & A_{24} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{24} & a_{34} \\ A_{24} & A_{34} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{34} & a_{14} \\ A_{34} & A_{14} \end{vmatrix} = 0$$

Diese drei Gleichungen geben die erste Zeile von folgenden 12 Relationen:

$$(9) \quad \begin{array}{lll} a_{14}^2 a_{22} - a_{24}^2 a_{11} = 0 & a_{24}^2 a_{33} - a_{34}^2 a_{22} = 0 & a_{34}^2 a_{11} - a_{14}^2 a_{33} = 0 \\ a_{31}^2 a_{22} - a_{21}^2 a_{33} = 0 & a_{41}^2 a_{33} - a_{31}^2 a_{44} = 0 & a_{21}^2 a_{44} - a_{41}^2 a_{22} = 0 \\ a_{32}^2 a_{11} - a_{12}^2 a_{33} = 0 & a_{42}^2 a_{33} - a_{32}^2 a_{44} = 0 & a_{12}^2 a_{44} - a_{42}^2 a_{11} = 0 \\ a_{23}^2 a_{11} - a_{13}^2 a_{22} = 0 & a_{43}^2 a_{23} - a_{23}^2 a_{44} = 0 & a_{13}^2 a_{44} - a_{42}^2 a_{11} = 0 \end{array}$$

Schreibt man diese Gleichungen in folgender Form:

$$\begin{array}{l|l} \frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{a_{14}^2}{a_{24}^2} = \frac{a_{13}^2}{a_{23}^2} & \frac{a_{22}}{a_{33}} = \frac{a_{24}^2}{d_{34}^2} = \frac{a_{21}^2}{a_{31}^2} \\[2ex] \frac{a_{11}}{a_{33}} = \frac{a_{12}^2}{a_{32}^2} = \frac{a_{14}^2}{a_{34}^2} & \frac{a_{22}}{a_{44}} = \frac{a_{21}^2}{a_{41}^2} = \frac{a_{23}^2}{a_{43}^2} \\[2ex] \frac{a_{11}}{a_{44}} = \frac{a_{13}^2}{a_{42}^2} = \frac{a_{18}^2}{a_{43}^2} & \frac{a_{33}}{a_{44}} = \frac{a_{32}^2}{a_{42}^2} = \frac{a_{31}^7}{a_{41}^2} \end{array}$$

so erkennt man, dass aus der Gruppe links die Gruppe rechts von selbst folgt. Die Gleichungen zählen also für 6 Bedingungen.

Diese Bedingungen sind z B. erfüllt, wenn wir annehmen, dass

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0$$

Dann wird

$$A_{12} = \sqrt{-a_{11}a_{22}}, \quad A_{13} = \sqrt{-a_{11}a_{33}} \quad \text{etc.}$$

Die Fläche 2. Classe hat dann das Coordinaten-Tetraeder zum Polar-Tetraeder. Die Gleichungen 8) gehen über in

$$(10) \quad \begin{array}{cccc} \times & \frac{x_2}{\sqrt{-a_{11}a_{22}}} = & \frac{x_3}{\sqrt{-a_{11}a_{33}}} = & \frac{x_4}{\sqrt{-a_{11}a_{44}}} \\[2ex] \frac{x_1}{\sqrt{-a_{22}a_{11}}} & \times & = \frac{x_3}{\sqrt{-a_{22}a_{33}}} = & \frac{x_4}{\sqrt{-a_{22}a_{44}}} \end{array}$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{-a_{33}a_{11}}} = \frac{x_2}{\sqrt{-a_{33}a_{22}}} \quad \times \quad = \frac{x_4}{\sqrt{-a_{33}a_{44}}}$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{-a_{44}a_{11}}} = \frac{x_2}{\sqrt{-a_{44}a_{22}}} = \frac{x_3}{\sqrt{-a_{44}a_{33}}} \quad \times$$

Das sind die Linien a'. b', c', d' und man erkennt, dass hier überdies die Bedingungen (3) und (4) erfüllt sind: so schneiden sich folglich diese 4 Linien in einem Punkte.

Bestimmt man allgemein eine Fläche 2. Classe, welche den Bedingungen (9) genügt, so besteht zwischen dem Tetraeder und der Fläche folgende invariante Beziehung: „Die in jeder Kante des „Tetraeders sich schneidenden Tetraederflächen und die durch die „gleiche Kante gehenden Tangentialebenen bilden für alle 6 Kanten „das gleiche Doppelverhältniss."

Wird der Wert des Doppelverhältnisses speciell $= -1$, so geht ein solches Tetraeder in ein Polartetraeder über. Wie man umgekehrt je einer gegebenen Fläche ein solches Tetraeder von gegebenem Doppelverhältniss construirt, soll nicht weiter ausgeführt werden.

Die Gleichungen der Linien a', b', c', d' werden in diesem Falle:

$$\times \quad \frac{x_2}{b_{12}} = \frac{x_3}{b_{13}} = \frac{x_4}{b_{14}}$$

$$\frac{x_1}{b_{21}} \quad \times = \frac{x_3}{b_{23}} = \frac{x_4}{b_{24}}$$

$$\frac{x_1}{b_{31}} = \frac{x_2}{b_{32}} \quad \times \quad = \frac{x_4}{b_{34}}$$

$$\frac{x_1}{b_{41}} = \frac{x_2}{b_{42}} = \frac{x_3}{b_{43}} \quad \times$$

Da dieselben von dem Werte a unabhängig sein müssen, so können wir sie auch aus der ursprünglichen Form (8) erhalten, wenn wir z. B. $a = -1$ setzen, dann werden aber die Gleichungen (8):

$$\times \quad \frac{x_2}{A_{12}} = \frac{x_3}{A_{13}} = \frac{x_4}{A_{14}}$$

$$\frac{x_1}{A_{21}} \quad \times \quad = \frac{x_3}{A_{31}} = \frac{x_4}{A_{41}}$$

$$\frac{x_1}{A_{31}} = \frac{x_2}{A_{32}} \quad \times \quad = \frac{x_0}{A_{34}}$$

$$\frac{x_1}{A_{41}} = \frac{x_2}{A_{42}} = \frac{x_3}{A_{42}} \quad \times$$

Rechnet man für diese Form die Bedingungen (3) nach (4) aus, so zeigt sich, dass die Gleichungen (9) genügen, um sie zu erfüllen. Es schneiden sich also die vier Geraden a', b', c', d' in einem Punkte.

7) Für die Ebene gelten zwei durchaus analoge Sätze. Der erste lautet:

„Gegeben ist eine Curve 2. Classe und ein Dreieck ABC. Zieht „man durch B und C je Linien, welche mit den durch diese „Punkte an die Curve gehenden Tangenten und mit der Dreiecks-Seite BC ein beliebiges Doppelverhältniss α bil„den, so schneiden sich diese beiden Linien in einem Punkte „A'. Ebenso erhält man einen Punkt B' unter Beibehal„tung des gleichen Wertes α Für die dritte Dreiecksseite „ist dann eine Zuordnung festgelegt, vermöge der sich „ebenso ein Punkt C' bestimmt. Dann gehen die drei „Verbindungslinien AA', BB', CC' durch einen Punkt X“.

Der Beweis dieses Satzes ist ganz der gleiche. Die 3 Verbindungslinien werden:

$$\times \qquad [a_{13}(\alpha-1)+A_{13}(\alpha+1)] - [a_{12}(\alpha-1) + A_{12}(\alpha+1)]x_3 = 0$$

$$[a_{23}(\alpha-1)+A_{23}(\alpha+1)[x_1 \qquad \times \qquad -[a_{21}(\alpha-1) + A_{21}(\alpha+1)]x_3 = 0$$

$$[a_{32}(\alpha-1)+A_{32}(\alpha+1)]x_1 - [a_{31}(\alpha-1)+A_{31}(\alpha+1)] \qquad \times \qquad = 0$$

Hier können auch wieder bei den A_{ik} negative Vorzeichen genommen werden. Man erhält im ganzen 8 Zuordnungen, also acht Punkte X_1, X_2, X_3, X_4.

Lässt man α variiren, so rücken die Punkte A', B', C' je auf Geraden fort, zu denen die Büschel A, B. C je perspectiv liegen. Auf diesen Geraden schneiden sich auch die einander zugeordneten Tangenten und diese Geraden gehen je zu dreien durch die Punkte Y_1, Y_2, Y_3, Y_4. Man erhält den Satz:

„Legt man von drei Punkten A, B, C an einen Kegel„schnitt die Tangenten, so bestimmen je zwei solche Tan„gentenpaare zwei Verbindungslinien der Schnittpunkte. „Die dadurch entstehenden 6 Geraden sind die Seiten eines „vollständigen Viereckes, d. h. sie gehen zu je dreien durch „4 Punkte Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.“

Wählt man speciell $\alpha = -1$, so ergibt sich der bekannte Satz:

„Construirt man zu den Seiten eines Dreiecks in Bezug auf „einen Kegelschnitt die Pole und verbindet sie mit den „Gegenecken, so gehen diese drei Verbindungslinien durch „einen Punkt X_0.“

Lässt man α variiren, so beschreibt der Punkt X einen Kegelschnitt, der aus A, B und C durch projective Büschel erzeugt werden kann. Diese vier Kegelschnitte gehen durch A, B, C, ferner durch X_0.

8) Auch hier ist wieder der specielle Fall zu erwähnen, dass die Geraden a', b', c' bzhw. durch A, B, C gehen. Unter dieser Voraussetzung fallen die drei Linien AA', BB', CC' stets mit a', b', c' zusammen.

Die Bedingungen dafür werden ähnlich wie oben:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ A_{12} & A_{13} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet

$$(11) \quad a_{13}^2 a_{22} - a_{12}^2 a_{33} = 0 \quad a_{32}^2 a_{11} - a_{12}^2 a_{33} = 0 \quad a_{23}^2 a_{11} - a_{13}^2 a_{22} = 0$$

Man kann sie auch schreiben

$$\frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{a_{13}^2}{a_{23}^2}, \quad \frac{a_{11}}{a_{33}} = \frac{a_{12}^2}{a_{32}^2}, \quad \frac{a_{22}}{a_{33}} = \frac{a_{12}^2}{a_{13}^2}$$

Aus zweien dieser Gleichungen folgt die dritte. Diese Bedingungen (11) werden z. B. erfüllt, wenn wir speciell annehmen, dass

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$$

Dann ist $A_{12} = \sqrt{-a_{11}a_{22}}$ etc. Das Fundamental-Dreieck ist ein Polardreieck für die Curve 2. Classe. Die Linien a', b', c' werden dann

$$\times \qquad \frac{x_2}{\sqrt{-a_{11}a_{22}}} = \frac{x_3}{\sqrt{-a_{11}a_{33}}}$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{-a_{22}a_{11}}} \qquad \times \qquad = \frac{x_3}{\sqrt{-a_{22}a_{33}}}$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{-a_{33}a_{11}}} = \frac{x_2}{\sqrt{-a_{33}a_{22}}} \qquad \times$$

Im allgemeinen liegt, wenn die Bedingungen (11) erfüllt sind, die Curve 2. Classe so zu dem Coordinaten-Dreieck, dass die durch

jede Ecke gehenden Dreiecks-Seiten und die durch die gleiche Ecke gehenden Tangenten an die Curve 2. Classe für alle drei Ecken das gleiche Doppelverhältniss bilden. Ein solches Dreieck stellt eine Verallgemeinerung des Polardreiecks vor.

Die dualen Sätze für die Curve 2. Ordnung sind leicht zu formuliren.

9) Von dem Satze über das Tetraeder und die Fläche 2. Classe verdient eine metrische Specialisirung Erwähnung, die sich ergibt, wenn man statt der Fläche 2. Classe den unendlich fernen, imaginären Kugelkreis wählt. Statt der gleichen Doppelverhältnisse erhält man dann einen und denselben Winkel δ, unter dem die Ebenen gegen die Tetraederflächen geneigt sind. Ist also ABC ein Dreieck, und legen wir durch dessen Seiten Ebenen, welche mit der Dreiecks-Ebene den gleichen Winkel δ bilden und zwar alle auf der gleichen Seite dieser Ebene, so sei dies kurz so ausgedrückt: auf das Dreieck ABC ist eine Pyramide von der Neigung δ aufgesetzt. Dann lautet der Satz:

> „Setzt man auf die Flächen eines beliebigen Tetraeders „Pyramiden von beliebiger, aber gleicher Neigung δ und „zwar **alle** nach aussen oder **alle** nach innen, so bilden „die Verbindungslinien der Spitzen dieser Pyramiden mit „den gegenüber liegenden Ecken des Tetraeders vier hyper- „boloidische Gerade.“

Der Satz ist auch leicht direct zu beweisen. Nehmen wir die homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 den senkrechten Abständen von den Coordinatenebenen unmittelbar proportional, so werden nämlich die Gleichungen der eben genannten Verbindungslinien, wie eine einfache geometrische Betrachtung zeigt:

$$\times \quad \frac{x_2}{\sin(\alpha_{12}-\delta)} = \frac{x_3}{\sin(\alpha_{13}-\delta)} = \frac{x_4}{\sin(\alpha_{14}-\delta)}$$

$$\frac{x_1}{\sin(\alpha_{21}-\delta)} \quad \times \quad = \frac{x_3}{\sin(\alpha_{23}-\delta)} = \frac{x_4}{\sin(\alpha_{24}-\delta)}$$

$$\frac{x_1}{\sin(\alpha_{31}-\delta)} = \frac{x_2}{\sin(\alpha_{32}-\delta)} \quad \times \quad = \frac{x_4}{\sin(\alpha_{34}-\delta)}$$

$$\frac{x_1}{\sin(\alpha_{41}-\delta)} = \frac{x_2}{\sin(\alpha_{42}-\delta)} = \frac{x_3}{\sin(\alpha_{43}-\delta)} \quad \times$$

Dabei ist α_{ik} der Flächenwinkel, welchen die Tetraederebenen $x_i = 0$ und $x_k = 0$ einschliessen. Alle Pyramiden haben ihre Spitzen

gegen das Innere des Tetraeders gerichtet. Schreibt man überall $+\delta$ statt $-\delta$, so sind die Pyramiden nach aussen gerichtet. Im Innern des Fundamental-Tetraeders sollen die vier Coordinaten positiv sein.

Lässt man δ variiren, so rücken die Spitzen A', B', C', D' der aufgesetzten Pyramiden auf vier Senkrechten zu den betreffenden Tetraederflächen fort, welche diese in A_1, B_2, C_3, D_4 treffen mögen. Dann sind dies die Mittelpunkte der den Dreiecken BCD, ACD, ABC eingeschriebenen Kreise. Für $\delta = 0$ erhält man also auch in AA_1, BB_2, CC_3, DD_4 vier hyperboloidische Gerade (Hermes l. c.). Für $\delta = \frac{\pi}{2}$ endlich werden A', B', C', D', die unendlich fernen Punkte der Senkrechten, die Pyramiden gehen in Prismen über, und es ergibt sich der Steiner'sche Satz von den Höhen des Tetraeders, der natürlich auch aus dem in 4) am Anfang erwähnten Satze sich folgern lässt.

10) Ausser dem dem Dreiecke BCD eingeschriebenen Kreise mit dem Mittelpunkte A_1, der alle Seiten innen berührt, gibt es noch drei Kreise, welche je zwei der Seiten dieses Dreiecks aussen, die dritte innen berühren. Die Mittelpunkte dieser Kreise seien A_2, A_3, A_4, wobei A_2A_1 durch B, A_3A_1 durch C, A_4A_1 durch D geht. In analoger Weise erhalten wir in den übrigen Tetraederflächen die Punkte B_1, B_3, B_4, C_1, C_2, C_4, D_1, D_2, D_3. Dann kann an Stelle des Punktquadrupels $A_1B_2C_3D_4$ mit den in diesen Punkten errichteten Senkrechten jedes der Quadrupel $A_2B_1C_4D_3$, $A_3B_4C_1D_2$, $A_4B_3C_2D_1$ mit den durch sie gehenden Senkrechten treten. Man erhält z. B. für das erste Quadrupel $A_2B_1C_4D_3$ und für die Neigung δ folgende hyperboloidische Gerade:

$$
\begin{array}{llll}
 & -\dfrac{x_2}{\sin(\alpha_{12}+\delta)} & = \dfrac{x_3}{\sin(\alpha_{13}-\delta)} & = \dfrac{x_4}{\sin(\alpha_{14}-\delta)} \\[2ex]
-\dfrac{x_1}{\sin(\alpha_{21}+\delta)} & & = \dfrac{x_3}{\sin(\alpha_{23}-\delta)} & = \dfrac{x_4}{\sin(\alpha_{24}-\delta)} \\[2ex]
\dfrac{x_1}{\sin(\alpha_{31}-\delta)} & = \dfrac{x_2}{\sin(\alpha_{32}-\delta)} & & = -\dfrac{x_4}{\sin(\alpha_{34}+\delta)} \\[2ex]
\dfrac{x_1}{\sin(\alpha_{41}-\delta)} & = \dfrac{x_2}{\sin(\alpha_{42}-\delta)} & = -\dfrac{x_3}{\sin(\alpha_{43}+\delta)} & .
\end{array}
$$

11) Dem Satze über die aufgesetzten Pyramiden kann ein entsprechend allgemeiner nicht gegenüber gestellt werden. Schneidet man nämlich auf den drei durch eine Ecke eines Tetraeders gehenden Kanten eine gleiche Strecke a ab und verbindet diese drei Endpunkte durch eine Ebene, so kann man diese Ebene mit der gegen-

über liegenden Tetraederebene zum Schnitte bringen. Man erhält auf diese Weise vier Gerade in den Tetraederebenen. Können diese hyperboloidisch liegen?

Bezeichnen wir die Längen der vier Tetraederhöhen mit h_1, h_2 h_3, h_4, ferner die Länge der Tetraederkante AB kurz durch $\overline{12}$ etc., so wird die Ebene, welche auf den durch die Ecke A gehenden Kanten die Länge a abschneidet, gegeben durch

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ (\overline{12}-a)h_1 & ah_2 & 0 & 0 \\ (\overline{13}-a)h_1 & 0 & ah_3 & 0 \\ (\overline{14}-a)h_1 & 0 & 0 & ah_4 \end{vmatrix} = 0$$

Die Gleichungen der vier Ebenen werden demnach

$$-\frac{x_1 a}{h_1} + x_2 \frac{(\overline{12}-a)}{h_2} + x_3 \frac{(\overline{13}-a)}{h_3} + x_4 \frac{(\overline{14}-a)}{h_4} = 0$$

$$x_1 \cdot \frac{(\overline{21}-a)}{h_1} - x_2 \cdot \frac{a}{h_2} + x_3 \cdot \frac{(\overline{31}-a)}{h_3} + x_4 \cdot \frac{(\overline{41}-a)}{h_4} = 0$$

$$x_1 \cdot \frac{(\overline{31}-a)}{h_1} + x_2 \cdot \frac{(\overline{32}-a)}{h_2} - x_3 \cdot \frac{a}{h_3} + x_4 \cdot \frac{(\overline{34}-a)}{h_4} = 0$$

$$x_1 \cdot \frac{(\overline{41}-a)}{h_1} + x_2 \cdot \frac{(\overline{42}-a)}{h_2} + x_3 \cdot \frac{(\overline{43}-h)}{h_3} - x_4 \cdot \frac{a}{h_4} = 0$$

Also sind die Schnittgeraden dieser Ebenen mit den gegenüberliegenden Tetraederflächen gegeben durch

$$x_1 = 0 \qquad \times \qquad x_2 \frac{\overline{12}-a}{h_2} + x_3 \cdot \frac{(\overline{13}-a)}{h_3} + x_4 \cdot \frac{(\overline{14}-a)}{h_4} = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_1 \frac{\overline{21}-a}{h_1} \qquad \times + x_3 \cdot \frac{(\overline{23}-a)}{h_3} + x_4 \cdot \frac{(\overline{24}-a)}{h_4} = 0$$

$$x_3 = 0 \quad x_1 \cdot \frac{(\overline{31}-a)}{h_1} + x_2 \cdot \frac{(\overline{32}-a)}{h_2} \qquad \times + x_4 \frac{(\overline{34}-a)}{h_4} = 0$$

$$x_4 = 0 \quad x_1 \cdot \frac{(\overline{41}-a]}{h_1} + x_2 \cdot \frac{(\overline{42}-a)}{h_2} + x_3 \cdot \frac{(\overline{43}-a)}{h_3} \qquad \times \qquad = 0$$

Die Bedingung (7) von 1) geht hier über in

$$(12) \qquad h_1 = h_2 = h_3 = h_4$$

Bezeichnen wir mit f_1, f_2, f_3, f_4 die Flächeninhalte der Tetraederflächen, so folgt auch:

(13) $$f_1 = f_2 = f_3 = f_4$$

Die genannten Schnittgeraden liegen also blos dann hyperboloidisch, wenn für das Tetraeder die Bedingung (12) oder (13) erfüllt ist.

12) Diesem Satze über das Tetraeder steht ein entsprechender Satz über das ebene Dreieck gegenüber, der aber, im Gegensatz zu jenem für jedes Dreieck gilt. Er lautet:

„Schneidet man auf den Seiten eines Dreiecks von den „Ecken aus gleiche Strecken a ab und zwar entweder „immer auf den Dreiecks-Seiten oder auf ihren Verlänge-„rungen, und bringt die Verbindungslinie je zweier solchen „Punkte zum Schnitt mit der dritten Dreiecks-Seite, so „liegen diese drei Schnittpunkte auf einer Geraden.“

Der Beweis ist sehr leicht zu erbringen. Die Gleichungen der genannten Verbindungslinien werden nämlich:

$$-x_1 \cdot \frac{a}{h_1} + x_2 \cdot \frac{(\overline{21}-a)}{+h_2} + x_3 \cdot \frac{(\overline{31}-a)}{h_3} = 0$$

$$+x_1 \cdot \frac{(\overline{12}-a)}{h_1} - x_2 \cdot \frac{a}{h_2} + x_3 \cdot \frac{(\overline{32}-a)}{h_3} = 0$$

$$+x_1 \cdot \frac{(\overline{13}-a)}{h_1} + x_2 \cdot \frac{(\overline{23}-a)}{h_1} - x_3 \cdot \frac{a}{h_3} = 0$$

München, Februar 1899.

XIX.

Die Bahn- und Integralgleichungen eines Punktes in einem n-dimensionalen Raume.

Von

Ernst Schultz.

Sind die Coordinaten des Punktes $x_1, x_2 \ldots x_n$ bezeichnet, ferner t die Zeit, $a_1, a_2 \ldots a_n$, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ die $2n$ Integrationsconstanten, so lässt sich die Bahn des Punktes darstellen durch die Gleichungen

$$x_i = f'_i(t, a_1, a_2 \ldots a_n, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n) \quad (1)$$

Lösen wir dieses Gleichungssystem nach den Constanten a auf, so erhalten wir das System:

$$a_i = \varphi_i(t, x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n) \quad (2)$$

Das erste System von Gleichungen ergiebt sich direct aus der Integration der Lagrange'schen Differentialgleichungen der Dynamik. Das System 2) ergiebt sich auf bekannte Weise aus der durch die Hamilton-Jacobischen partielle Differentialgleichung definirten Function. Es soll deshalb das System 1) das System der Bahngleichugen, das System 2) das System der Integralgleichungen genannt werden. Da sie in der weitern Entwicklung nicht hervorgehoben werden, so sollen sie in spätern Formeln nicht genannt werden. Es sollen hier Bedingungen abgeleitet werden, welche die Bahngleichungen zu erfüllen haben sowol im allgemeinen wie im besondern Falle, wo das Princip der lebendigen Kraft gilt. In dem letzten Falle lassen sich mit Hülfe der Bedingungen leicht die Formen der Integral- und Bahngleichungen ableiten. Ferner soll gezeigt werden, wie das Fehlen einiger Constanten in den Bahngleichungen das Vorkommen der Variabeln in den Integralgleichungen beeinflusst.

Setzen wir für ε_k $-\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}$ ein, so ergiebt sich:

$$\frac{dx_s}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial s_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \quad (s = 1, 2, \ldots n) \tag{11}$$

Die Bahngleichungen müssen also so beschaffen sein, dass die Gleichungen (10) oder (11) mit Hilfe der Integralgleichungen identisch erfüllt werden. Haben die Bahngleichungen Functionen von t zu Argumenten, so lässt sich zeigen, dass infolge der Gleichungen (10) t nicht explicite in den Bahngleichungen enthalten sein kann.

Angenommen, es sei

$$x_s = f_s(t, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n) \quad (s = 1, 2, \ldots n) \tag{12}$$

wo $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ Functionen von t und den n Constanten a sind.

Differentiiren wir die Gleichung (12) total nach t, so ist

$$\frac{df_s}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial \psi_k} \frac{d\psi_k}{dt} + \frac{\partial f_s}{\partial t}$$

Differentiiren wir der Reihe nach 12) partiell nach $a_1, a_2 \ldots a_n$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial f_s}{\partial a_1} = \frac{\partial f_s}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial a_1} + \frac{\partial f_s}{\partial \psi_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial a_1} + \ldots + \frac{\partial f_s}{\partial \psi_n} \frac{\partial \psi_n}{\partial a_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial a_n} = \frac{\partial f_s}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial a_n} + \frac{\partial f_s}{\partial \psi_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial a_n} + \ldots + \frac{\partial f_s}{\partial \psi_n} \frac{\partial \psi_n}{\partial a_n}$$

Multipliciren wir die Gleichungen der Reihe mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ und addiren sie, so erhalten wir:

$$\Sigma \varepsilon_k \frac{\partial f_s}{\partial a_k} = \frac{\partial f_s}{\partial \psi_1} \sum_{k=7}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial \psi_1}{\partial a_k} + \frac{\partial f_s}{\partial \psi_2} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial \psi_2}{\partial a_k} + \ldots$$
$$+ \frac{\partial f_s}{\partial \psi_n} \Sigma \varepsilon_k \frac{\partial \psi_n}{\partial a_k}$$

Setzen wir die für $\frac{df_s}{dt}$ und $\Sigma \varepsilon_k \frac{\partial f_s}{\partial a_k}$ erhaltenen Worte in (10) ein, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial \psi_k} \frac{d\psi_k}{dt} = \frac{\partial f_s}{\partial \psi_1} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial \psi_1}{\partial a_k} + \ldots \frac{\partial f_s}{\partial \psi_h} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial \psi_n}{\partial a_k}$$

Diese Gleichung kann jedoch nur zu einer Identität werden, wenn

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_k}{\partial a_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_k}{\partial a_2} + \ldots + \varepsilon_n \frac{\partial \psi_k}{\partial a_n} \quad (k = 1, 2 \ldots n) \quad (13)$$

Es dürfen also die Functionen f t nicht explicite enthalten, und die Functionen ψ müssen die Bedingung (13) erfüllen.

Wir sind also zu folgendem Resultat gelangt:

Die Bahngleichungen eines im n-dimensionalen Raume sich bewegenden Punktes sind so beschaffen, dass

$$\frac{df_s}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial f_s}{\partial a_k} \quad (s = 1, 2, \ldots n)$$

wo $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ Functionen von t und den Constanten a sind. Haben die Bahngleichungen Functionen von t z. B. $\psi_s(t, a_1 \ldots a_n)$, $(s = 1, 2, \ldots n)$ zu Argumenten, so können die Bahngleichungen t explicite nicht enthalten und die Functionen ψ sind so beschaffen, dass

$$\frac{d\psi_s}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\partial \psi_s}{\partial a_k} \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

Die Form von $\psi_s (s = 1, 2, \ldots n)$ lässt sich sehr leicht ermitteln, wenn ε gleich einer Constanten γ gesetzt wird, d. h.

$$\varepsilon_k = \gamma_k \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

und angenommen wird, dass ψ_1 nur a_1, ψ_2 nur $a_2 \ldots \psi_n$ nur a_n von den Constanten a enthält. Unter dieser Voraussetzung wird

$$\frac{d\psi_s}{dt} = \gamma_s \frac{\partial \psi_s}{\partial a_s} \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$\psi_s = \psi_s(a_s + \gamma_s t)$$

sein muss. Dem entsprechend erhalten wir die Bahngleichungen:

$$x_i = f_i(a_1 + \gamma_1 t, \ a_2 + \gamma_2 t, \ldots a_n + \gamma_n t), \quad (i = 1, 2 \ldots n) \quad (14)$$

und die Integralgleichungen müssen dann die Form haben:

$$a_i + \gamma_i t = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (15)$$

Es soll jetzt bewiesen werden, dass, wenn die Bahn- und Integralgleichungen die Formen (14) und (15) haben, die partielle Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung die Zeit t explicite nicht enthält.

Ist W die durch die partielle Differentialgleichung definirte Function, sind $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die durch die Integration eingeführten Constanten, so bestehen, gemäss der Bildung der Integralgleichungen, die Integralgleichungen:

$$a_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = -\gamma_i t + \varphi_i(x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n) \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{16}$$

Multipliciren wir diese n Gleichungen hintereinander mit

$$\alpha_i (i = 1, 2 \ldots n)$$

addiren sie und integriren, so ergiebt sich

$$W = -\gamma_1 \alpha_1 t - \gamma_2 \alpha_2 t \ldots - \gamma_n \alpha_n t + V(x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n) \tag{17}$$

Setzen wir jetzt

$$\gamma_1 \alpha_1 + \ldots \gamma_n \alpha_n = -\beta_1$$

und führen dementsprechend für die Constanten α die Constanten β ein, so erhalten wir:

$$W = \beta_1 t + V(x_1, x_3, \ldots x_n, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n) \tag{17a}$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \beta_1 \tag{18}$$

Die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung für dynamische Probleme hat die Form

$$\frac{\partial W}{\partial t} + T - U = 0 \tag{19}$$

wo T und U die übliche Bedeutung haben. Da nun nach (18) $\frac{\partial W}{\partial t}$ constant sein muss, so kann in (19) kein t explicite enthalten sein, was zu zeigen war.

$$\tau - t = \frac{\partial V}{\partial \beta_1}; \quad b_2 = \frac{\partial V}{\partial \beta_2}; \ldots b_n = \frac{\partial V}{\partial \beta_n}$$

Dies ist die Form von Integralgleichungen, welche Jacobi durch die Transformation

$$W = V + t\beta_1$$

erhält, wenn in der partiellen Differentialgleichung die Zeit explicite nicht enthalten ist, d. h. wenn das Princip von der lebendigen Kraft gilt.

Es lässt sich auch direct ohne Benutzung der partiellen Differentialgleichung zeigen, dass das Princip der lebendigen Kraft gelten muss, wenn die Bahn- und Integralgleichungen die Formen (15) und (16) haben.

Ist nämlich v die Geschwindigkeit des Punktes und sind u_1, u_2 ... u_n die Coordinaten, in denen

$$v^2 = \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{du_2}{dt}\right)^2 + \ldots \left(\frac{du_n}{dt}\right)^2$$

ist, so muss sich v^2 mit Hülfe der Bahngleichungen frei von t darstellen lassen, wenn das Princip der lebendigen Kraft gelten soll. Da $x_1, x_2 \ldots x_n$ diejenigen Coordinaten sind, in denen die Integration möglich ist, so mögen die Transformationsgleichungen sein:

$$u_i = u_i(x_1, x_2 \ldots x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Es ist nun

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots \frac{\partial u_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \tag{20}$$

Nach früherem ist

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial f_i}{\partial a_i}(a_1 + \gamma_1 t, \quad a_2 + \gamma_2 t_1 \ldots a_n + \gamma_n t) \tag{21}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n$$

Infolge der Integralgleichungen (15) sind $a_i + \gamma_i t$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ gleich Functionen von $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, folglich wird auch, wenn wir die Substitutionen in (21) ausführen, $\frac{dx_i}{dt}$ frei von t. $(i=1, 2, \ldots n)$

Infolgedessen wird nach (20) $\frac{du_i}{dt}$ frei von t und demnach muss v^2 sich frei von t als Function von $x_1, x_2 \ldots x_n$ ergeben, was zu zeigen war.

2.

Fehlen in den einzelnen Bahngleichungen einige Constanten a, so wird dies die Integralgleichungen beeinflussen, und es wird sich ergeben, dass in bestimmten Integralgleichungen bestimmte Variable x fehlen. Nehmen wir an, dass die Bahngleichungen von der Form seien:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1(t, a_1, a_2, \ldots a_{n-q}) \\
x_2 &= f_2(t, a_1, a_2, \ldots a_{n-q}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1 \\
x_{n-q} &= f_{n-q}(t, a_1, \ldots a_{n-q}) \\
x_{n-q+1} &= f_{n-q+1}(t, a_1, \ldots a_{n-g}, a_{n-q+1}, a_{n-q+1}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-q+1} &= f(n-q+i \ldots a_{n-q+i} \ldots a_{h-q+i}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= f_n(t, a_1, a_2 \ldots a_{n-q}, a_{n-q+1} \ldots a_{n-1}\, n_n
\end{aligned}
$$

Es wird alsdann

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial a_{n-q}} & 0 & 0 & \ldots & \\
\frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial a_{n-q}} & 0 & 0 & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\frac{\partial f_{n-q}}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{n-q}}{\partial a_2} & \ldots & \frac{\partial f_{n-q}}{\partial a_{n-q}} & 0 & 0 & \ldots & \\
\frac{\partial f_{n-q+1}}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{n-q+1}}{\partial a_2} & \ldots & \frac{\partial f_{n-q+1}}{\partial a_{n-q}} & \frac{\partial f_{n-q+1}}{\partial a_{n-q+1}} & 0 & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\frac{\partial f_{n-q+i}}{\partial a_1} & \frac{\partial f_{n-q+i}}{\partial a_2} & \ldots & \frac{\partial f_{n-q+i}}{\partial a_{x-q}} & \frac{\partial f_{n-q+i}}{\partial a_{n-q+i}} & \ldots & & \\
 & & & \ldots & \frac{\partial f_{n-q+i}}{\partial a_{n-q+i}} & 0 & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\frac{\partial f_n}{\partial a_1} & \frac{\partial f_n}{\partial a_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial a_{n-q+i}} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial a_n} & &
\end{vmatrix} \qquad (2)
$$

Da Δ nicht identisch null sein darf, so muss mindestens eine Constante in einer der Bahngleichungen enthalten sein. Um das Vorkommen der Variabeln x in den Integralgleichungen zu untersuchen, wenn Δ die Form (2) hat, ist die Gleichung (6) des ersten Paragraphen zu berücksichtigen.

Es muss nämlich sein:

$$\Delta \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = \Delta i, k \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Wenn wir die einzelnen Unterdeterminanten bilden, so ergeben sich ohne Schwierigkeit folgende Werte für die Unterdeterminanten:

$$\Delta_{n,1} = 0, \quad \Delta_{n,2} = 0, \ldots \ldots \Delta_{n,n-1} = 0, \quad \Delta_{n,a} \gtrless 0$$

$$\Delta_{n-1,1} = 0; \quad \Delta_{n-1,2} = 0; \ldots \Delta_{n-1,\, n-2} = 0; \quad \Delta_{n-1,n} \gtrless 0$$

$$\Delta_{n-3,n} \gtrless 0$$

. . . .

$$\Delta_{n-q+1,1} = 0, \quad \Delta_{n-q+1,2} = 0 \ldots \Delta_{n-q+1,\, n-q} = 0$$

$$\Delta_{n-q+3,\, n-q+1} \gtrless 0 \ldots \Delta_{n-q+1,n} \gtrless 0$$

$$\Delta_{n-q,1} \gtrless 0, \quad \Delta_{n-q,\,2} \gtrless 0 \ldots\ldots \Delta_{n-q,n} \gtrless 0$$

. . . .

$$\Delta_{1,1} \gtrless 0, \quad \Delta_{1,2} \gtrless 0 \ldots\ldots \Delta_{1,n} \gtrless 0$$

Hieraus ergeben sich für die φ folgende Argumente:

$$\begin{aligned}
a_n &= \varphi_n(t, x_1, x_2 \ldots x_n)\\
a_{n-1} &= \varphi_{n-1}(t, x_1, x_2 \ldots x_{n-1})\\
a_{n-2} &= \varphi_{n-2}(t, x_1, x_2 \ldots x_{n-2})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n-q+1} &= \varphi_{n-q+1}(t, x_1, x_2 \ldots x_{n-q+1}\\
a_{n-q} &= \varphi_{n-q}(t, x_1, x_2 \ldots x_{n-q})\\
a_{n-q-1} &= \varphi_{n-q-1}(t, x_1, x_2 \ldots x_{n-q})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_2 &= \varphi_2(t\ \ x_1, x_2 \ldots x_{n-q})\\
a_1 &= \varphi_1(t, x_1, x_2 \ldots x_{n-q})
\end{aligned} \tag{8}$$

Nehmen wir an, die Bahngleichungen seien von der Form:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1(t, a_1)\\
x_2 &= f_2(t, a_1, a_2)\\
x_3 &= f_3(t, a_1, a_2, a_3)\\
&\cdots\cdots\\
x_n &= f_n(t, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

so folgen aus (3) die Integralgleichungen:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \varphi_1(t, x_1)\\
a_2 &= \varphi_2(t, x_1, x_2)\\
&\cdots\cdots\\
a_n &= \varphi_n(t, x_1, x_2 \ldots x_n)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Die dem System der Bahngleichungen entsprechende Functionaldeterminante ist dann:

$$
\varDelta = \begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial a_1} & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & 0 & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial f_3}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} & \frac{\partial f_3}{\partial a_3} & 0 \; 0 \; 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial f_n}{\partial a_1} & \frac{\partial f_n}{\partial a_2} & \frac{\partial f_n}{\partial a_3} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial a_n}
\end{vmatrix}
\tag{6}
$$

Sind alle Glieder bis auf die der Hauptdiagonale gleich null, so ergeben sich die Systeme:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1(t, a_1)\\
x_2 &= f_2(t, a_2)\\
&\cdots\cdots\\
x_n &= f_n(t, a_n)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$a_1 = \varphi(t, x_1) \quad a_2 = \varphi_2(t, x_2) \ldots a_n = \varphi_n(t, x_n)$$

Soll jedoch die Anzahl der Argumente in den Bahngleichungen des Systems (5) reducirt werden, ohne auf das System (7) zu kommen, so kann dies nur dadurch erreicht werden, dass bestimmte Bedingungen von den Elementen von $\varDelta$ identisch erfüllt werden müssen.

Damit $\varphi_3(t, x_1, x_2, x_3)$ von x_1 unabhängig werde, muss

$$\Delta_{1,3} = 0$$

sein. Es ist nun gemäss (6)

$$\Delta_{1,3} = \frac{\partial f_n}{\partial a_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial a_{n-1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial a_n} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} \end{vmatrix}$$

Da die Glieder der Hauptdiagonale nicht identisch null sein können, muss

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} \end{vmatrix} = 0 \text{ sein.}$$

Und allgemein wird $\Delta_{i,s} = 0$, wenn die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial f_{i-1}}{\partial a_{i-1}} \frac{\partial f_{i+1}}{\partial a_i} \cdots \frac{\partial f_s}{\partial a_{s-1}} = 0$$

Die Anzahl dieser identischen Gleichungen ist

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Wir sind daher zu folgendem Resultat gelangt:

Ist die Form der Bahngleichungen:

$$x_1 = f_1(t, a_1), \quad x_2 = f_2(t, a_1, a_2) \ldots$$
$$x_n = f_n(t, a_1, a_2 \ldots a_n)$$

so müssen die Determinanten

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial f_{i-1}}{\partial a_{i-1}} \frac{\partial f_{i+1}}{\partial a_i} \cdots \frac{\partial f_s}{\partial a_{s-1}}$$

identisch null werden, wenn die Integralgleichungen die Form haben:

$$a_1 = \varphi_1(t, x_1); \quad a_2 = \varphi_2(t, x_1, x_2);$$
$$a_3 = \varphi_3(t, x_2, x_3); \ldots$$

$$a_{n-1} = \varphi_{n-1}(t, x_{n-2}, x_{n-1}); \quad a_n = \varphi_n(t, x_{n-1}, x_n)$$

Die im letzten Theorem angeführten Bedingungen

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial f_{i-1}}{\partial a_{i-1}} \frac{\partial f_{i+1}}{\partial a_i} \cdots \frac{\partial f_s}{\partial a_{s-i}} = 0 \quad (i, s = 1, 2 \ldots n) \tag{8}$$

ziehen die Bedingungen nach sich:

$$\frac{dfi}{dt} = \varkappa_k \frac{\partial fi}{\partial a_k}$$

wo $\varkappa_k$ eine Function der Zeit und der Constante $a_1, a_2 \ldots a_k$ ist, wenn in sämtlichen Bahngleichungen das Argument $\gamma_1 t + a_1$ enthalten ist, so dass diese lauten:

$$x_1 = f_1(\gamma_1, t + a_1): \quad x_2 = f_2(\gamma_2 t + a_1, a_2), \ldots$$
$$x_\mu = f_n(\gamma_1, t + a_1, a_2 \ldots a_n) \tag{9}$$

was die Gültigkeit des Princips der lebendigen Kraft voraussetzt.

In der Tat, ist $i = 1$. $s = 3$, so liefert die Bedingung (8):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} \end{vmatrix} = 0$$

Aus den Bahngleichungen (9) folgt nun

$$\frac{df_1}{dt} = \gamma_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_1}; \quad \frac{\partial f_2}{dt} = \gamma_1 \frac{\partial f_2}{\partial a_1}$$

allgemein

$$\frac{dfi}{dt} - \gamma_1 \frac{fi}{\partial a_1} \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{10}$$

Berücksichtigen wir dies, so muss sein:

$$\frac{df_2}{dt} \frac{\partial f_3}{\partial a_2} - \frac{df_3}{dt} \frac{\partial f_2}{\partial a_2} = 0$$

Bezeichnen wir den Proportionalitätsfactor mit $\varkappa_2$, welcher eine Function von t und den Constanten a sein kann, so ergiebt sich

$$\frac{df_2}{dt} = \varkappa_2 \frac{\partial f_2}{\partial c_2}; \quad \frac{df_3}{dt} = \varkappa_3 \frac{\partial f_3}{\partial b_2} \tag{11}$$

Ist ferner $i = 1$, $s = 4$, so ergiebt die Bedingung (8):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} & \frac{\partial f_3}{\partial a_3} \\ \frac{\partial f_4}{\partial a_1} & \frac{\partial f_4}{\partial a_2} & \frac{\partial f_4}{\partial a_3} \end{vmatrix} = 0$$

Berücksichtigen wir die Gleichungen (10) und (11), so muss, wenn die letzte Gleichung identisch erfüllt werden soll, sein:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{d f_2}{dt} \\ \frac{d f_1}{dt} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} \end{vmatrix} = 0$$

was nur möglich ist, wenn

$$\frac{df_4}{dt} = \varkappa_2 \frac{\partial f_4}{\partial a_2}$$

ist. So kann man fortfahren, und es wird sich ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= \gamma_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_1} = \varkappa_1 \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \\ \frac{df_2}{dt} &= \gamma_1 \frac{\partial f_2}{\partial a_1} = \varkappa_2 \frac{\partial f_2}{\partial a_2} \\ \frac{df_3}{dt} &= \gamma_1 \frac{\partial f_3}{\partial a_1} = \varkappa_2 \frac{\partial f_3}{\partial a_2} = \varkappa_3 \frac{\partial f_3}{\partial a_3} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_n}{dt} &= \gamma_1 \frac{\partial f_n}{\partial a_1} = \varkappa_2 \frac{\partial f_n}{\partial a_2} = \varkappa_3 \frac{\partial f_n}{\partial a_3} = \ldots \varkappa_{n-1} \frac{\partial f_n}{\partial a_{n-1}} \end{aligned} \tag{12}$$

wo γ_1 eine Constante, $\varkappa_2, \varkappa_3 \ldots \varkappa_{n-1}$ Functionen von t und den entsprechenden Constanten a sind.

Wenn die Bahngleichungen die Eigenschaften (12) besitzen, so müssen sie von folgender Form sein:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\gamma_1 t + a_1) \\ x_2 &= f_2\{f_2(\gamma_1 t + a_1) + a_2\} \\ x_3 &= f_3[f_2\{f_1(\gamma_1 t + a_1) + a_2\} + a_3] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$x_{n-1} = f_{n-1}\,[\psi_{n-2}\,\{\psi_{n+3}\,(\ldots f_1\,(\gamma_1\,t + a_1) + \alpha_2) + \ldots$$
$$+ a_{n-2}\} + a_{n-1}]$$
$$x_n = f_n\,[\psi_{n-1}\,\{\psi_{n-2}\,(\ldots f_1\,(\gamma_1\,t + a_1) + a_2) + \ldots$$
$$+ a_{n-1}\},\ a_n]$$

Diese Form von Bahngleichungen ergiebt sich auch, wenn man aus den Integralgleichungen:

$$a_1 + \gamma_1 t = \varphi_1(x_1); \quad a_2 = \varphi_2(x_1, x_2); \quad a_3 = \varphi_3(x_2, x_3) \ldots$$
$$a_n = f_n(x_{n-1}, x_n)$$

durch Elimination die Bahngleichungen abzuleiten sucht.

Integralgleichungen von solcher Form ergeben sich aus der partiellen Differentialgleichung:

$$B_1\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + B_2\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots B_n\left(\frac{\partial W}{\partial x_4}\right)^2 = \Omega + \alpha_1 \qquad (13)$$

in welcher die B und Ω Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind, da infolge der Gültigkeit des Princips der lebendigen Kraft kein t explicite in dieser Gleichung vorkommen kann. Die Integration der Gleichung (13) ist möglich, wenn

$$B_1 = \mu, \text{ wo } \mu \text{ eine Constante ist,}$$
$$B_2 = C_2'(x_1); \quad B_3 = C_2'(x_1)\,C_3'(x_2)$$
$$B_4 = C_2'(x_1)\,(C_3'(x_2)\,C_4'(x_3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_n = C_2'(x_3)\,C_3'(x_2) \ldots C_n'(x_{a-1})$$
$$\Omega = \Omega_1'(x_1) + C_2'\{x_1,\ \Omega_2'(x_2) + C_2'(x_1)C_3'(z_2)\Omega_3'(x_3) + \ldots$$
$$+ C_2'(x_1) \ldots C_{n-1}'(x_{n+1}\ \Omega_n'(x_n)$$

Es wird alsdann:

$$W = \int \sqrt{\Omega_1'(x_1) - \frac{\alpha_2}{\mu}\,C_2'(x_1) + \frac{\alpha_1}{\mu}}\,dx_1$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} \int \sqrt{\Omega_k'(x_k) - \alpha_{k+1}'C_{k+1}'(x_k) + \alpha_k}\,dx_k$$

wenn $\alpha_{n+1} = 0$ gesetzt wird.

Die Integralgleichungen sind dann:

$$t - \tau = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int \sqrt{\Omega_1'(x_1) - \frac{\alpha_2}{\mu}\,C_2'(x_1) + \frac{\alpha_1}{\mu}}\,dx_1$$

$$a_2 = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int \sqrt{\Omega_2'(x_2) - \alpha_3 C_3'(x_2) + \alpha_2}\, dx_2$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int \sqrt{\Omega_1'(x_1) - \frac{\alpha_2}{\mu} C_2'(x_1) + \alpha_1}\, dx_1$$

. . . .

$$a_s = \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \int \sqrt{\Omega_s'(x_s) - \alpha_{s+1} C_s'(x) + \alpha_s}\, dx_s$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \int \sqrt{\Omega_{s-1}(s6-1) - \alpha_{s-1} C_3'(x3-1) + \alpha_{s-1}}\, dx_{s-1}$$

. . . .

$$a_n = \frac{\partial}{\alpha_n} \int \sqrt{\Omega_n'(x_u) + \alpha_n}\, dx_n$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha} \int \sqrt{\Omega_{n-1}'(x_n-1) - \alpha_n C_n'(\alpha_n-1) + \alpha_{n-1}}\, dx_{n-1}$$

Die hierzu gehörenden Bahngleichungen werden dann die vorhin abgeleitete Form haben, was ohne weiteres sich ergiebt.

Stettin, August 1898.

XX.

Ueber die Inhaltsbestimmung von Körpern, deren Schnittflächen parallel mit einer Ebene quadratische Functionen ihres Abstandes sind.

Von

Prof. **Weinmeister** in Tharandt.

Bekanntlich ist die Simpson'sche Regel für alle Körper genau gültig, deren parallele ebene Schnitte f eine kubische Function ihres Abstandes x von einer bestimmten Ebene sind. Es sollen nun im Folgenden nur solche Körper betrachtet werden, für welche

$$f = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

und zwar sei zuerst die Aufgabe (a) gestellt, den Inhalt der Schicht eines solchen Körpers aus seiner Höhe h, aus drei Schnittflächen f_1, f_2, f_3 und deren Abständen x_1, x_2, x_3 vom Mittelschnitt darzustellen. Hierauf sollen (b) mit Rücksicht auf die Coefficienten α, β, γ sechs verschiedene Classen dieser Körper unterschieden, und für jede Classe besondere Kubaturformeln aufgestellt werden. Dann wird gezeigt (c), wie man an den Grundflächen und dem Mittelschnitt einer Schicht die Classe des Körpers erkennt, welchem sie entnommen ist, und endlich werden die bei den Flächen zweiter Ordnung vorkommenden Schichten (d), die hierher gehörigen Polyeder (e) und die Schichten der Regelflächen (f) jenen sechs Classen eingereiht.

a)

Schneidet man den Körper durch zwei Ebenen, welche in den Abständen x und $-x$ der Ausgangsebene parallel sind, so ist die zwischen beiden gelegene Schicht

$$S = 2\,\alpha x + \tfrac{2}{3}\,\gamma x^3$$

Führt man nun statt der Coefficienten α und γ jene drei Schnittfiguren f_1, f_2, f_3 ein und setzt ausserdem $x = \frac{1}{2}h$, so erhält man

$$S = \left[f_1 \frac{x_2 x_3 + \frac{1}{12}h^2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f_2 \frac{x_1 x_3 + \frac{1}{12}h^2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f_3 \frac{x_1 x_2 + \frac{1}{12}h^2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} \right] \cdot h$$

eine Formel, in welcher die gebräuchlichsten Inhaltsformeln des Prismatoids als specielle Fälle enthalten sind.

Aus derselben ergiebt sich ferner, dass unter der Voraussetzung

$$x_1 \, x_2 = -\frac{1}{12}h^2$$

die beiden Schnittflächen f_1 und f_2 zur Bestimmung von S ausreichen. Es wird dann nämlich

$$S = \frac{x_1 f_2 - x_2 f_1}{x_1 - x_2}\,h$$

Von den weiteren speciellen Fällen sei ausserdem noch hervorzuheben, dass

$$S = \tfrac{1}{3}(f_1 + f_2 + f_3)h, \text{ wenn}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \tfrac{1}{4}h^2.$$

b)

Durch Discussion der Coefficienten α, β, γ erhält man sechs verschiedene Körperclassen, die wir im Folgenden mit Rücksicht auf die entsprechenden Flächen zweiter Ordnung benannt haben. Ausserdem seien die ebenen Grenzflächen der Schicht mit g und g' und der Mittelschnitt mit m bezeichnet. Ferner werde α. die Schnittfigur für $x = 0$, immer positiv genommen.

$$\gamma = 0.$$

I. Cylinderartige Körper ($\mathfrak{K}_c$)

$$\gamma = \beta = 0 \quad f = \alpha = g. \quad S = gh.$$

II. Paraboloidartige Körper ($\mathfrak{K}_p$).

$$\gamma = 0 \quad \beta = 0 \quad f = \alpha + \beta x \quad S = \tfrac{1}{2}(g + g')h = mh$$

Der Körper hat nur eine Nullfläche $\left(\text{für } x = -\frac{\alpha}{\beta}\right)$ und erstreckt sich von derselben nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ.

$$\gamma < 0.$$

III. Ellipsoidartige Körper ($\mathfrak{K}_e$).

$$\gamma = -\gamma'.$$

Der Körper hat zwei verschiedene Nullflächen und ist innerhalb beider positiv, ausserhalb negativ. Der grösste Schnitt M liegt mitten zwischen den Nullflächen, und es ist, wenn man den Abstand beider mit $2r$ und den zwischen ihnen liegenden Körper mit K bezeichnet,

$$M = \gamma' r^2 \quad K = \tfrac{4}{3} Mr = \tfrac{4}{3}\gamma' r^3$$

Weiter ist

$$S = \tfrac{1}{2}h(g + g' + \tfrac{1}{3}\gamma' h^2) = \tfrac{1}{2}h(g + g') + K'$$

wo K' einen an g und g' heranreichenden und zu K ähnlichen und ähnlich gelegenen Körper bedeutet.

Für $g' = 0$ ist

$$S = \tfrac{1}{3}\gamma' h^2(3r - h)$$

Vermehrt man im letzteren Fall S um einen Kegel, dessen Spitze in einem Punkt von M liegt, so erhält man einen zusammengesetzten Körper

$$Z = \tfrac{2}{3}\gamma' r^2 h = \tfrac{2}{3} Mh$$

$$\gamma > 0.$$

IV. Kegelartige Körper ($\mathfrak{K}_k$).

$$\beta^2 = 4\alpha\gamma$$

Der Körper besitzt eine Nullfläche (oder vielmehr zwei in eine

zusammengefallene) und erstreckt sich von derselben aus nach beiden Seiten zu positiv.

$$S = \frac{1}{3}h(g + \sqrt{gg'} + g')$$

und für $g' = 0$ ist $S = \frac{1}{3}gh$

V. Körper nach Art des einschaligen Hyperboloides ($\mathfrak{K}_h$). $\beta^2 < 4\alpha\gamma$.

Der Körper besitzt keine Nullflächen, sondern einen kleinsten Schnitt M positiven Inhaltes. Man ziehe nun einen Ergänzungskörper E hinzu, für welchen

$$f = \gamma x^2$$

und dessen Nullfläche in einem Punkte von M liegen mag. Für

$$x = \pm r$$

werde E in M geschnitten, und ausserdem sei R das zwischen diesen beiden Schnittebenen gelegene Volum des Körpers E_k.

Dann ist

$$M = \gamma r^2 \quad K = \frac{2}{3}Mr = \frac{2}{3}\gamma r^3$$

$$S = \frac{1}{2}h(g + g' - \frac{1}{3}\gamma h^2) = \frac{1}{2}h(g + g') - 2K' = hm + K'$$

wobei K' einen an g und g' heranreichenden und zu K ähnlichen und ähnlich gelegenen Körper bedeutet.

VI. Körper nach Art des zweischaligen Hyperboloids ($\mathfrak{K}_{hh}$) . $\beta^2 > 4\alpha\gamma > 0$.

Der Körper hat zwei verschiedene Nullflächen; zwischen denselben liegen negative Schnittflächen und ausserhalb positive. Der Abstand beider von einander sei gleich $2r$. Man ziehe nun wieder einen Ergänzungskörper E hinzu, für welchen

$$f = \gamma x^2$$

und dessen Nullfläche von denen des ursprünglichen Körpers die Entfernung r hat, bezeichne seine Schnittfläche im Abstand r mit M und den Teil des Körpers E zwischen den Nullflächen des gegebenen Körpers mit K. Man erhält dann für M, K und S dieselben Werte, wie in V.

Für $g' = 0$ ist

$$S = \frac{1}{3}\gamma h^2(3r + h)$$

und für den zusammengesetzten Körper Z, welcher aber diesmal als Differenz des Kegels und der Schicht S aufzufassen ist, gilt

$$Z = \tfrac{2}{3}\gamma r^2 h = \tfrac{2}{3} Mh$$

In Hinsicht auf die Nullflächen unterscheiden wir die Körper sonach in folgender Weise:

α) Körper ohne Nullflächen.

$\mathfrak{K}_e$. Sämtliche Schnittflächen sind einander gleich.

$\mathfrak{K}_h$. Die Schnittflächen sind nicht einander gleich.

β) Körper mit einer Nullfläche.

$\mathfrak{K}_p$. Die Schnittflächen haben auf beiden Seiten der Nullfläche entgegengesetzte Vorzeichen.

$\mathfrak{K}_k$. Die Schnittflächen sind auf beiden Seiten der Nullfläche positiv.

γ) Körper mit zwei Nullflächen.

$\mathfrak{K}_e$. Die Schnittflächen sind zwischen den Nullflächen positiv, innerhalb negativ.

$\mathfrak{K}_{hh}$. Die Schnittflächen sind ausserhalb der Nullflächen positiv, innerhalb negativ.

c)

Sind die Grundflächen g, g', der Mittelschnitt m und die Höhe h einer Schicht bekannt, so kann man hieraus die Abhängigkeit der Fläche f von ihrem Abstand von einer der Grundflächen, z. B. g', finden. Man erhält dann:

$$f = g' + (4m - g - 3g') \cdot \frac{x}{h} + (2g + 2g' - 4m) \frac{x^2}{h^2}$$

Hieraus ergiebt sich folgende Tabelle zur Bestimmung der Körperclassen aus m, g, g':

$m > \frac{g+g'}{2}$		$\mathfrak{K}_e$	$\gamma < 0$
$m = \frac{g+g'}{2}$	$g = g' (= m)$	$\mathfrak{K}_c$	$\gamma = \beta = 0$
	$g > g'$	$\mathfrak{K}_p$	$\gamma = 0 \; \beta \gtrless 0$
$m < \frac{g+g'}{2}$	$\sqrt{m} > \frac{\sqrt{g}+\sqrt{g'}}{2}$	$\mathfrak{K}_{hh}$ *	$\beta^2 > 4\alpha\gamma > 0$
	$\sqrt{m} = \frac{\sqrt{g}+\sqrt{g'}}{2}$	$\mathfrak{K}_k$*)	$\beta^2 = 4\alpha\gamma$
	$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{g'}}{2} > \sqrt{m} > \frac{\sqrt{g}-\sqrt{g'}}{2}$	$\mathfrak{K}_k$	$\beta^2 < 4\alpha\gamma$
	$\sqrt{m} = \frac{\sqrt{g}-\sqrt{g'}}{2}$	$\mathfrak{K}_k$ **)	$\beta^2 = 4\alpha\gamma$
	$\sqrt{m} < \frac{\sqrt{g}-\sqrt{g'}}{2}$	$\mathfrak{K}_{hh}$ **)	$\beta^2 > 4\alpha\gamma > 0$

d)

Zu den behandelten Körpern gehören vor allem diejenigen Räume, welche von Flächen zweiter Ordnung und einer oder zwei parallelen Ebenen begrenzt werden, unter der selbstverständlichen Bedingung, dass die Schnittcurven Ellipsen sind. Besonders muss hierbei erwähnt werden, dass negative Schnittflächen nicht vorkommen, da alsdann die Schnittellipsen imaginäre Halbachsen erhalten würden. Berücksichtigt man dies und zieht weiter die Lage der Flächen zweiter Ordnung gegen die Nullflächen — d. h. die den Schnittebenen parallelen Tangentialebenen — in Betracht, so erkennt man ohne Weiteres, wie sie sich in jene Classen einreihen, und dass die Benennung der Letzteren gerechtfertigt ist. Als Ergänzungskörper E der Hyperboloide wählt man am besten die Asymptotenkegel. Die Bedeutung von γ, r, M, K, K' ergiebt sich dann sofort.

So bestimmt beispielsweise auf einem dreiaxigen Ellipsoid oder zweischaligen Hyperboloid irgend eine Ellipse eine Kappe. Errichtet man über dieser Ellipse einen Kegel, welcher seine Spitze im Mittelpunkt der Fläche hat, so kann man den vom Kegelmantel und der Kappe begrenzten Körper einen ellipsoidischen, bzhw. hyperboloidischen Kegel nennen. Der Inhalt desselben ist $\frac{2}{3}\gamma r^2 h$; h ist hier die Höhe

*) Die Nullflächen liegen ausserhalb der Schicht.

**) Die Nullflächen liegen innerhalb der Schicht.

der Kappe, r der Abstand des Mittelpunkts von der der Ellipsenebene parallelen Tangentialebene und $\gamma = \frac{M}{r^2}$, wo M beim Ellipsoid der Inhalt derjenigen Ellipse ist, deren Ebene der Basis der Kappe parallel liegt, und welche ausserdem den Ellipsoid-Mittelpunkt zum Mittelpunkt hat. Beim Hyperboloid ist M der Inhalt der Ellipse, in welcher die Tangentialebene den Asymptotenkegel schneidet. Bei der Kugel ist natürlich stets $\gamma = \pi$; beim allgemeinen Ellipsoid giebt es unendlich viele Tangentialebenen, für welche $\gamma = \pi$. Dieselben berühren zugleich die dem Ellipsoid gleiche und concentrische Kugel.

e)

Was die Polyeder betrifft, so gehören offenbar die Prismen zu den $\mathfrak{K}_c$ und die Pyramiden zu den $\mathfrak{K}_k$. Als einfachsten Körper der K_p erhält man das dreiseitige Prisma, wenn man eines der begrenzenden Pärallelogramme als Grundfläche auffasst. Da man nun den Obelisk und das Prismatoid als algebraische Summe von Polyedern der genannten drei Arten darstellen kann, so muss auch ein jedes Exemplar dieser beiden allgemeinen Körpergattungen einer der sechs Körperclassen angehören. So kann man bekanntlich das Tetraeder als ein Prismatoid auffassen, dessen Grundflächen zu zwei Gegenkanten ausgeartet sind. Dieser Körper gehört sonach zu den $\mathfrak{K}_e$, da er zwischen zwei Nullflächen liegt Ferner kann ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma als Obelisk aufgefasst werden, welcher das eine der begrenzenden Trapeze zur Grundfläche und die gegenüberliegende Seitenkante zur Schneide hat. Das Prisma ist dann ein $\mathfrak{K}_e$, wenn die längste Seitenkante Schneide ist (s. die Tabelle in e,) und ein $\mathfrak{K}_{hh}$, wenn es die kürzeste ist, ausserdem ein $\mathfrak{K}_k$, wenn die kürzeste Seitenkante zugleich null ist. Ist die mittlere Seitenkante Schneide, so kommt es darauf an, ob sie der Mittelparallelen des gegenüberliegenden Trapezes gleich ist, oder ob grösser oder kleiner, als dieselbe. Je nachdem ist der Körper ein $\mathfrak{K}_p$, $\mathfrak{K}_e$ oder $\mathfrak{K}_{hh}$. U. s. w.

Die bei den Polyedern vorkommenden Nullflächen arten im allgemeinen nicht gerade zu Punkten oder Schneiden aus; vielmehr ist hierbei folgendes zu beachten. Erweitert man die Seitenflächen eines $n$seitigen Obelisken über die Grundflächen hinaus nach beiden Seiten bis in das Unendliche, so werden sich die Seitenkanten desselben in den Seitenflächen in n verschiedenen Punkten schneiden.

Die zwischen zwei solchen Punkten auf der einen Seite der Grundfläche liegenden Schnittflächen sind Figuren mit sich selbst kreuzenden Umfängen und bestehen daher aus Teilen, die teils positiv, teils negativ zu nehmen sind. Die Schnittfigur ist nun gleich null, wenn die positiven Teile den negativen gleich sind.

Ein dreiseitiger Pyramidenstumpf z. B. kann als $\mathfrak{K}_p$ aufgefasst werden, wenn man eines der begrenzenden Trapeze zur Grundfläche wählt. Von den Ecken derselben gehen dann vier in das Unendliche zu verlängernde Seitenkanten aus, während die noch übrig gebliebene der Grundfläche gegenüberliegende Pyramidenkante aufgehört hat, Grenzkante des Körpers zu sein. Legt man nun einen der Grundfläche parallelen Schnitt, welcher die zuletztgenannte Kante halbirt, so besteht derselbe aus zwei congruenten Dreiecken verschiedenen Vorzeichens. Derselbe ist demnach die Nullfläche des Körpers $\mathfrak{K}_p$.

f)

Schneidet man eine beliebige Regelfläche durch eine Ebene so, dass die Schnittcurve in sich selbst zurückkehrt, so ist dies bei jeder parallelen (im Abstand x) Schnittebene der Fall, und genauer ist die Grösse der Schnittfigur

$$f = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

wobei die Grössen α, β, γ von der Regelfläche und der Lage der ersten Ebene abhangen; oder mit anderen Worten: Schliesst eine beliebige Regelfläche im Verein mit zwei parallelen Ebenen einen Raum vollständig ein, so gehört derselbe einer der in *b)* genannten sechs Körperarten an. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist ohne Weiteres ersichtlich, wenn die Regelfläche eine abwickelbare ist; denn alsdann kann der entstandene Körper als ein Obelisk mit unendlich vielen Seiten aufgefasst werden. Die windschiefen Regelflächen hingegen bedürfen einer eingehenderen Behandlung.

α) (Fig. 2.) Gegeben eine feste Ebene E und eine feste, nicht geschlossene, ebene Curve S (Schneide). Eine veränderliche Gerade möge sich stetig so bewegen, dass sie immer parallel E bleibt und dabei zweimal entlang S gleitet, so dass sie am Schluss wieder ihre Anfangslage einnimmt. Es wird sodann behauptet, die entstandene Regelfläche bilde einen $\mathfrak{K}_p$, welcher die Ebene durch S natürlich zur Nullfläche hat.

Beweis. Man schneide die Regelfläche durch zwei Ebenen parallel der Ebene durch S in den Abständen x und x', wodurch die Schnittfiguren f und f' entstehen, und ausserdem durch zwei Ebenen parallel E, sodass in den Letzteren die Dreiecke $U\Delta B$ mit $A'B' \parallel AB$ und VCD mit $C'D' \parallel CD$ liegen, und zwar mögen diese Dreiecke sich so nahe an einander befinden, dass die Bogen AD, BC, $A'D'$, $B'C'$, UV durch ihre Sehnen ersetzt werden können. Alsdann stimmen die Trapeze $ABCD$ und $A'B'C'D'$ in den Höhen überein, während ihre Grundlinien sich wie x zu x' verhalten. Sonach stehen auch ihre Flächen im selben Verhältniss, und es ist demnach auch

$$f : f' = x : x' \quad \text{oder} \quad f = \beta x, \quad \text{wenn} \quad \beta = f' : x'$$

β) Die Gerade bewege sich parallel E, gleite jedoch über zwei geschlossene, in parallelen Ebenen gelegene Curven hin. (Fig. 2) Man kann dann den Körper in einen Cylinder und in zwei Körper der in α) besprochenen Art zerlegen. Mithin ist dann

$$f = \alpha + \beta x$$

Führt man g', g und h ein, so ist

$$\alpha = g', \quad \beta = \frac{g - g'}{h}$$

γ) Die Gerade bewege sich zwei in parallelen Ebenen liegenden geschlossenen Curven entlang. (Fig. 3.) Alsdann nehme man im Innern der einen Curve einen beliebigen Punkt S und lasse eine immer durch ihn gehende Gerade sich so bewegen, dass sie der ersten veränderlichen Geraden stets parallel bleibt. Sie beschreibt auf diese Weise einen Kegel, dessen Grundfläche i in der Ebene der zweiten Curve liegen mag. Es seien nun AE und BF zwei benachbarte Kanten der Regelfläche und $SD \parallel ED$, $SC \parallel BF$. Alsdann ist das Körperelement $ABCDSEF$ nach β) ein Körper $\mathfrak{K}_p$, für welchen die Ebene E durch die Tangentialebene SCD des Kegels gebildet wird. Nimmt man dann den Kegel von der ganzen Körperschicht fort, so kann man den Restkörper mit den Grundflächen g' und $g - i$ in unendlich viele Körperelemente zerlegen und erhält somit für einen beliebigen Schnitt dieses Restkörpers die Formel

$$f = g' + \frac{g - g' - i}{h} x$$

Sonach gilt für die Schnittfigur des ganzen Körpers

$$f = g' + \frac{g - g' - i}{h} x + \frac{i}{h^2} x^2$$

Hiermit ist die zu Anfang des Abschnittes f aufgestellte Behauptung vollständig erwiesen.

Aus diesem Satze ergiebt sich als specieller Fall der folgende. (Fig. 4).

„Gleitet eine Gerade über zwei in parallelen Ebenen liegende, „nicht geschlossene, Curven zweimal hinweg, und kehrt sie dabei zu „ihrer Anfangsstellung zurück, so ist der durch sie erzeugte Körper „zwischen den Ebenen ein $\mathfrak{K}_e$ und der ausserhalb gelegene ein $\mathfrak{K}_{hk}$."

Wird der Abstand beider Ebenen wieder gleich $2r$ gesetzt, so ist

$$f = \gamma x (2r - x)$$

wo γ ein von der Bewegung der Geraden abhängiger Factor ist. Derselbe lässt sich unter Umständen bestimmen, wenn man wieder den Hilfskegel hinzunimmt, dessen Spitze in der Ebene der einen Curve liegt, und dessen Kanten den Geraden der Regelfläche parallel sind. Der Mittelschnitt dieses Kegels ist gleich γr^2.

Einen besonders interessanten Specialfall erhält man, wenn der Hilfskegel ein gerader Kreiskegel ist, da dessen Seitenkanten mit parallelen Ebenen gleiche Winkel bilden, und sämtlich von derselben Länge ($= 2l$) sind, Eigenschaften, welche sich auf die Geraden der Regelfläche übertragen. Auf diese Weise gelangt man zu dem Satze:

„Liegen in zwei unter dem Abstand $2r$ parallelen Ebenen zwei „beliebige, nicht geschlossene, Curven, und werden dieselben von „den Endpunkten einer Strecke, deren Länge unveränderlich $= 2l$, „durchlaufen, so ist der entstandene Körper $= \frac{4}{3}\pi r (l^2 - r^2)$".

Für den Fall geradliniger Bahnen wurde der Satz bereits von Steiner *) aufgestellt.

Für die Zahl γ erhält man

$$\gamma = \pi \frac{l^2 - r^2}{r^2} = \pi \cdot \cot^2 \omega$$

wenn ω die unveränderliche Neigung der Geraden gegen die Ebenen ist. Es liege nun ein Punkt auf der Strecke so, dass er von ihren

*) Steiners gesammelte Werke. II. Bd. S. 318.

Endpunkten immer die Entfernungen a und $b = 2l - a$ hat. Dann ist der Abstand desselben von der einen Ebene

$$x = a \, . \sin \omega$$

also unveränderlich. Der Punkt beschreibt daher eine ebene Curve und zwar eine solche, welche die zu x gehörige Schnittfigur eingrenzt und somit ergiebt sich für dieselbe der Wert

$$f = \gamma x(2r - x) = \pi ab \cos^2\omega. \quad \text{D. h.:}$$

„Durchlaufen die Endpunkte einer Strecke von unveränderlicher „Länge zwei in parallelen Ebenen liegende, beliebige, nicht ge- „schlossene, Curven, und bewegt sich ein Punkt derselben, welcher „von den Endpunkten die unveränderlichen Abstände a und b hat, „auf einer in sich zurückkehrenden Bahn, so ist das von dieser „Bahn umschlossene Flächenstück gleich $\pi ab \cos^2\omega$, wobei ω die „Neigung der Strecke gegen die Ebene bedeutet."

Der Satz gilt auch dann, wenn die Curven in einer Ebene liegen, wie man für $\omega = 0$ oder durch Parallelprojection erhält. Für diesen besonderen Fall wurde er bereits vom jüngeren Herrn Amsler im Anschluss an den Polarplanimeter seines Vaters gefunden.

Endlich wähle man auf dem Umfang einer beliebigen, geschlossenen, ebenen Figur zwei Punkte und lasse dieselben zwei schiefe Geraden durchlaufen. Gleichzeitig bewege man die Figur parallel sich selbst und lasse hierbei die Gestalt ungeändert. Projicirt man nun dieses bewegliche Gebilde durch Parallelstrahlen beliebiger Richtung auf eine parallele Ebene, so wird in derselben ein ähnlich veränderliches System bestimmt, von welchem zwei Punkte gerade Linien durchlaufen. Alsdann müssen aber auch alle übrigen Punkte sich auf geradlinigen Bahnen bewegen*), d. h. es müssen sich die Bahnen der Punkte der im Raume bewegten Figur als gerade Linien projiciren und selbst gerade Linien sein, da die Projections-Richtung willkürlich ist. Nimmt man nun umgekehrt in zwei parallelen Ebenen zwei ähnliche, aber nicht ähnlich gelegene, Figuren an und lässt eine Gerade so über die Umfänge beider hingleiten, dass sie stets ein entsprechendes Punktpaar verbindet, so entsteht eine windschiefe Fläche von folgender Eigenschaft: Schneidet

*) S. Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen u. s. w. Zeitschrift f. Math. u. Physik. XIX, S. 156.

man dieselbe durch eine dritte parallele Ebene, so ist die entstandene Figur der beiden ersten ähnlich, und zwar kann dieselbe niemals zu einem Punkte oder einer Linie ausarten. Daher der Satz:

„Die Schicht einer Regelfläche mit ähnlichen, aber nicht ähn„lich gelegenen Grundflächen ist ein K_h, wenn die Seitenkanten ent„sprechende Punktpaare verbinden. Jeder ebene Schnitt, parallel „den Grundflächen, ist eine denselben ähnliche Figur“.

XXI.

Bemerkung über eine Eigenschaft der Resultante zweier ganzen Functionen.

Von

Gerhard Kowalewski

in Birnbaum, Prov. Posen.

In Gordans Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von Dr. Georg Kerschensteiner (Leipzig, Teubner. 1885) findet sich Band I, Seite 151, nachdem gezeigt worden ist, dass für die Resultante

$$R_{f,\varphi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_m & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & \ldots & a_m \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 & b_1 & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

zweier Functionen

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$
$$\varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n$$

die Beziehung besteht

$$R_{f,\varphi} = R_{c+\varphi.\psi,\,\varphi}$$

wenn unter $\psi(x)$ eine ganze Function vom Grade

$$q \leqq m - n$$

(wobei $m > n$) verstanden wird, die folgende Anmerkung:

„Indem wir die Einschränkung machten

$$q \leqq m - n$$

„setzen wir, wie schon mehrmals erwähnt, voraus $m > n$.
„Es wäre eine schätzenswerte Arbeit, auch den Fall zu
„untersuchen, in welchem $m < n$ ist, d. h. allgemein die
„Frage zu behandeln: Wie hangen die Resultate $R_{f+\varphi.\psi,\varphi}$
„und $R_{f,\varphi}$ zusammen, wenn wir über den Grad der
„dies bezüglichen Functionen keinerlei Voraussetzungen
„machen?"

Diese Frage zu erledigen ist der Zweck der folgenden Mitteilung.

Die Resultante $R_{f,\varphi}$ lässt sich immer (vgl. Gordan, a. a. O. Seite 154) als n-reihige Functionaldeterminante schreiben:

$$R_{f,\varphi} = (-1)^{mn} b_0{}^m \begin{pmatrix} \overline{x^{n-1} f}, & \overline{x^{n-2} f}, & \ldots & \overline{x^0 f} \\ x^{n-1}, & x^{n-2}, & \ldots & x^0 \end{pmatrix} .$$

Dabei soll die Ueberstreichung der Functionen $x^{n-1} f, \ldots, x^0 f$ bedeuten, dass man sie durch die n Reste zu ersetzen hat, welche sich durch Division mit $\varphi(x)$ ergeben.

Ist nun m' der Grad von $f + \varphi \cdot \psi$, so hat man aus demselben Grunde:

$$R_{f+\varphi.\psi,\varphi} = (-1)^{m'n} b_0{}^{m'} \begin{pmatrix} \overline{x^{n-1}(f+\varphi\,.\,\psi)}, & \ldots & \overline{x^0(f+\varphi\,.\,\psi)} \\ x^{n-1}, & \ldots & x^0 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist wegen

$$x^i(f + \varphi \cdot \psi) \equiv x^i f \pmod{\varphi}$$

und wegen der Bedeutung der Ueberstreichung:

$$\overline{x^i(f + \varphi\,.\,\psi)} = \overline{x_i f} \quad (i = 0, 1 \ldots, n-1)$$

mithin

$$R_{f+\varphi.\psi,\varphi} = (-1)^{m'n} b_0{}^{m'} \begin{pmatrix} \overline{x^{n-1} f}, & \overline{x^{n-2} f} & \ldots & \overline{x^0 f} \\ x^{n-1}, & x^{n-2}, & \ldots & x^0 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung, mit derjenigen für $R_{f,\varphi}$ verglichen, giebt:

$$R_{f+\varphi.\psi,\varphi} = (-1)^{(m'-m)n} b_0^{m'-m} R_{f,\varphi}$$

Das Resultat lässt sich einfacher schreiben, wenn man benutzt, dass

$$R_{f,\varphi} = (-1)^{mn} R_{\varphi,f}, \quad R_{f+\varphi.\psi.\varphi} = {}^{m'n} R_{\varphi,f+\varphi\psi}$$

ist. (vgl. Gordan, a. a. O. Seite 146.)

Man erhält so:

$$R_{\varphi,f+\varphi.\psi} = b_0^{m'-m} R_{\varphi,f}$$

Addirt man also zu der zweiten Function in $R_{\varphi,f}$ die erste, multiplicirt mit einer beliebigen ganzen Function $\psi(x)$, so reproducirt sich $R_{\varphi,f}$ multiplicirt mit einer Potenz von b_0, deren Exponent die eingetretene Erhöhung (Erniedrigung als negative Erhöhung gerechnet) des Grades der zweiten Function angiebt.

Hierbei sind über den Grad der auftretenden Functionen keinerlei Voraussetzungen gemacht, und es wäre demnach die in der oben citirten Anmerkung aufgestellte Frage vollständig erledigt. Zugleich ist für den schon bei Gordan erledigten speciellen Fall

$$m' = m$$

ein neuer Beweis geliefert.

Anmerkung: Nachträglich bemerke ich, dass in dem Lehrbuch der Algebra von Weber (2. Heft, Band I. S. 176, Formel 10) das Resultat dieser Notiz enthalten ist. Die Ableitung von Weber ist allerdings eine andre als die hier gegebene und benutzt den Ausdruck der Resultante durch die Wurzeln der beiden Gleichungen.

XXII.

Dynamische Betrachtungen.

Von

Th. Schwartze.

Von Galilei ist auf Grund der Wahrnehmung der Muskelkraft das gegenwärtig in der Physik noch gültige Mass der Kraft im Product der Masse M und der Beschleunigung der irdischen Schwerkraft festgestellt worden, so dass bei der Bezeichnung der Kraft mit F die Gleichung gilt:

$$F = Mg$$

Hierbei ist das Symbol M der Masse nur als ein Wertigkeitsfactor der Kraft anzusehen, welche für die Einheit der Masse ($M^0 = 1$) dem Zahlenwerte nach gleich der Beschleunigung ist.

Von Newton wurde der Kraftbegriff weiter ausgebildet und in der Bedeutung einer Function zwischen Masse und Raumstrecke aufgefasst, indem er das Product der als Wirkung und Gegenwirkung in Beziehung tretenden Massen m_1 und m_2 direct proportional der zweiten Potenz der zwischen den beiden Massenmittelpunkten vorhandenen und also in Mitwirkung tretenden Raumstrecke r setzte. Mit Rücksicht hierauf ergab sich die Gleichung:

$$F = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

oder für

$$m_1 = m_2 = m$$

die gewöhnliche Formel

$$F = \frac{m^2}{r^2}$$

Hierbei kann mit Bezug auf das beliebig zu wählende Masssystem dem zweiten Gliede noch der Factor k zur Bestimmung des numerischen Wertes der Kraft beigefügt werden.

Diese Newton'sche Kraftformel deutet auf den Begriff der Centralkraft hin und gilt nicht nur für ponderable Massen, sondern auch (in der Formel des Coulomb'schen Gesetzes) für unponderable Massen, wie solche bezüglich der Erscheinungen der Elektricität, des Magnetismus, der Wärme, des Lichtes und Schalles inbetracht zu ziehen sind. Da die bei den im freien Raume concentrisch in Kugelflächen sich ausbreitenden Centralkräften die zweite Potenz des vom Centrum ausgehenden Kraftstrahles der entsprechenden Kugelfläche direct proportional ist, so wird durch die Grösse r^2 eigentlich die Flächengrösse zum Ausdruck gebracht und es bedeutet daher die Kraft F die Anzahl der aus der gegenseitigen Massenwirkung sich ergebenden Wirkungseinheiten, welche auf die Flächeneinheit entfallen. Demnach entspricht das Product

$$F \cdot r^2 = m^2$$

der wirksamen Gesamtkraft einer durch die Centralkraft entwickelten Aequipotentialfläche. Es folgt daraus der Begriff des Gegeneinanderwirkens eines inneren und äusseren Kraftfeldes, welcher Begriff z. B. durch den Ballungsact eines im Raume sich bildenden Weltkörpers veranschaulicht wird, wobei die bleibende Gravitationswirkung als ein Nachhall dieses Ballungsactes angesehen werden kann.

Setzt man

$$Mg = \frac{m^2}{r^2}$$

und nimmt man an, dass

$$M = m^2$$

die Gesamtmasse des Systems ausdrückt, so ist

$$g = \frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{r}\right)^2$$

Die Beschleunigung g und die Beschleunigungswirkung der Kraftentfaltung im allgemeinen: ist als eine vom Nullpunkte der Geschwindigkeit bis zu einer gewissen relativ oder absolut genommenen Geschwindigkeitsgrenze v anwachsende Wirkungsgrösse anzusehen, welche durch die beim Aufhören der Beschleunigung hervortretende Geschwindigkeit gemessen wird, wobei der Zeitverlauf des dynamischen Vorganges als die specifische Zeiteinheit der Kraftentfaltung angesehen werden kann, so dass die Endgeschwindigkeit v dem rela-

tiven bzhw. dem absoluten Maximum der Kraftentfaltung entspricht. Die Grenzen des dynamischen Vorganges liegen also zwischen dem statischen Zustande der zeitlosen Ruhe und der zeitlosen, weil unveränderlichen Geschwindigkeit, welche durch das feste Verhältniss von Kraftstrecke und specifischer Zeiteinheit gegeben ist.

Indem also die Beschleunigung im positiven Sinne dem Uebergange des Ruhezustandes in den Geschwindigkeitszustand und im negativen Sinne der Umkehrung dieses Ueberganges entspricht, muss ihre Grösse in jedem Augenblicke des dynamischen Vorganges aus dem Product zweier Factoren: Druck und Geschwindigkeit hervorgehen. Dies gilt natürlich auch für die Kraft, welche bezüglich der Masseneinheit der Beschleunigung gleichwertig ist. Hiernach gewinnt man für jeden Augenblick der auf Beschleunigung beruhenden Kraftenthaltung für die momentane Wertigkeit der Kraft den Ausdruck

$$v \,.\, c = \frac{v^2}{2}, \quad \text{wobei} \quad c = \frac{v}{2}$$

als constanter Wert der mittleren Geschwindigkeit dem Drucke oder der wirksamen Spannung zwischen Wirkung und Gegenwirkung entspricht. Den Ausdruck $\frac{v^2}{2}$ hat man, mit Bezug auf die Masseneinheit, als die lebendige Kraft bezeichnet. Zu diesem Ausdrucke gelangt man auch durch die folgende Betrachtung.

Die Beschleunigung g, welche durch die am Ende der ersten Secunde der freien Fallbewegung eines ponderablen Moleküls entwickelte Geschwindigkeit gemessen wird, ist in ihrer Wirkungsgrösse am Ende der zweiten Secunde sowol der zurückgelegten Kraftstrecke

$$\tfrac{1}{2} g t^2 = 2g = s$$

als auch der relativen Endgeschwindigkeit

$$v = 2g$$

proportional. Beide Wirkungsfactoren sind gleich, so dass ein relatives Maximum der Wirkung vorhanden ist. Die momentane Wirkungsgrösse selbst ist aber durch das Product

$$s \,.\, v = v^2$$

zu messen. Reducirt man diese in zwei Zeitintervallen zustande gekommenen Wirkungsgrösse auf das erste Zeitintervall, so ergiebt sich wieder der für die lebendige Kraft geltende Ausdruck $\frac{v^2}{2}$.

Indem man nun mit Bezug auf die vorher aufgestellte Gleichung

$$g = \frac{1}{r^2}$$

die Raum- oder Kraftstrecke r als Mass des Zeitverlaufs ansieht und r der Zeit t proportional setzt, erhält man

$$g = \frac{1}{t^2} \quad \text{und also} \quad \sqrt{g} = \frac{1}{t}$$

Es entspricht aber der Quotient $\frac{1}{t}$ der sogenannten Winkelgeschwindigkeit und $\frac{1}{t^2}$ der Winkelbeschleunigung. Diese Begriffe gelten auch für die relativ unendliche Strecke s, für welche die kreisende Bewegung zwischen beliebigen Grenzen als geradlinig gelten kann. Demnach haben die Ausdrücke

$$\sqrt{g} = \frac{1}{t} \quad \text{und} \quad g = \frac{v^2}{2} = \frac{1}{t^2}$$

ganz allgemeine Bedeutung, indem man bei jedem Vorgange der Kraftentfaltung in der Hauptsache nur zwei Zeitintervalle zu unterscheiden hat, nämlich das Zeitintervall der variabeln oder dynamischen Wirkung und das Zeitintervall der als Ruhezustand oder als Geschwindigkeit auftretenden stationären oder constanten Wirkung, wie dies schon von Hamilton durch Aufstellung des Princips der variabeln und der stationären Action angedeutet worden ist.

Mit Bezug auf die mittlere Geschwindigkeit

$$c = \frac{v}{2}$$

ergiebt sich als Ausdruck für die lebendige Kraft

$$c^2 = \frac{v^2}{4}$$

Mit Bezug auf das von Lagrange an die Stelle des Princips des Maximums und Minimums gesetzten Princips der grössten und kleinsten lebendigen Kraft ist $\frac{v^2}{2}$ als das Symbol der grössten und $\frac{v^2}{4}$ als das Symbol der kleinsten lebendigen Kraft anzusehen, welche letztere im stationären oder statischen Zustande in Betracht zu ziehen ist.

Die im 4. Hefte des Jahrganges 1897 dieses Archivs entwickelte allgemeine Gleichung der Dynamik:

$$\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} = R_1 R_0 \operatorname{cotang} \alpha \cos \varphi$$

geht bei Gleichheit der die Gleichungen

$$\frac{R_1^2}{2} = v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2 \cos \alpha \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\frac{R_2^2}{2} = v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2 \cos \alpha \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

bildenden Elementarkräfte v_1 und v_2 in die Form über

$$\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} = R_1 R_2 \operatorname{cotang} \pi \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

indem durch die Gleichung

$$\cos \varphi = \frac{2 v_1 v_2 \sin \alpha}{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2)^2 + 4 v_1^2 v_2^2 \cos^2 \alpha}}$$

bestimmte sogenannte Compensationswinkel gleich eins wird. Es entspricht aber der Winkel φ dem Complement des kleinsten Winkels γ, welchen die Resultanten R_1 und R_2 mit einander einschliessen, wie in dem früher veröffentlichten Artikel nachgewiesen worden ist.

Addirt man in Gleichung (3) beiderseits R_2^2, so ergiebt sich:

$$\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_2^2}{2} = R_2^2 + R_1 R_2 \operatorname{cotang} \alpha$$

oder auch

$$\frac{R_1^2}{4} + \frac{R_2^2}{4} = \frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1 R_2}{2} \operatorname{cotang} \alpha$$

Diese Gleichung entspricht einer Kreislinie, deren Durchmesser

$$D = \sqrt{\frac{R_1^2}{4} + \frac{R_2^2}{4}}$$

ist, wie aus Fig. 1 auf Tafel III. ersichtlich ist, worin m der in der Kreislinie liegende Durchschnittspunkt der Resultanten

$$ac = R_1 \quad \text{und} \quad bd = R_2$$

ist; die den Seiten des Parallelogramms *abcd* entsprechenden Elementarkräfte sind hierbei gleich. Der Winkel *dab* ist gleich α gesetzt und ist stets kleiner als 90^0, indem der rechte Winkel seinen

Grenzwert bildet, so dass bei Ueberschreitung dieses Grenzwertes der diametral liegende Winkel in Betracht kommt. In der Figur ist also

$$am = \frac{R_1}{2} \quad \text{und} \quad bm = \frac{R_2}{2}$$

so dass die Gleichung gilt:

$$D^2 = \frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1 R_2}{2} \operatorname{cotang} \alpha$$

und

$$D^2 = \frac{R_1^2}{4} + \frac{R_2^2}{4}$$

einer constanten Summe entspricht.

Wird R_2 unendlich klein, so ist $R^2 = 0$ und anstatt R_2 das Differential dR_2 zu setzen. Der Winkel α nähert sich dabei dem Grenzwerte null, so dass $\operatorname{cotg} \alpha$ in $\frac{1}{d\alpha}$ übergeht. Es besteht demnach die Gleichung:

$$\frac{R_1^2}{4} = D^2 = \frac{R_1}{2} \frac{R_2}{d\alpha}$$

Für

$$v_1 = v_2 = v \quad \text{und} \quad \cos \alpha = 1$$

folgt aus Gleichung (1)

$$\frac{R_1^2}{4} = v^2 \quad \text{und} \quad \frac{R_1}{2} = v$$

Aus Gleichung (2) folgt für

$$R_2^2 = 2v^2(1 - \cos \alpha) = 4v^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

demnach ist für den der Grenze null sich nähernden Winkel α zu setzen

$$\frac{dR_2}{2d\alpha} = v$$

Man erhält also die identische Gleichung:

$$v^2 = v \, . \, v$$

Aus der Figur folgt, dass bei der kreisenden Bewegung die Punkte der Wirkung und Gegenwirkung diametral zu einander in der Kreisbahn liegen und dass also, wenn der eine Wirkungspunkt sich im Maximum seiner Geschwindigkeitsentfaltung befindet, der diametrale Gegenpunkt in das entsprechende Minimum einge-

treten und also relativ in Ruhe ist. Es folgt daraus aber auch, dass das Kraftcentrum oder der Massenmittelpunkt des kreisenden Systems an der kreisenden Bewegung teilnimmt, indem das ganze System um Momentanachsen rotirt. In der Tat entspricht diese Anschauung dem bekannten Satze, dass unter der Einwirkung äusserer Kräfte sich alles so verhält, als wenn alle Massen und Kräfte in diesem Punkte vereinigt wären und das System im übrigen nicht existirte.

Wird nun mit Bezug auf die vom Massenmittelpunkte durchlaufene Kreisbahn, deren Radius der specifischen Einheit der radicalen Kraftstrecke entspricht, die Tangentialgeschwindigkeit unter der Bezeichnung „Winkelgeschwindigkeit" gleich w, so ist natürlich die Geschwindigkeit der kreisenden Bewegung, die hier als Wellenbewegung charakterisirt ist, in der Entfernung r von dem geometrischen Drehungscentrum durch

$$rw = v$$

gegeben. Es muss daher das physische Drehungscentrum, welches den momentanen Drehachsen entspricht und sich selbst in kreisender, oder im allgemeinen in schwingender Bewegung befindet, vom geometrischen Drehungscentrum unterschieden werden. Hierauf begründet sich die Erklärung der Präcession und Nulation frei rotirender Körper.

Zerlegt man also v in seine beiden Factoren w und r und zieht man den Drehungsradius r, sowie die Winkelbeschleunigung w^2 in Betracht, so kann man die Grösse v^2, welche als Potential zu bezeichnen ist, in die Factoren r und $w^2 r$ zerlegen, wobei

$$w^2 r = p$$

als Centripetal- oder Centrifugalbeschleunigung bezeichnet wird. Man erhält also die gewöhnliche Gleichung der kreisenden Bewegung in der Form

$$v^2 = pr$$

wobei v^2 der kleinsten lebendigen Kraft $\frac{R_1^2}{4}$ entspricht.

Wird in diese Gleichung die Winkelgeschwindigkeit

$$w = \frac{v}{r}$$

eingeführt, so ergiebt sich:

$$w = \sqrt{\frac{p}{r}}$$

oder, da $w = \frac{1}{t}$ zu setzen ist, und wenn $p = g$ gesetzt wird:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}$$

Hierdurch wird die Zeit für kleine isochrone Pendelschwingungen zum Ausdruck gebracht.

Das Gesetz der auf Wirkung und Gegenwirkung beruhenden Zusammensetzung der Kräfte lässt sich in einfacher Weise aus dem Ausdrucke der Centralkraft ableiten.

Der dreidimensionale Raum wird durch drei auf einander senkrechte Ebenen in acht Würfelecken bzhw. in acht gleich grosse Würfel eingeteilt, deren Kante als lineare Kraftstrecke durch v bezeichnet sein mag. Die Gesamtwirkung des Kraftfeldes wird daher durch das Symbol $8v^3$ ausgedrückt. Wird das ganze Kraftfeld als Würfel gedacht und seine Wirkungsgrösse auf die sechs Würfelseiten verteilt, so entfällt auf eine Würfelseite und also auf jede der sechs Raumrichtungen (Zenith, Nodir, Osten, Westen, Süden, Norden) die Wirkungsgrösse

$$\tfrac{8}{6}v^3 = \tfrac{4}{3}v^3$$

Differentiirt man diesen Ausdruck, so erhält man:

$$\tfrac{4}{3}\,2(v^2) = 4v^2 \,.\, dv$$

Es ist aber

$$dv = \frac{d^2s}{dt^2}$$

und es entspricht dv dem Begriffe der Beschleunigung, also einer von null bis zur specifischen Einheit anwachsenden Grösse, so dass also dv im positiven Sinne durch die Winkelfunction des Cosinus, im negativen Sinne durch die Winkelfunction des Sinus ausgedrückt werden kann, wobei diese Functionen als gegenseitige Differentiale zur Geltung kommen, indem der Cosinus dem Wachstum (bzhw. der Beschleunigung) des Sinus und der Sinus dem Wachstum (bzhw. der Beschleunigung) des Cosinus entspricht.

Wir setzen demnach:

$$4v_1^2\cos^2\frac{\alpha}{2} = R_1^2 \quad \text{und} \quad 4v_2^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = R_2^2$$

sodass

$$R_1^2 = vv_1^2(1+\cos\alpha) \quad \text{und} \quad R_2^2 = 2v^{22}(1-\cos\alpha)$$

woraus sich die schon früher aufgestellten Gleichungen der Elementar-

kräfte mit Bezug auf die verschiedene Grösse der sich zusammensetzenden Kraftgrössen ergeben.

Berücksichtigt man die von Lagrange aufgestellte Grundgleichung der Statik:

$$P_1 \; dp_1 + P_2 \, . \, dp_2 + \, . \; . \; . + P_n \; dp_n = 0$$

so ist klar, dass dieselbe sich auf zwei Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen reduciren lässt, so dass man setzen kann:

$$P \, . \, dp - Q \, . \, dq = 0$$

Diese Gleichung erhält eine dynamische Bedeutung, wenn anstatt null eine endliche Grösse gesetzt wird, indem man schreibt:

$$P \, . \, dp - Q \, . \, dq = U$$

Mit Bezug auf die obigen Entwickelungen können aber die Beziehungen angenommen werden:

$$P \, . \, dp = R_1^2 \quad \text{und} \quad Q \, . \, dq = R_2^2$$

woraus unter der Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (2) folgt

$$R_1^2 - R_2^2 = 4 v_1 v_2 \cos \alpha$$

Hieraus ergiebt sich aber, dass an Stelle der von Lagrange aufgestellten allgemeinen Grundgleichung die vorhin aus dem Begriffe der Centralkraft bzhw. der virtuellen Momente entwickelte Gleichung:

$$\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2} = R_1 R_2 \operatorname{cotang} \alpha \cos \varphi$$

gesetzt werden kann, welche man in ihrer Zusammensetzung der Form der berühmten Maxwell'schen Gleichungen über die magnet-elektrische Wellentheorie zu Grunde gelegt hat.

XXII.

Einige Bemerkungen zur Lagrange'schen Interpolationsformel.

Von

Wladimir Lewicky in Tarnopol.

---

1. Wie bekannt, gebraucht man jene Formel nur eine rationale Function n ten Grades $y = f(x)$, die den Werten

$$x = x_1\ x_2\ y_3\ .\ .\ .\ x_{n+1}$$

zugeordnete Functionswerte

$$y = y_1\ y_2\ y_3\ .\ .\ .\ y_{n+1}$$

annehmen soll, zu bilden.

Hat nämlich jene Function die Gestalt

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .\ .\ . + a_n x^n = f(x) \tag{1}$$

so soll eine Reihe folgender Gleichungen stattfinden:

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + .\ .\ . + a_n x_1^n$$
$$y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + .\ .\ . + a_u x_2^n$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$y_{n+1} = a_0 + a_1 x_{u+4} + a_2 x_{n+1}^2 + .\ .\ . + a_n x_{n+1}^n$$

Fasst man diese $(n+2)$ Gleichungen (Gleichung 1 mitgerechnet) als linear in den Unbekannten -1, a_0, a_1, . . . a_n auf, so wird die Determinante dieses Gleichungssystemes:

$$
\Delta = \begin{vmatrix} y & 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = 0
$$

Ordnen wir dieselbe nach der ersten Colonne, so bekommen wir folgende Function:

$$
y(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_{n+1})(x_2-x_3)\dots(x_2-x_{n+1}\dots
$$
$$
\dots(x_n-x_{n+1})-
$$
$$
-y_1(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{n+1}\dots(x_n^n-x_{n+1}+\dots=0
$$

oder auch

$$
y=\sum_{v=1}^{n+1}\frac{(x-x_1)(x\ \ x_2)\dots(x-x_{v-1})(x-x_{v+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_v-x_1)(x_v-x_2)\dots(x_v-x_{v-1})(x_v-x_{v+1})\dots(x_n-x_{n+1})}y_v \quad (2)
$$

Es ist eben eine Lagrange'sche Interpolationsformel [1]).

Diese Formel entspricht den Forderungen, und da sie auf $(n+1)$ Stellen dieselben Werte annimmt, wie die Function 1), so sind nach der Functionenlehre die beiden Functionen identisch.

Die zu y angehörige Unterdeterminante d. i.

$$
A_0 - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = 0
$$

so lange die Wurzeln einfach sind. Die genannte Formel hat nur für solche Wurzeln die Bedeutung und nur für solchen Fall gelten unsere weiteren Betrachtungen.

Indem wir die identische Relation 2) nach den Potenzen der Variablen ordnen, so bekommen wir durch Vergleich mit der Gleichung 1) die Ausdrücke für die Coefficienten $a_0\ a_1\dots a_n$. Das

---

1) Vgl O. Biermann, Theorie der analytischen Functionen S. 91.

aber kann man vermeiden, indem man die Determinante Δ nach der ersten Zeile ordnet: da bekommt man:

$$A_0 y - \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^\lambda \\ y_2 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_{n-1} & x_{a+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$+ x \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ y_2 & 1 & x_2^2 & \cdots & x_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} - \cdots \pm \tag{3)}$$

$$\pm x^n \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ y_2 & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{a-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

als dritte Gestalt der Function $y = f(x)$ $n$ten Grades. Es ist ersichtlich, dass jeder Coefficient

$$a_\nu = \mp \frac{A_\nu}{A_0}$$

wo A_ν die zum Elemente x^ν der Determinante $\Delta = 0$ angehörige Unterdeterminante darstellt.

2. Die Form 3) gibt uns zugleich die Möglichkeit zu erkennen, ob und wann die Function $n$ten Grades, die den Werten

$$x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_{n+1}$$

untergeordnete Functionswerte

$$y_1 \; y_2 \; \ldots \; y_{n+1}$$

annehmen soll, zu bilden möglich ist.

Das soll der Stoff unserer Betrachtungen werden.

Nehmen wir zuerst den Fall, dass die Werte $(y_1\, y_2 \ldots y_{n+1})$ mit den Werten $(x_1\, x_2 \ldots x_{n+1})$ durch die Relationen

$$y_\nu = x_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n+1)$$

verbunden sind.

In dem Falle erhellt aus der Form 3), dass eine solche Function die Gestalt

$$y - x = 0$$

hat, denn alle Unterdeterminanten, die in jener Form vorkommen, verschwinden, die zu x angehörige Unterdeterminante ausgenommen, welche den Wert $-A_0$ annimmt.

Es ist aber keine Function $n$ten Grades. Wir sehen also, „dass eine Function $n$ten Grades, die an den $(n+1)$ Stellen $x_1\, x_2 \ldots x_{n+1}$ Werte annimmt, nicht existirt."

Dasselbe bleibt auch im Falle

$$y_\nu = a x_\nu$$

wo a eine beliebige Constante ist (für alle $\nu = 1, 2, \ldots n+1$ dieselbe).

3. Wir betrachten nun einen allgemeineren Fall, wo die Functionswerte y_ν mit den Werten x_ν durch folgende Gleichungen verbunden sind:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 + \alpha_1 x_1^{\lambda_1} + \alpha_2 x_2^{\lambda_2} + \alpha_3 x_1^{\lambda_3} + \ldots + \alpha_\varrho x_1^{\lambda_\varrho} = 0 \\
y_2 + \alpha_1 x_2^{\lambda_1} + \alpha_2 x_2^{\lambda_2} + \alpha_3 x_2^{\lambda_3} + \ldots + \alpha_\varrho x_2^{\lambda_\varrho} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{n+1} + \alpha_1 x_{n+1}^{\lambda_1} + \alpha_3 x_{n+1}^{\lambda_3} + \ldots + \alpha_\varrho x_{n+1}^{\lambda_3} = 0
\end{array}\right\} \quad 4)$$

Wir nehmen dabei an, dass

$$\lambda_s \gtreqless \lambda_t$$

aber jedes $\lambda_s < n$. Was ϱ anbelangt, so unterscheiden wir drei Fälle:

$$\varrho < n$$
$$\varrho = n$$
$$\varrho > n$$

a) Nehmen wir an den ersten Fall, dass $\varrho < n$; wir haben nun $(n+1)$ Gleichungen, die in Bezug auf $(\varrho+1)$ Unbekannte 1, $\alpha_1 \ldots \alpha_\varrho$ linear sind. So sind — wie in der Theorie der Gleichungen bekannt ist — $(n-\varrho)$ Gleichungen überflüssig, und es existiren $\infty^{n-\varrho}$ Systeme, die den Gleichungen 4) genugtun.

Lassen wir $(n-\varrho)$ Endsgleichungen 4) beiseite, so bleiben uns folgende Gleichungen:

$$y_1 + \alpha_1 x_1^{\lambda_1} + \alpha_2 x_1^{\lambda_2} + \ldots \alpha_\varrho x_1^{\lambda_\varrho} = 0$$

$$y_2 + \alpha_1 x_2^{\lambda_1} + \alpha_2 x_2^{\lambda_2} + \ldots \alpha_\varrho x_2^{\lambda_\varrho} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{\varrho+1} + \alpha_1 x_{\varrho+1}^{\lambda_1} + \alpha_2 x_{\varrho+1}^{\lambda_2} + \ldots + \alpha_\varrho x_{\varrho+1}^{\lambda_\varrho} = 0$$

Da es ein System von gleichzeitigen Gleichungen ist, so muss die Determinante:

$$D_1 = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \ldots & x_1^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_1} & \ldots & x_2^{\lambda_\varrho} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_{\varrho+1} & x_{\varrho+1}^{\lambda_1} & \ldots & x_{\varrho+1}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix} = 0 \text{ sein.}$$

Der Grösse ϱ entsprechend bekommen wir eine gewisse Anzahl solcher Determinanten, da wir im Gleichungssyteme 4) $(n-\varrho)$ Gleichungen in beliebiger Weise beiseite lassen können.

Wir haben zwar $\infty^{n-\varrho}$ Systeme $(1 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\varrho)$, diese sind jedoch so zu wählen, um die Bedingungen D_ν zu erfüllen.

Trachten wir nun eine Function n ten Grades zu bilden, die an den Stellen x_ν die durch Gleichungssystem 4) bestimmten Werte y_ν annehme.

Die Determinante A_s bleibt unverändert, da sie von y unabhängig ist, jede andere Determinante

$$A^{\lambda_s} = \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 & \ldots & x_1^{\lambda_{s-1}} & x_1^{\lambda_{s+1}} & \ldots & x_1^{\lambda} \\ y_2 & 1 & x_2 & \ldots & x_2^{\lambda_{s-1}} & x_2^{\lambda_{s+1}} & \ldots & x_2^{\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{\lambda_{s+1}} & x_{n+1}^{\lambda_{s+1}} & \ldots & x_{n+1\,n} \end{vmatrix}$$

wird infolge der Gleichungen 4) zur Summe der Determinanten, die aber alle zu null werden, da in ihnen je zwei Colonnen identisch sind (weil $\varkappa_5\ \lambda_1 \ldots \angle\ n$); es bleibt nur die Determinante

$$\alpha_s \begin{vmatrix} x_1{}^{\lambda_s} & 1 \ldots x_1{}^{\varkappa^s=1} & \ldots x_1{}^n \\ x_2{}^{\lambda_s} & 1 \ldots x_2{}^{\lambda}{}_{s+1} & \ldots x_{2h} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ x_{\lambda+}{}^{1\lambda} & \cdot \quad x_{n=1} & x_{n+1} \ldots x_{n+1}{}^2 \end{vmatrix} = D_s$$

Es ist aber evident, dass:

$$D_s = (-1)^s \alpha_s A_0$$

ist; unsere Function gewinnt also (nach Abkürzung durch A_5) die Form

$$y + a_1 x^{\lambda_1} + \alpha_2 x^{\nu_3} + \ldots + \alpha_\varrho x^{\gamma_s} = 0$$

es ist aber keine Function n ten Grades. „Es existirt also keine „Function n ten Grades, die an den Stellen x_ν die durch Gleichungs-„system 4) bestimmten Werte y_0 im Falle $\varrho < n$ annehme.“

b) Betrachten wir nun den zweiten Fall, d. i. $\varrho = n$.

In dem Falle gibt es uur ein System

$$(1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \ldots \alpha_\varrho)$$

der Gleichungen 4). Für dieses System gilt die Relation:

$$W - \begin{vmatrix} y_1 & x_1{}^{\lambda_1} \ldots x_1{}^{\lambda_u} \\ y_2 & x_2{}^{\lambda_1} \ldots x_2{}^{\lambda_n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ & \cdot \quad \cdot \\ y_{\lambda+1} & x_{\lambda+1}{}^{\lambda_1} \ldots x_{n+1}{}^{\lambda_n} \end{vmatrix} = 0$$

Wie oben, muss auch hier die Function die Gestalt

$$y + \alpha_1 x^{\lambda_1} + \alpha_2 x^{\lambda_2} + \ldots + \alpha_n x^{\lambda_n} = 0$$

annehmen, es existirt also auch in dem Falle keine Function n ten Grades.

c) Es bleibt noch der $\varrho > n$. Diesen Fall kann man aber auf den früheren Fall zurückführen, so lange $\lambda_s < n$. Denn in dem Falle gibt es der Exponenten

$$\lambda_1 \ \lambda_2 \ . \ . \ . \ \lambda_\varrho$$

ϱ; diese Zahlen sind kleiner als n, sie müssen also in einer gewissen Reihe die Zähler

$$1 \ 2 \ 3 \ . \ . \ . \ \overline{n-1}$$

darstellen. Da nun $\varrho > n$, so müssen einige λ paar mal vorkommen, jedenfalls aber lässt sich y_ν auf die Form:

$$y_\nu + \alpha_1' x_\nu^{\lambda_1} + \alpha_2' x_\nu^{k_2} + \ . \ . \ . + \alpha_\mu' x_\nu^{\lambda_\mu} \qquad \mu \leqq n$$

zurückführen, d. h. dass auch in dem Falle die Function $n$ten Grades mit $(n+1)$ gegebenen Werten nicht existirt.

4. Es handelt sich nun um eine nähere Bestimmung der Bedingung, dass für das Gleichungsystem 4) eine Function $n$ten Grades mit $(n+1)$ vorher gegebenen Werten nicht existirt.

Die Gleichungen 4) haben nur dann endliche Auflösungen in $(1 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ . \ . \ . \ \alpha_\varrho)$, wenn die Determinantenwerte

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & . \ . \ . \ x_1^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_1} & . \ . \ . \ x_2^{\lambda_\varrho} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ y_{\varrho+1} & x_{\varrho+1}^{\lambda_1} & . \ . \ . \ x_{\varrho+1}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix} = 0; \qquad \varrho < n \qquad 5)$$

Solcher Determinanten gibt es mehr oder weniger je nach dem Werte ϱ. Diese Determinante zeigt uns, dass die Werte y_ν mit jenen von x_ν $(\nu = 1, \ . \ . \ . \ \overline{\varrho+1})$ in einer Beziehung stehen, und alle Determinanten deuten auf eine Beziehung zwischen den Grössen y_ν und x_ν $(\nu = 1, \ . \ . \ . \ \overline{n+1})$.

Die Existenz der Gleichungen $W = 0$ bildet eine notwendige Bedingung für den Fall, wenn die Function $n$ten Grades mit $(n+1)$ vorher gegebenen Werten nicht existiren darf; denn wären alle, $W = 0$, dann wären alle

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ . \ . \ . = \alpha_\varrho = 0$$

oder

$$y_1 > y_2 = \ . \ . \ . = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$y = f(x) \equiv 0$$

ein Fall, den wir vornhinein ausschliessen.

Diese Bedingung ist aber auch **hinreichend**, denn nur in dem $W = 0$ ist:

$$y + \alpha_1{}^{\lambda_1} + \alpha_2 x^{\lambda_1} + \ldots + \alpha_\varrho x^{\lambda_\varrho} = 0$$

d. i. die Function $f(x)$ $n$ten Grades kann nicht gebildet werden.

Wir haben oben gesagt, solcher Bedingungen $W = 0$ gibt es mehr, je nach dem Werte von ϱ.

Wenn wir aber nun eine einzige von diesen Bedingungen in Betracht ziehen, so gehören zu derselben unendlich viele Systeme:

$$(1 \; \alpha_1 \; \alpha_2 \; . \; . \; . \; \alpha_\varrho) \tag{6}$$

die die Auflösung der $(\varrho + 1)$ Gleichungen bilden, da auch

$$(C \quad C\alpha_1 \quad C\alpha_2 \; . \; . \; . \; C\sigma\lambda)$$

wo C eine beliebige Grösse ist, ein System ist. Doch löst dieses System 6) auch alle Gleichungen 4) auf, und für ein solches System gibt es keine Function $n$ten Grades. Es reicht also eine einzige Bedingung $W = 0$, und zwar am besten:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & x_1{}^{\lambda_1} & \ldots & x_1{}^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2{}^{\lambda_1} & \ldots & x_2{}^{\lambda_\varrho} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{\varrho+1} & x_{\varrho+1}{}^{\lambda_1} & \ldots & x_{\varrho+1}{}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix} = 0$$

vollkommen aus.

„Wenn also zwischen $(\varrho + 1)$ Werten x_ν und $(\varrho + 1)$ Werten y_ν „die Relation $W = 0$ stattfindet, so müssen auch eo ipso die Rela„tionen zwischen allen $(n + 1)$ Werten x_ν und allen $(n + 1)$ Werten „y_ν vorkommen", und die Lagrange'sche Interpolationsformel reducirt sich auf eine Function niederen Grades.

5. Nehmen wir jetzt den Fall an, dass in den Gleichungen 4) wenigstens **einige** λ_s **gleich** n **sind.**

Es ist dann ersichtlich, dass die Interpolationsformel die Gestalt:

$$A_0 y + A_0 x \alpha_1 + A_0 x^2 \alpha_2 + \ldots + A_0 x^n \alpha_n = 0$$

oder:

$$y + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

annehmen werde, dass also in dem Falle **eine Function** $n$ten **Grades mit** $(n + 1)$ **vorher gegebenen Werten existirt.**

Wären $\lambda_s > n$, so reduciren sich die zu x^s angehörigen Determinanten auf A_0 nicht, sondern lassen sich durch Summen von mehreren Determinanten vertreten, und die Lagrange'sche Formel bekommt eine volle Bedeutung.

6. Kehren wir nun zu den Gleichungen 4) zurück, doch nehmen wir an, dass in allen Gleichungen die Coefficienten verschieden sind; dann haben wir:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 + \alpha_{11} x_1^{\lambda_1} + \alpha_{12} x_1^{\lambda_2} + \alpha_{13} x_1^{\lambda_3} + \ldots + \alpha_{1\varrho} x_1^{\lambda\varrho} = 0 \\
y_2 + \alpha^2{}_1 x_2^{\lambda_1} + \alpha_{22} x^{\lambda_2} + \alpha_{23} x_2^{\lambda_3} + \ldots + \alpha_{2\varrho} x_2^{\lambda\varrho} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{\lambda+1} + \alpha_{n+1,1} x_{n+1}^{\lambda_1} + \alpha_{n+1,2} x_{n+1}^{\lambda_2} + \alpha_{n-1}{}^{\varrho_3} + \ldots \\
\qquad\qquad + \alpha_{n+1,3} x_{n+1,\varrho}\, x_{\lambda+1}^{\lambda\varrho} = 0
\end{array}\right\} \quad 7)$$

wobei

$$\lambda_s < n, \quad \alpha_{st} \gtrless \alpha_{ts}$$

Dann ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix}
y_1 & x_1^{\lambda_1} & \ldots x_1^{\lambda\varrho} \\
y_2 & x_2^{\lambda_1} & \ldots x_2^{\lambda\varrho} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
y_{n+1} & x_{n+1}^{\lambda_1} & \ldots x_{n+1}^{\lambda\varrho}
\end{vmatrix} = 0$$

d. h., dass zwischen den Werten y_ν und x_μ $(\nu = 1, 2, \ldots n+1)$ eine Relation ohne ein freies Glied nicht besteht. Für ein solches System y_τ und x_ν existirt immer eine Function $n$ten Grades mit $(n+1)$ angegebenen Werten.

Nehmen wir statt $(y_1\ y_2 \ldots y_{n+1})$ die Werte: $(Cy_1\ Cy_2 \ldots Cy_{n+1})$, so übergeht die Function $f(x)$ auf eine Function $Cf(x)$, wir können also sagen, dass zu allen den Werten $\overline{y_1}\ \overline{y_2} \ldots \overline{y_{n+1}}$, die aus dem System $(y_1\ y_2 \ldots y_{n+1})$, das wir ein fundamentales System benennen, auf Grund der Gleichungen

$$\overline{y_\nu} = Cy_\eta$$

entstehen, eine und dieselbe Lagrange'sche Formel besteht.

Für einen anderen Wert der Constante C haben wir eine andere Formel. Dasselbe bleibt auch im Falle:

$$\overline{y_\nu} = F_\nu(y_\nu)$$

7. Betrachten wir noch den Fall:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_1 = c_{11}\, y_1 + c_{12}\, y_2 + \;.\;.\;.\; + c_{1,n+1}\, y_{n+1} \\ .\;. \\ \bar{x}_{n+1} = e_{n+1,1}\, y_1 + c_{n+1,2}\, y_2 + \;.\;.\;.\; + c_{n+1,\lambda+1}\, y_{n+1} \end{array}\right\} \quad 8)$$

Die Lagrange'sche Formel hat nun die Gestalt:

$$\bar{y} = \frac{1}{A_0} \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & x_2 & \dots & x_1^n \\ \bar{y}_2 & x^2 & \dots & x_2^\varrho \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{y}_{n-1} & x_{n+1} & \dots & x_{\lambda+1}^n \end{vmatrix}$$

$$- \frac{1}{A_0}\, x \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & 1 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ \bar{y}_2 & 1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{y}_{n-1} & 1 & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} + \;.\;.\;.\; = 0$$

oder auf Grund der Gleichungen 8), wenn wir jede Determinante in eine Summe der Determinanten verwandeln:

$$\bar{y} = \frac{y}{A_0} \begin{vmatrix} c_{11} & x_1 & \dots & x_2^n \\ c_{21} & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n+1.1} & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{y_2}{A_0} \begin{vmatrix} c_{12} & x_1 & \dots & x_1^n \\ c_{22} & x_2 & \dots & x^{2\varrho} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n+1,2} & x_{n+1} & \dots & x_{n+2}^n \end{vmatrix} + \;.\;.\;.$$

$$-\frac{y_1}{A_0}x\begin{vmatrix} c_{11} & 1 & x_1^2 & \ldots x_1^n \\ c_{21} & 1 & x_1^2 & \ldots x_1^\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n+1,1} & 1 & x_{\lambda+1}^2 & \ldots x_{n+1}^n \end{vmatrix} - \ldots = 0$$

oder:

$$\bar{y} = y_1 f(c_{11}\, c_{21} \ldots c_{n+1,1}) + y_2 f(c_{12}\, c_{22} \ldots b_{n+1,2}) + \ldots$$
$$+ y_{n+1} f(c_{1,n+1}, c_{2,n+1}, \ldots c^{\lambda+1,n+1})$$

„Um also aus der Lagrange'schen Formel für das Fundamental- „system eine Formel für ein aus demselben linear gebildetes System zu bekommen, reicht es aus in der gegebenen Formel für das fundamentale System der Reihe nach die Systeme:

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{21} & \ldots c_{n+1,2} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots c_{n+1,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1,n+1} & c_{2,n+1}, & \ldots e_{n+1,n+1} \end{matrix}$$

„einzuführen, die so veränderten Formeln der Reihe nach mit „$y_1\, y_2 \ldots y_{n+1}$ zu multipliciren und zu addiren."

Dann bekommt die Lagrange'sche Interpolationsformel folgende Gestalt:

$$y = \sum_{\mu=1}^{n+1} \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{\nu-1})(x-x_{\nu+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_\nu-x_1)(x_\nu-x_2)\ldots(x_\nu-x_{\nu-1})(x_\nu-x_{\nu+1})\ldots(x_\nu-x_{n+1})} C_{\mu,\nu}\, y_\mu$$

XXIV.

Die Bestimmung der Anzal der unter einer gegebenen Grenze liegenden Primzalen.

Von

Franz Rogel.

Im „Archiv d. Math. u. Phys.", 2. Reihe. T. VII. 1889. pag. 381 würde vom Verfasser für die Anzal $\mathfrak{A}m$ der Primzalen

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \ldots$$

welche nicht grösser als eine gegebene Zal sind, folgender Ausdruck gefunden:

$$\mathfrak{A}m = |\, m \,| \prod_2^n \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) + n - 1; \quad p^n < \sqrt{m} < p_n + 1 \; \ldots \ldots \; 1)$$

Die Auswertung dieses Productes hat in der Weise zu erfolgen, dass für jeden Bruch nur die grösste in demselben enthaltene ganze Zal zu nehmen ist. Diese Formel ist einer weitern Entwicklung fähig; der Zweck derselben ist, durch Verminderung der Factorenanzal $n-1$ in $\prod\limits_2^n$ die Rechnung zu vereinfachen. Durch die Reducirung dieser Anzal auf ein Minimum und womöglich durch Eliminirung des Productes $|\, m \,| \prod$ soll ein recursiver Ausdruck für $\mathfrak{A}m$ geschaffen werden, welcher Aufschluss über die Beziehungen verschiedener $\mathfrak{A}$ geben wird.

1.

Vor Allem muss bemerkt werden, dass die nämlichen Schlüsse, welche zur Formel 1) führten, es erlauben, den Ausscheidungsprocess aller Primzalen $<$ als die gegebene Zal bis zur letzten $p e^{r_z}$ fortzusetzen, wodurch die Grenzen von Π erweitert werden. Es ist offenbar

$$\mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^n \left(1-\frac{1}{p_r}\right) + n - 1 = |z| \prod_2^{n+1} \left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$
$$+ n = |z| \prod_2^{n+2} \left(1-\frac{1}{p_r}\right) + n + 1$$
$$= |z| \prod_2^{n+\nu} \left(1-\frac{1}{p_r}\right) + n + \nu - 1 \ldots = |z| \prod_2^{\mathfrak{A}_z} \left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$
$$+ \mathfrak{A}_z - 1;$$
$$\nu \leqq \mathfrak{A}_z - n \qquad \ldots . 1',$$

denn die grösste Primzal $\leqq z$ ist unmittelbar $p e r_z$. Durch Gleichsetzung des ursprünglichen mit dem letzten Ausdruck für $\mathfrak{A}_z$ entsteht:

$$|z| \prod_2^{\mathfrak{A}_z} \left(1-\frac{1}{p_r}\right) = 1 \qquad \ldots \ldots \ldots . 2)$$

Es ist einleuchtend, dass die obere Grenze $\mathfrak{A}_z$ beliebig vergrössert werden kann, ohne den Wert von Π zu verändern: Factoren $1 - \frac{1}{p_r}$, welche Primzahlen entsprechen, die grösser als z sind, können ja selbstverständlich keinen Einfluss haben, da

$$\left|\frac{z}{p_r}\right| = 0$$

wenn $p_r > z$ ist. In ihrer allgemeinsten Form lautet daher die Gleichung 2)

$$|z|_r \prod_2^{\infty} \left(1-\frac{1}{p_r}\right) = 1$$

Nach dem leicht zu beweisenden Satze

$$|z| \prod_2^n \left(1-\frac{1}{p_r}\right) - z \prod_2^{n-1} - \left|\frac{z}{p_n}\right| \prod_2^{n-1} \qquad \ldots . 3)$$

der für jedes $n \leqq a_z$ giltig ist, kann geschrieben werden:

$$\mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{n+1}\left(1-\frac{1}{p_r}\right) + n = |z| \prod_2^{n} - \left|\frac{z}{p_{n+1}}\right| \prod_2^{n} + n$$

nun ist auch

$$\mathfrak{A}_z = (z) \prod_2^{n} + n - 1$$

2

woraus folgt:

$$\left|\frac{\varepsilon}{p_{n+1}}\right| \prod_2^{n}\left(1-\frac{1}{p_r}\right) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Dieser Satz gilt auch dann noch, wenn die obere Grenze $\begin{matrix} > n \\ < \mathfrak{A}_z \end{matrix}$ ist; ein besonderer Fall ist

$$\left|\frac{z}{p\ er_2}\right| \prod_2^{\mathfrak{A}_z-1}\left(1-\frac{1}{p_r}\right) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4')$$

Durch wiederholte Anwendung des Satzes 3) ergiebt sich

$$\left[\left(\frac{z}{p_{n+1}}\right) + \left(\frac{z}{p_{n+2}}\right) - \left(\frac{z}{p_{n+1}\cdot p_{n+2}}\right)\right] \prod_2^{n}\left(1-\frac{1}{p_r}\right) = 2$$

$$\left[\left(\frac{z}{p_{n+1}}\right) + \left(\frac{z}{p_{n+2}}\right) + \left(\frac{z}{p_{n+3}}\right) - \left(\frac{z}{p_{n+1}\cdot p_{n+2}}\right) - \left(\frac{z}{p_{n+1}\cdot p_{n+3}}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{z}{p_{n+2}\cdot p_{n+3}}\right) + \left(\frac{z}{p_{n+2}\cdot p_{n+2}\cdot p_{n+3}}\right)\right] \prod_2^{n}\left(1-\frac{1}{p_r}\right) = 3$$

. . . .

2.

Um nun die Grenzen von Π einzuengen, kann der Satz (3) vorteilhaft benutzt werden. Es ist

$$\mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{n} + n - 1 = (z) \prod_2^{n-1} - \left|\frac{z}{p_r}\right| \prod_2^{n-1} + n - 1$$

wobei abkürzungsweise $\prod_2^{n}$ für $\Pi\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)$ gesetzt wurde, ferner ist

$$\mathfrak{A}\frac{z}{p_n} = \left|\frac{z}{p_n}\right| \prod^{n-1} + n - 2, \quad \text{weil}$$

$$n - 1 \geqq n', \quad \left(p_{n'} < \sqrt{\frac{z}{p_n}} < p_{n'+1}\right)$$

hieraus folgt:

$$\left|\frac{z}{p_n}\right| \prod_2^{n-1} - \mathfrak{A}\frac{z}{p_n} - (n-2)$$

dies in $\mathfrak{A}_x$ gesetzt, giebt

$$\mathfrak{A}_z = |z| \overset{n-1}{\underset{2}{\Pi}} - \mathfrak{A}\frac{z}{p_n} + n-1 + n-2$$

und ebenso durch wiederholte Anwendung des Satzes (3)

$$\mathfrak{A}_z = |z| \overset{n-2}{\underset{2}{\Pi}} - \mathfrak{A}\frac{z}{p_{n-1}} - \mathfrak{A}\frac{z}{p_n} + n-1 + n-2 + n-3$$

. . . .

$$\mathfrak{A}_z = |z| \overset{\nu}{\underset{2}{\Pi}} - s\sum_{\nu+1}^{n} \mathfrak{A}\frac{z}{p_s} + n-1 + n-2 + \ldots + \nu-1 \quad \ldots 5)$$

Die Zerlegung von $|z|\,\Pi$ nach Satz (3) kann übrigens nur dann mit Erfolg fortgesetzt werden, so lange $p_{\nu-1} > \sqrt{\frac{z}{p_\nu}}$ ist; es wird aber endlich als obere Grenze eine Zal m hervorgehen, für welche $p_m < \sqrt{\frac{z}{p_{m+1}}} < p_{m+1}$ sein wird, oder

$$p_m^3 p_{m+1} < z < p^3_{m+1}$$

und weil $p_m < p_{m+1}$ umsomehr:

$$p_m^3 < z < p_m^3 + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

Dem entspricht:

$$\mathfrak{A}_z = |z| \overset{m}{\underset{2}{\Pi}} - \sum_{m+1}^{n} \mathfrak{A}\frac{z}{p_l} + \binom{n}{2} - \binom{m-1}{2} \quad \ldots\ldots 7)$$

Diese Formel lässt sich durch einfache Substitutionen in jene überführen, welche Meissel in den mathematischen Annalen Band II. und III. für die Anzal gegeben hat; in derselben wird die Einheit nicht mitgezält ($p_1 = 2 \ldots$).

Die Ableitungen mittelst Ungleichungen ist eine bei weitem umständlichere; sie hat den weitern Nachteil, dass sie keine Handhabe zu wiederholten Umgestaltungen derselben Formel 7) darbietet.

Je grösser die gegebene Zal z ist, desto vorteilhafter wird die Anwendung obiger Formel, weil mit wachsendem z auch der Unterschied zwischen m und n zunimmt, z. B. ist für

z	n	m	$\frac{m}{n}$
$z = 1000$	$n = 12$,	$m = 5$,	$\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$
10000	26,	9,	$\frac{1}{3}$
100000	67,	15,	$\frac{1}{9}$
1000000	165,	26,	$\frac{1}{6}$

. . . .

3.

Um die Reihe der Teiler $p_2, \ldots p_m$ noch weiter zu vermindern, wird wieder der Satz (3) angewendet; dann ist

$$\mathfrak{A}_y = |z| \prod_2^{m-1} - \left|\frac{z}{p_m}\right| \prod_2^{m-1} - r \sum_{m+1}^{n} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} + \binom{n}{2} - \binom{m-1}{2} \ldots \quad 8)$$

Nun lässt sich auf das zweite Glied rechter Hand sofort die Formel 5) anwenden, weil stets $m - 1 < m'$ ist, und

$$p_{n'} < \sqrt{\frac{z}{p_m}} < p_{n'+1}$$

denn es gilt auch:

$$p_m < \sqrt[3]{z} < p_{m+1}$$

Wenn in erstere Ungleichung statt p_m das grössere $\sqrt[2]{z}$ gesetzt wird so ist

$$p_{n'+1} > \sqrt{\frac{z}{\sqrt[3]{z}}} \quad \text{oder}$$

$$p_{n'+1} > \sqrt[3]{z} > p_m$$

daher wirklich

$$n' + 1 > m \quad \text{oder} \quad m - 1 < m'$$

Es ist daher gestattet zu schreiben:

$$\mathfrak{A}\frac{z}{p^m} = \left|\frac{z}{p_m}\right| \prod_2^{m-1} - \sum_m^{n'} \mathfrak{A}\frac{z}{p_m\, p_r} + n' - 1 + \ldots + m - 2 \quad \ldots 9)$$

Da $n' \geqq m$ ist, so kann die untere Grenze von Σ die obere nie übertreffen. Aus 9) folgt:

$$\left|\frac{z}{p_m}\right| \prod_2^{m-1} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_m} + r \sum_m^{n'} \mathfrak{A}\frac{z}{p_m\, p_r} - \binom{n'}{2} + \binom{m-2}{2}$$

dies in 8) gesetzt, giebt

$$_z = |z| \prod_2^{m-1} - r \sum_m^{n} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_m^{n'} \mathfrak{A}\frac{z}{p_m\, p_r} + \binom{n}{2} + \binom{n'}{2} - \binom{m-1}{2}$$
$$- \binom{m-2}{2} \ldots (10)$$

Ist

$$z = p^3 + \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{p} < p_1^2 - p^2,$$

unter p, p_1 zwei aufeinanderfolgende Primzalen verstanden, so ist

$$p_{n'} \leqq \sqrt{\frac{p^3 + \alpha}{p}}$$

weil $p_m < \sqrt[3]{p^3+\alpha}$, daher $= p$ ist, somit $p_{n'} < \sqrt{p^2+\frac{\alpha}{p}} < p_{n'+1}$

und $$p_{n'} = p = p_m, \quad n' = m$$

In diesem Falle besteht also die Summe

$$\sum_m^{n'} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_m^2}$$

nur aus einem einzigen Gliede. Im allgemeinen umfasst dieselbe im Verhältniss zu z nur sehr wenig Glieder, so ist z. B. für

$$z = 1000000, \quad m = 26, \quad n' = 27 \quad \text{und}$$

$$\sum_m^{n'} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_{26}^2} + \mathfrak{A}\frac{z}{p_{26}\cdot p_{27}}$$

Da $\frac{\alpha}{p} < p_1^2 - p^2$ und $z = p^3+\alpha$, ist $z < p_1^2 p$; wenn also $p^3 < z < p_1^2 p$ ist, so folgt immer $m = n'$.

Das symbolische Product lässt sich noch weiter zerfällen und so behandeln wir $|\,z\,|\prod_2^m$; es entsteht:

$$\mathfrak{A}_z = |\,z\,|\prod_2^{m-2} - \sum_{m-1}^{n}\mathfrak{A}\frac{z}{p} - \sum_m^{n'}\mathfrak{A}\frac{z}{p_m p_r} - r\sum_{m-1}^{n''}\mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-1}\,p_r}$$
$$+\binom{n}{2}+\binom{n'}{2}+\binom{n''}{2}-\binom{m-1}{2}-\binom{m-2}{2}-\binom{m-3}{2}\ldots \qquad 11)$$

$$p_{n''} < \sqrt{\frac{z}{p_{m-1}}} < p_{n''+1}$$

Es ist wieder $p_{m-1} < p_m$, somit

$$\sqrt{\frac{z}{p_m}} \geqq \sqrt{\frac{z}{p_{m-1}}}$$

folglich auch $n'' \geqq n'$; ferner ist $n' \geqq m$, umsomehr $n'' > m-1$; die obere Grenze in Σ ist mithin grösser als die untere, daher die Summirung ausführbar.

Diese allmähliche Verminderung der oberen Grenze wird im allgemeinen jedoch nicht bis zum Verschwinden derselben, sondern nur bis zu einem gewissen Grenzwert k getrieben werden können. Ein beliebiges $|\,u\,|\prod^3$ wird ja nach Formel 5) sich nur dann durch $\mathfrak{A}_u$ darstellen lassen, wenn

$$\delta \geqq \sigma, \quad p_\sigma < \sqrt[3]{u} < p_{\sigma+1} \quad \text{ist}$$

Infolge des bisher befolgten Vorganges wird, weil der Teiler p_r immer kleiner, $\left|\frac{z}{p_r}\right|$ immer grösser, während die obere Grenze fortwährend abnimmt. Für die Grenze k wird nach dem leicht zu erkennenden Bildungsgesetz der Formel 11) offenbar:

$$\mathfrak{J}_s = |z| \overset{k}{\underset{2}{\Pi}} - {}_r\overset{n}{\underset{k+1}{\Sigma}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - {}_\nu\overset{m-k}{\underset{1}{\Sigma}} \; {}_r\overset{n^{(\nu)}}{\underset{m-\nu+1}{\Sigma}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-2x+1}p_r} + {}_\nu\overset{m-k}{\underset{0}{\Sigma}}\binom{n^{(\nu)}}{2}$$

$$-\binom{m}{3} + \binom{k-1}{3} \quad . \; . \; . \; . \; 12)$$

Hierin entstand $|z| \overset{k}{\underset{2}{\Pi}}$ aus

$$|z| \overset{k+1}{\underset{2}{\Pi}} = |z| \overset{k}{\underset{2}{\Pi}} - \left(\frac{z}{p_k}\right) \overset{k}{\underset{2}{\Pi}}$$

damit nun $\left|\frac{z}{p_{k+1}}\right| \Pi$ mittelst der Formel 5) durch $\mathfrak{A}\frac{z}{p_{g+1}}$ ausgedrückt werden konnte, muss

$$p_k < \sqrt[3]{\frac{z}{p_{k+1}}} < p_{k+1} \quad \text{oder}$$

$$p_k^3 p_{k+1} < z < p^4_{k+1} \quad \text{umsomehr}$$

$$p_k^4 < z < p_{k+1}^4 \quad \text{oder}$$

$$p_k < \sqrt[4]{z} < p_{k+1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 13)$$

sein, wodurch die Grenze k definirt ist.

4.

Die Formel 13 bietet nun wieder analog wie bei 5) das Mittel dar, das Gebiet der Primzalenteiler p_2, p_3, . . . weiter einzuschränken.

Es ist

$$|z| \overset{k}{\underset{2}{\Pi}} = |z| \overset{k-1}{\underset{2}{\Pi}} - \left|\frac{z}{p_k}\right| \overset{k-1}{\underset{2}{\Pi}}$$

das negative Product kann durch $\mathfrak{A}\frac{z}{p_k}$ mittelst einer der Formeln, welche aus 12) durch die Substitutionen

$$k = m - 1.\ m - 2, \ldots k$$

hervorgehen, ausgedrückt werden.

Eine Repräsentatur dieses Systems bildet:

$$\varphi_z = |z| \prod_2^{x} - r \sum_{x+1}^{n} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \nu \sum_1^{m-x} r \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1}p_r}$$
$$+ \nu \sum_0^{m-x} \binom{n^{(\nu)}}{2} - \binom{m}{3} + \binom{x-1}{3} \ldots\ldots\ldots 14)$$

worin x alle Werte von m bis k annehmen kann.

Die Bedingung der Ausdrückbarkeit von $\left|\frac{z}{p_k}\right| \prod_2^{k-1}$ durch $\mathfrak{A}\frac{z}{p_k}$ mit Hilfe dieser Formel ist gegeben durch die Ungleichung

$$k - 1 < k', \quad \text{wo}$$

$$p_{k'} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_k}} < p_{k'+1}$$

ist. Nun ist

$$p_k < \sqrt[4]{z} < p_{k+1} \quad \text{und}$$

$$p_{k'} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_k}} < p_{k'+1}$$

Hierin statt p_k das grössere $\sqrt[4]{z}$ gesetzt, folgt

$$\sqrt[3]{\frac{z}{\sqrt[4]{z}}} = \sqrt[4]{z} < p_{k'+1}$$

mithin $p_k < \sqrt[4]{z} < p_{k'+1}$ und $k - 1 < k'$.

Die Bedingung wird daher erfüllt. Statt m und n die sich auf $\left|\frac{z}{p_k}\right|$ beziehenden Grössen m_1 und n_1. Ferner $x = k - 1$ gesetzt ist:

$$\left|\frac{z}{p_k}\right| \prod_{\infty}^{k-1} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_k} + \sum_k^{n_1} \mathfrak{A}\frac{z}{p_h p_r} + \nu \Sigma^{m_1-h+1} r \Sigma_{n_1-\nu+1} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m'-\nu+1}p_k p_r}$$
$$- \nu \sum_0^{m_1-k+1} \binom{n_1^{(\nu)}}{2} + \binom{m_1}{3} - \binom{k-2}{3} \ldots\ldots 15)$$

ferner

$$p_{n_1} < \sqrt{\frac{z}{p_k}} < p_{n'+1}, \quad p_{m_1} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_k}} < p_{m_1+1};$$

mithin

$$\mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{k-1} - \mathfrak{A}\frac{z}{p_k} - r\sum_{k+1}^{n} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - r\sum_{k}^{n_1} \mathfrak{A}\frac{z}{p_k p_r}$$

$$- \nu\sum_1^{m-k} r\sum_{m=\nu+1}^{n^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1} p_r} - \nu\sum_4^{m_1-k+1} r\sum_{m_1-\nu+1}^{n_1^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_1-\nu+1} p_k p_r}$$

$$+ \nu\sum_0^{m-k} \binom{n^{(\nu)}}{2} + \nu\sum_0^{m_1-r+1} \binom{n_1^{(\nu)}}{2} - \binom{m}{3} - \binom{m_1}{3} + \binom{k-1}{3}$$

$$+ \binom{k-2}{3}$$

Berücksichtigend, dass

$$n_1 = n^{(m-k+1)}$$

ist die Summe des 4ten und 5ten Gliedes rechter Hand

$$= - \nu \sum^{m-k+1} r \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1} p_r}$$

kann kürzer geschrieben werden:

$$\mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{k-1} - r\sum_k^{x} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \nu\sum_1^{m-k+1} r\sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1} p_r}$$

$$- \nu\sum_1^{m_1-n+1} r\sum_{m_1-\nu+1}^{n_1-\nu+1} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_1-\nu+1} p_k p_r} + \nu\sum_0^{m-k} \binom{n^{\nu}}{2} + \nu\sum_0^{m_1-k+1} \binom{n_1^{(\nu)}}{2}$$

$$- \binom{m}{3} - \binom{m_1}{3} + \binom{k-1}{3} + \binom{k-2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16)$$

Ebenso wird gefunden:

$$\mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{k-2} - r\sum_{k-1}^{n} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \nu\sum_1^{um-k+2} r\sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1} p_r}$$

$$- \nu\sum_1^{m_1-k+1} r\sum_{m_1-\nu+1}^{n_1^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_1-\tau+1} p_k p_r} \quad \nu\sum_1^{m_2-k+2} r\sum_{m_2-\nu+1}^{n_2^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-+1} p_{k-1} p_r}$$

$$+ \alpha\sum_0^{m-k} \binom{n^{(\nu)}}{2} + \nu\sum_0^{m_1-k+1} \binom{n_1^{(\nu)}}{2} + \nu\sum_9^{m_2-k+1} \binom{n_2^{(\nu)}}{2}$$

$$- \binom{m}{3} - \binom{m_1}{3} - \binom{m_2}{3} + \binom{k-1}{3} + \binom{k-2}{3} + \binom{k-3}{3} \ldots 17$$

$$n_2 = n^{(m-k+2)}, \quad p_{n_2} < \sqrt{\frac{z}{p_{k-1}}} < p_{n_2+1}, \quad p_{m_2} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_{k-1}}} < p_{m_2+1}$$

. . . .

$$\mathfrak{A}_z = [z] \prod_2^k - r\sum_{h+1}^n \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \nu\sum_1^{m-h} r\sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1}p_\nu}$$

$$-\mu\sum_1^{k-h} \nu\sum_1^{m_\mu-k+\mu} r\sum_{m_\mu-\nu+1}^{n_\mu^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_\mu-\varrho+1}p_{k-\mu+1}p_\nu}$$

$$+\mu\sum_0^{k-h} \nu\sum_0^{m_\mu-k+\mu}\binom{n_\mu^{(\nu)}}{2} - \mu\sum_0^{k-h}\binom{m_\mu}{3} + \binom{k}{4} - \binom{k-1}{4} \ldots 18)$$

$p_h < \sqrt[5]{z} < p_{h+1}$. Der Zeiger h kann übrigens alle Werte von $k-1$ bis $h+1$, h annehmen.

Mit Hilfe der Formel 12) lässt sich dieser Ausdruck nicht weiter entwickeln, es müsste zu diesem Zwecke die Formel 18) selbst herangezogen werden.

Ein Vergleich der bisher gewonnenen Resultate dieser, durch die Grössen $n, m, k, h, \ldots$ markirten stufenförmigen Entwicklung, lässt ein allgemeines Bildungsgesetz deutlich warnehmen.

Für irgend eine Stufe $C[p_c < \sqrt[q]{z} < p_{c+1}$, q eine ganze Zal] ist

$$\mathfrak{A}_z = [z] \prod_2^c - r\sum_{c+1}^n \mathfrak{A}\frac{z}{p_c} - \alpha\sum_1^{n-s} r\sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{3}{p_{m-\nu+1}p_3}$$

$$-\mu\sum_1^{k-c} \nu\sum_1^{m_\mu-k+\mu} \sum_{m_\mu-\nu+1}^{n_\mu^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_\mu-\nu+1}p_{k+\mu+1}p_r}$$

$$- \ldots + (-1)^{q-1}\binom{k}{q-1} + (-1)^q\binom{c-1}{q-1} \ldots\ldots\ldots 19)$$

Es liegt in der Natur der Sache, dass die Unterschiede zweier unmittelbar aufeinander folgenden Stufen mit fortschreitender Entwicklung ziemlich rasch abnehmen.

Dieses Verfahren findet selbstverständlich seinen Abschluss, sobald die Stufe $a = 1$ erreicht wird.

Im Folgenden soll nun eine Methode gezeigt werden, welche das vollständige Erschöpfen des Teilergebietes $p_2, \ldots p_n$ entbehrlich macht.

5.

Die Gleichung

$$\left(\frac{a}{b}\right) - \left(\frac{c}{b}\right) = \left(\frac{a-c}{b}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots 20)$$

ist stets, aber auch nur dann richtig, wenn der Rest

$$\left(\frac{a}{b}\right)_r \geqq \left(\frac{c}{b}\right)_r \text{ ist.}$$

Sie ist unter allen Umständen giltig, wenn c durch b teilbar ist. Dieser Satz kann sofort auf das Product

$$|a| \prod_2^i = |a| \left(1-\frac{1}{2}\right) \ldots \left(1-\frac{1}{p_2}\right)$$

angewendet werden, wenn eine Zal $c < a$ gefunden werden kann, welche durch

$$2, 3 \ldots p_i = f_i$$

teilbar ist. Ein wirklicher Vorteil für vorliegende Zwecke wird jedoch nur dann erwachsen, wenn die $a - c$ Differenz klein ausfällt. Es kommt demnach darauf an, die gegebene Zal z zwischen Vielfache der Primzalenfactoriellen $2 \cdot 3 \cdot p_i$ so einzuschliessen, dass

$$\lambda \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p_i < z < (\lambda + 1) 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p_i, \quad \lambda < p_{i+1}$$

selbstverständlich giebt es unter dieser Bedingung nur eine einzige factorielle f_i.

Wurde nur zur Bestimmung von $\mathfrak{A}_z$ die obere Grenze n von $|z| \prod_2^n$ bis auf i reducirt, so ist

$$\mathfrak{A}_z = z \prod_2^i + \mathfrak{S}; \quad \varphi(\lambda f_i) = \lambda f_i \prod_2^i$$

(unter φ die Anzahl relativer Primzalen $< \lambda f_i$ verstanden), davon abgezogen, giebt

$$\mathfrak{A}_z - \varphi(\lambda f_i - (z - \lambda f_i) \prod_2^i + \mathfrak{S} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2?)$$

Dass sich dieses Product ungleich leichter bestimmen lässt, als $|z| \prod_2^i$ liegt auf der Hand. Für alle Zalen von 7—24 und von 31—48 ist die factorielle f_n aller Teiler von p_2 bis p_n kleiner als die Zalen selbst; für Zalen $>$ 48 ist dies nicht mehr der Fall.

Der Unterschied zwischen einem Primzalenquadrat p_m^2 und der entsprechenden factoriellen f_n wächst mit zunehmendem n ausserordentlich rasch.

In Wertheim's „Zahlentheorie“ ist ein Beispiel für $z = 1000$ mittelst der Meissel'schen Formel ausgerechnet zu finden. Das Product $|1000| \prod_2^5$ wurde direct berechnet; es besteht aus

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{4}{4} = 2^4 - 1 = 15 \text{ Gliedern.}$$

Die Herbeiziehung von

$$f_7 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 = 210$$

vereinfacht die Rechnung.

Es ist

$$4 \,.\, 210 < 1000 < 5 \,.\, 210,$$

$$|\,1000\,| \prod_2^5 = |\,1000 - 4 \,.\, 210\,| \prod_2^5 + 192 = 160 \prod_2^5 + 192$$

$$= \mathfrak{A}_{160} - 5 + \left|\frac{160}{11}\right| \prod_2^5 192 = 38 - 5 + 3 + 192 = 228.$$

Je näher die Zal z einem Vielfachen von f liegt, desto vorteilhafter gestaltet sich die Benutzung derselben. Am einfachsten wird sich die Entwicklung für $z = f$ ergeben. Bei der Aufstellung einer Primzalentafel dürfte es sich empfehlen, von diesem abkürzenden Verfahren behufs Verification der Primzalenzeiger (n in p_n) Gebrauch zu machen.

Liegt die gegebene Zal näher bei $(\lambda + 1) f_i$ als bei λf_i, so kann der Umstand benutzt werden, dass $(\lambda + 1) f_i - 1)$ auf irgend eine Combination ohne Wiederholung c der Primzahlen von p_1 bis p_i geteilt den grösstmöglichen Rest $c - 1$ giebt. In diesem Falle lässt sich die Formel 20) anwenden; es ist dann:

$$[(\lambda + 1) f_i - 1] \prod_2^i - |\,z\,| \prod_2^i = |\,(\lambda + 1) f_i - 1 - z\,| \prod_2^i$$

Nun bezeichnet allgemein $|\,u\,| \prod_2^n$ die Anzal der Zalen $\leqq u$, welche durch keine der Primzalen von p_2 bis p_n teilbar sind; da aber $(\lambda + 1) f_i$ offenbar zu diesen Zalen nicht gehört, so folgt

$$|\,(\lambda + 1) f_i - 1\,| \prod_2^i = |\,(\lambda + 1) f_i\,| \prod_2^i$$

$$= (\lambda + 1) 1 \,.\, 2 \,.\, 4 \ldots (p_i - 1) \quad \text{und}$$

$$|\,z\,| \prod_2^i = (\lambda + 1) 2 \,.\, 4 \ldots (p_i - 1)$$

$$- |\,(\lambda + 1) f_i - z - 1\,| \prod_2^i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

Endlich kann auch die Formel 4) behufs Abkürzung der Entwicklung mit einigem Vorteil angewendet werden, wenn

$$\left(\frac{p_n^2}{p_{n+1}}\right) \overline{\leq} u \overline{\leq} p_{n+1} - 1$$

ist. Denn die kleinste mittelst der Teilerreihe $p_3 \ldots p_n$ bestimmbare Anzal $\mathfrak{A}_n$ ist die für die Zal p_u^2, während die grösste $p_{n+1}-1$ ist. In beiden Fällen ist nach Formel 4):

$$\left|\frac{p_n^2}{p_{n+1}}\right| \overset{n}{\underset{2}{\Pi}} = 1, \quad \left|\frac{p_{n+1}-1}{p_{n+1}}\right| \overset{n}{\underset{2}{\Pi}} = (p_{n+1}-1) \overset{n}{\underset{2}{\Pi}} = 1 \ldots \quad 22)$$

Wenn daher in 20*):

$$\left|\frac{p_i^2}{p_{i+1}}\right| \overline{\leq} z - \lambda f_i \overline{\leq} p_{i+1} - 1$$

st, so folgt

$$| z - \lambda f_i | \overset{i}{\underset{2}{\Pi}} = 1$$

ind wenn in 21)

$$\frac{p_i^2}{p_{i+1}} \overline{\leq} (\lambda+1) f_i - z - 1 \overline{\leq} p_{i+1} - 1$$

ist, folgt ebenso:

$$| (\lambda+1) f_i - z - 1 | \overset{i}{\underset{2}{\Pi}} = 1$$

Allgemein, wurde $| z | \overset{n}{\underset{2}{\Pi}}$ auf $| u | \overset{i}{\underset{2}{\Pi}}$ reducirt, und ist

$$p_g < \sqrt{u} < p_{g+1}, \quad \text{ferner } g \overline{\leq} i < \mathfrak{A}_u$$

so ist nach Formel 1*):

$$| u | \overset{i}{\underset{2}{\Pi}} = \mathfrak{A}_u - i + 1.$$

Brünn, 13. Januar 1890.

XXV.

Ein Kreis durch das Dreieck.

Von

Kasimir Cwojdzinski.

Wenn wir die Seiten eines Dreiecks ABC (Fig 1.) beliebig durch einen Kreis O schneiden lassen, und von seinem Mittelpunkte O die Lote OX, OY und OZ bezüglich auf AC, BC und AB fällen, dann ist nach einem bekannten Satze

(Spieker, Planimetrie, Abschnitt XIV; Uebung 19 und 20)

$$1)\qquad AX^2+CY^2+BZ^2 = AZ^2+BY^2+CX^2$$

Wenn die Schnittpunkte des Kreises auf AC: die Punkte D und E, auf BC: G und F, auf BA: J und H sind, dann ist, da OX auf AC Lot ist,

$$DX = EX, \quad \text{ebenso}$$

$$HZ = HJ \quad \text{und} \quad FJ = JG$$

Es ist also

$$AX = \frac{AE+AD}{2}; \quad CY = \frac{CF-CG}{2}; \quad BZ = \frac{BJ-HB}{2}$$

$$AZ = \frac{AJ+AH}{2}; \quad BY = \frac{BG-BF}{2}; \quad CX = \frac{CD-CE}{2}$$

Setzen wir die eben erhaltenen Werte in Gl. 1) ein, lösen die Quadrate auf, und schaffen den Nenner 4 fort, so entsteht

$$\begin{aligned}2)\quad & AE^2+AD^2+2AE\,.\,AD+CF^2+CG^2-2CF\,.\,CG+BJ^2\\ & +BH^2-2BJ\,.\,BH = AJ^2+AH^2+AJ2AH\\ & +BG^2+BF^2-2BG\,.\,BF+CD^2+CE^2-2CD\,.\,CE\end{aligned}$$

Da aber als Secantenabschnitte

$$AD \,.\, AE = AH \,.\, AJ; \quad BH \,.\, BJ = BG \,.\, BF; \quad CG \,.\, CF = CD \,.\, CE$$

so fallen aus Gl. 2) die doppelten Producte weg und es entsteht

$$AE^2 + AD^2 + CF^2 + CG^2 + BJ^2 + BH^2$$
$$= AH^2 + AJ^2 + BG^2 + BF^2 + CD^2 + CE^2$$

d. h.

Satz 1. Wird ein Dreieck von einem Kreise beliebig getroffen, so sind die Summen je sechser Quadrate der von den Ecken gemessenen in den Peripheriepunkten nicht anstossenden Abschnitte der Seiten einander gleich.

Zusatz. (Analogon zu Satz 1.) Aus dem Secantensatze folgt ein analoger Satz, wo nicht die Summen, sondern die Producte der Quadrate gleich sind, nämlich

$$AE^2 \cdot AD^2 \,.\, CF^2 \,.\, CG^3 \,.\, BJ^2 \,.\, BH^2$$
$$= AH^2 \cdot AJ^2 \,.\, BG^2 \,.\, BF^2 \,.\, CD^2 \,.\, CE^2$$

(was aus $AE \,.\, AD \,.\, CF \,.\, CG \,.\, BJ \,.\, BH = AH \,.\, AJ \,.\, BG \,.\, BF \cdot CD \,.\, CE$ folgt).

Diese beiden analogen Gleichungen, liefern eine Reihe analoger Sätze, die wir hier geben.

Satz 2. Legt man durch die Fusspunkte dreier Ceva'schen Transversalen den Kreis, so liefert dieser drei neue Punkte, die wieder Fusspunkte dreier Ceva'schen (sich in einem Punkte schneidenden) Transversalen sind.

Beweis. Es mögen die sich in einem Punkte schneidenden Transversalen durch D, F und J gehen, und der Kreis ferner durch E, G und H.

Nach Satz 1. (Zusatz) ist

$$AE \,.\, AD \,.\, CF \,.\, CG \,.\, BJ \,.\, BH = AH \,.\, AJ \,.\, BG \,.\, BF \,.\, CD \,.\, CE$$

Nach Ceva

$$AD \,.\, CF \,.\, BJ = AJ \,.\, BF \,.\, CD$$

durch Division

$$AE \cdot CG \,.\, BH = AH \,.\, BG \,.\, CE$$

mithin müssen sich die nach B, G, H gezogenen Ecktransversalen in einem Punkte schneiden (Umkehrung des Ceva).

Satz 3. Fig. 3. (Analogie zu Satz 2).

Legt mnn durch die Fusspunkte dreier von einem Punkte aus auf die Dreiecksseiten gefällten Lote den Kreis, so erzeugt dieser drei neue Punkte, so dass die in ihnen auf den Seiten errichteten Lote sich in einem Punkte schneiden.

Beweis. Es mögen die Lote von X aus auf die Seiten AC, BC, AB nach D, F und J fallen. Der durch D, F, J gezogene Kreis möge die Seiten noch in E, G und H schneiden.

Nach Satz 1. ist

$$AE^2 + AD^2 + CF^2 + CG^2 + BJ^2 + BH^2 = AH^2 + AJ^2 + BG^2 + BF^0 + CD^2 + CE^2$$

Nach Spieker, Uebung 19 zu Abschnitt XIV ist

$$AD^2 + CF^2 + BJ^2 = AJ^2 + BF^2 + CD^2$$

durch Subtraction

$$AE^2 + CG^2 + BH^2 = AH^2 + BG^2 + CE^2$$

mithin müssen die in den Punkten E, G, H errichteten Lote sich in einem Punkte schneiden, (nach der Umkehrung des eben genannten Satzes).

Anmerkung: Der Kreis in Satz 3. bestimmt solche Punkte dass auch die Summen zu je sechser Quadrate der anstossenden Abschnitte gleich sind. Sein Mittelpunkt liegt in der Mitte der Verbindungslinie der beiden Punkte, in denen sich die Lote schneiden. Die sechs Punkte auf den Dreiecksseiten beim Feuerbach'schen Kreise haben beziehungsweise die in Satz 2. und in Satz 3. ausgesagten Eigenschaften.

Satz 4. Liegt die Ecke eines Dreiecks und die drei durch drei von einem Punkt aus gefällten Lote erzeugten Fusspunkte auf den Seiten auf einem Kreise, so steht die Verbindungslinie der Ecke mit dem fünften Punkte, den der Kreis erzeugt, senkrecht auf der Gegenseite zur Ecke.

Beweis: Es seien die Fusspunkte auf AC, BC, AB die Punkte D, E und G, der fünfte F.

Da der Kreis durch A geht, so sind zwei Glieder der Gleichung des Satzes 1. = 0 geworden, es ist also

$$AD^2+CE^2+CF^2+BG^2+BA^2 = AG^2+BF^2+BE^2+CD^2+CA^2$$

Ferner ist

$$AD^2+CE^2+BG^2 = AG^2+BE^2+CD^2,$$

Subtrahirt

$$CF^2+AB^2 = BF^2+AC^2$$

oder

$$CF^2-BF^2 = AC^2-AB^2$$

d. h. die Punkte A und F haben constante Differenz der Quadrate der Abstände von B und C, mithin muss

AF senkr. auf BC sein.

Satz 5. Fig. 4. (Umkehrung zu 4).

Beschreibt man über der Höhe als Sehne einen Kreis, so schneiden sich die in den 3 neuen Schnittpunkten des Kreises mit den Seiten auf denselben errichteten Lote in einem Punkte.

(Das Lot auf der Gegenseite ist $= 0$).

Beweis. Das Dreieck sei ABC, die Höhe AF. Der Kreis erzeuge noch die Punkte D, E, G, (wie im Satze 4).

Es ist

$$AD^2+CE^2+CF^2+BG^2+AB^2 = AG^2+BF^2+BE^2+CD^2+CA^2$$

da AF senkr. auf BC ist, so ist

$$AB^2+CF^2 = BF^2+CA^2$$

Subtrahirt

$$AD^2+CE^2+BG^2 = AG^2+BE^2+CD^2$$

mithin schneiden sich die in D, E und G errichteten Lote in einem Punkte.

Da $\angle FE = 90^0$, so ist AE Durchmesser. Wenn nun auf GA das Lot in G errichtet wird, so muss es auch durch E gehen, mithin ist der Schnittpunkt der Lote C und das in E errichtete Lot ist $= 0$.

Satz 6. Fig. 5. (Analogon zu Satz 5).

Beschreibt man um die Winkelhalbirende eines Dreiecks als Durchmesser den Kreis, so schneiden sich die nach den Schnittpunkten gezogenen Ecktransversalen in einem Punkte.

Beweis. AE sei die Winkelhalbirende, D, F, und G die erzeugten Punkte. Da ein jeder Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Winkelhalbirenden liegt, auf den Schenkeln des Winkels gleiche Stücke abschneidet z. B. AD und AG und AD' und AG', so ist

$$\frac{AD'}{AG'} = 1 = \frac{AD}{AG}$$

wo man den Kreis hinrückt bleibt

$$\frac{AD'}{AG'} = 1$$

mithin auch, wenn AD' und $AG' = 0$ werden. Der im Satze genannte Kreis, wird zwei Abschnitte so erzeugen, dass sie $= 0$ werden, da, wie eben gesagt, dieses $\frac{0}{0} = 1$ ist, so besteht die in Satz 1., Zusatz erwähnte Gleichung unter Fortlassung zweier Factoren.

Es ist

$$AD \,.\, CE \,.\, CF \,.\, BG \,.\, BA = AG \,.\, BF \,.\, BE \,.\, CD \,.\, AC$$

Nun ist

$$AB : BE = AC : CE$$

mithin

$$CE \,.\, BA = BE \,.\, AC$$

dividirt

$$AD \,.\, CF \,.\, BG = AG \,.\, BF \,.\, CD$$

und hieraus folgt die Behauptung (AF muss Höhe sein).

Satz 7. Wird ein gleichseitiges Dreieck beliebig von einem Kreise getroffen, so sind die Summen je dreier (vom Eckpunkt bis zum benachbarten Schnittpunkt gemessenen) Seitenabschnitte gleich; wobei Längen, welche abgewandt vom benachbarten Dreieckspunkte verlaufen, negativ zu nehmen sind.

Beweis. Wir beweisen nur den Fall, wo der Kreis zwischen den Eckpunkten liegt.

Das Dreieck sei ABC, die Schnittpunkte zusammen mit den Eckpunkten $\underline{A}$, D, E, $\underline{C}$, F, G, B, $\underline{H}$, J.

Nach Satz 1. ist

$$AD^2 + AE^2 + CF^2 + CG^2 + BH^2 + BJ^2$$
$$= AJ^2 + AH^2 + BG^2 + BF^2 + CE^2 + CD^2$$

also auch

$$\underbrace{AD^2 - CD^2} + \underbrace{AC^2 - CE^2} + \underbrace{CF^2 - BF^2} + \underbrace{CG^2 - BG^2} + \underbrace{BH^2 - AH^2}$$
$$+ \underbrace{BJ^2 - AJ^2} = 0$$

$$b(AD - CD) + b(AE - CE) + a(CF - BF) + a(CG - BG) + c(BH - AH)$$
$$+ c(BJ - AJ) = 0$$

da $a = b = v$, so ist nach Umformung

$$\underbrace{AD + AE} + \underbrace{CF + CG} + \underbrace{BH + BJ} = \underbrace{AJ + AH} + \underbrace{BG + BF} + \underbrace{CE + CD}$$

$$2AD + DE + 2CF + GF + 2BH + HJ = 2AJ + JH + 2BG + GF$$
$$+ 2CE + ED$$

mithin auch

$$AD + CF + BH = AJ + BG + CE$$

Liegt z. B. eine Ecke (A) im Kreise, so entsteht schliesslich

$$-AD + CF + BH = -AJ + BG + CE$$

da die Abschnitte AD und AJ ihren benachbarten Ecken C und B abgewandt sind, so sind sie negativ zu nehmen, falls der Wortlaut unseres Satzes für diesen und alle anderen Fälle stimmen soll.

Hiermit wollen wir enden. Der Kürze wegen unterlassen wir verschiedene Zusätze zu erwähnen, und die Beweise für bekannte Sätze, wie den des Feuerbach, welche durch unsere Beweisart sich leicht beweisen lassen.

Posen, den 1. Januar 1899.

XXVI.

Die geometrische Darstellung imaginärer Schnittpunkte.

Von

Prof. Dr. **Suhle**,

Realgymnasialdirector a. D.

Wenn

$$z^2 + x^2 = r^2$$

die Gleichung eines Kreises und

$$z = ax + b$$

die Gleichung einer geraden Linie ist, so ergeben sich für die Abscissen der Durchschnittspunkte des Kreises und der geraden Linie die imaginären Werte

$$x^2 = -\frac{ab}{a^2+1} \pm i\frac{1}{a^2+1}\sqrt{b^2 - r^2(a^2+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

sobald das Lot vom Mittelpunkt des Kreises auf die gerade Linie gefällt grösser ist als der Radius, sobald also $r^2(a^3+1) < b^2$ ist.

Die Ordinate dieser Durchschnittspunkte ist in diesem Falle durch die gleichfalls imaginären Werte

$$z = \frac{b}{a^2+1} \pm i\frac{a}{a^2+1}\sqrt{b^2 - r^2(a^2 \pm 1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gegeben.

Um die Bedeutung dieser für die Coordinaten der Durchschnittspunkte sich ergebenden imaginären Werte darzulegen und jede Lage

dieser imaginären Durchschnittspunkte geometrisch zu bestimmen, ist es notwendig, für die Variable der den obigen Gleichungen entsprechenden Functionen

$$z = \sqrt{r^2 - x^2}$$
$$z = ax + b$$

complexe Werte einzuführen und diese Functionen für complexe Variable geometrisch darzustellen. Dieser geometrischen Darstellung soll ein rechtwinkliges räumliches Coordinatensystem XYZ zu Grunde gelegt werden. Die XY Ebenen, in welcher die X Axe als reelle, die Y Axe als imaginäre Axe dienen soll, ist zur Aufnahme der complexen Variablen $x + y\sqrt{-1}$ als Abscisse bestimmt. Die complexe Function, welche durch $u + iv$ bezeichnet werden soll, wird als Ordinate senkrecht zu dieser Grundebene errichtet in der Art, dass in jedem Punkte der Grundebene die Ordinaten u und v als Ordinaten der entsprechenden reellen und imaginären Flächen errichtet werden sollen. Einem jeden Punkte der Grundebene entspricht daher im allgemeinen ein complexes Punktpaar, dessen Punkte durch die Endpunkte der reellen und imaginären Ordinaten bestimmt werden.

I. Geometrische Darstellung der geraden Linie für complexe Variable.

Aus der Gleichung

$$z = u' + iv' = a(x + iy) + b$$

ergiebt sich durch Trennung der reellen und imaginären Grössen

$$u' = ax + b$$
$$v' = ay$$

Geometrisch dargestellt wird die gerade Linie für complexe Variablen, daher in ihrem reellen Teile durch die Ebene U', welche durch die Linie

$$z = ax + b$$

parallel zur Y Axe gelegt wird und in ihrem imaginären Teile durch eine Ebene V', welche durch die X Axe unter dem durch die Gleichung $\operatorname{tang} \alpha = a$ bestimmten Winkel α gelegt wird.

Wenn $a = 0$, die Gleichung der Linie also $z = b$ ist, so wird diese Linie durch die parallel zur XY Ebene in der Entfernung $z = b$ gelegte Ebene U' und durch die xy Ebene selbst als V' Ebene dargestellt.

Wenn die Linie parallel der Z Achse, ihre Gleichung also $x=c$ ist, so ist die Ebene U' die der yz Ebene parallel in der Entfernung $x=c$ gelegte Ebene, die Ebene V' die XZ Ebene selbst.

II. Geometrische Darstellung des Kreises für complexe Variablen.

Die Gleichung

$$z = u + iv = \sqrt{r^2 - (x+iy)^2}$$

ergiebt nach Trennung der reellen und imaginären Grössen die Gleichung

$$z = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(r^2+x^2+y^2)^2 - 4r^2x^2} + (r^2-x^2+y^2)\right)}$$
$$\pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(r^2+x^2+y^2)^2 - 4r^2x^2} - (r^2-x^2+y^2)\right)}$$

also für die Bestimmung der Grössen u und v die Gleichungen

$$u^2 = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(r^2+x^2+y^2)^2 - 4r^2x^2} + (r^2-x^2+y^2)\right\}$$

$$v^2 = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(r^2+x^2+y^2)^2 - 4r^2x^2} - (r^2-x^2+y^2)\right\}$$

welche sich auch in der Form darstellen lassen

$$u^2(u^2 - r^2 + x^2) = y^2(x^2 + u^2)$$
$$v^2(v^2 + r^2 - x^2) = y^2(x^2 - v^2)$$

Die geometrische Darstellung des Kreises für complexe Variablen erfolgt durch die Flächen U und V, welche den zur XY Ebene senkrechten Ordinaten u und v zugehören.

Die Grössen u und v lassen sich auch für jeden Punkt P der Grundebene durch eine einfache geometrische Construction bestimmen.

Denn entspricht dem Punkte P die Abscisse

$$x + iy = \varrho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$$

und die Ordinate

$$z = u + iv = \varrho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$

so ergiebt sich

$$\varrho_2^2 = \sqrt{(r^2+x^2+y^2)^2 - 4r^2x^2}$$
$$= \sqrt{(r^2+\varrho_1^2+2r\varrho_1\cos\alpha)(r^2+\varrho_1^2-2r\varrho_1\cos\alpha)}$$

Wenn daher der Punkt P mit den Punkten der X Axe verbunden

wird, deren Abscissen $+r$ und $-r$ sind, so ist ϱ_2 die mittlere Proportionale dieser beiden Verbindungslinien.

Für die Bestimmung des Winkels α_2 ergiebt sich aus den beiden obigen Gleichungen

$$\operatorname{tang}\alpha_2 = \frac{r^2 - \varrho_1{}^2 \cos 2\alpha_1 - \varrho_2{}^2}{\varrho_1{}^2 \sin 2\alpha_1}$$

Halbirt man den Winkel, welchen die vorerwähnten Verbindungslinien mit einander bilden und bezeichnet durch β den Winkel, welchen diese Halbirungslinie mit der X Axe bildet, so ergiebt sich zur Bestimmung des Winkels β die Gleichung:

$$\operatorname{tang}\beta = -\frac{\varrho_1{}^2 \sin 2\alpha_1}{r^2 - \varrho_1{}^2 \cos 2\alpha_1 - \varrho_{21}{}^2}$$

Die Richtung von ϱ_2 steht daher senkrecht zur Richtung dieser Halbirungslinien, und deshalb ergiebt sich für die Grössen u und v einem beliebigen Punkte P entsprechend die folgende Construction:

Man verbinde den Punkt P mit den in der X Axe liegenden Punkten, deren Abscissen $+r$ und $-r$ sind, halbire den Winkel dieser Verbindungslinie und fälle vom Anfangspunkt der Coordinaten auf diese Halbirungslinien ein Lot. Auf diesem Lote trage man vom Anfangspunkte der Coordinaten aus die mittlere Proportionale der beiden Verbindungslinien ab und fälle vom Endpunkte auf die X Axe ein Lot.

Dann ist dies Lot gleich v und das von der X Axe abgeschnittene Stück gleich u.

Wie aus den Bestimmungsgleichungen für u und v hervorgeht, sind beide Werte doppeldeutig, doch entsprechen, da aus der Gleichung

$$(u+iv)^2+(x+iy)^2 = r^2$$

folgt:

$$uv+xy = 0$$

übereinstimmenden Vorzeichen von x und y entgegengesetzte Vorzeichen von u und v und umgekehrt. Zur Abscisse $x \mp iy$ gehört daher die Ordinate $u \pm iv$.

III. Von den ebenen Schnitten der U Fläche durch die X und Y Axe.

Eine durch die X Axe gelegte Ebene sei gegen die XY Ebene unter dem Winkel α geneigt. Bezeichnet man die Coordinaten in dieser Ebene durch x und z' und setzt

$$u = z' \sin\alpha, \quad y = z' \cos\alpha$$

in die der U Fläche entsprechende Gleichung

$$u^2(u^2 - r^2 + x^2) = y^2(x^2 + u^2)$$

ein, so erhält man für die ebene Durchschnittscurve die Gleichung

$$\frac{z'^2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{r^2} + \frac{x^2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha\, r} = 1 \quad \ldots\ldots (3)$$

Für positive Werte von

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos 2\alpha$$

also für Werte von α zwischen 45^0 und 90^0, ist die Durchschnittscurve daher eine Ellipse, deren Axen, wenn

$$\frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = k^2$$

gesetzt wird, kr und $\sin\alpha\ k\ r$ sind.

Für den senkrechten Schnitt also für $\alpha = 90^0$ geht z' in z über, h^2 nimmt den Wert 1 an, und die Gleichung der Schnittcurve die Form

$$z^2 + x^2 = r^2$$

Der Schnitt in der XZ Ebene ist der Kreis, welcher der ursprünglichen Function für reelle Variable entspricht.

Läest man den Winkel α von einem R an abnehmen, so werden die Axen der Ellipsen, von denen die kleinere Axe in der X Axe liegt grösser und grösser, bis die Ebene die U Fläche bei einem Winkel von 45^0 im Unendlichen schneidet.

Eine durch die Y Axe gelegte Ebene sei gegen die XY Ebene unter den Winkel α geneigt und die Coordinaten in dieser Ebene durch z', y bezeichnet.

Durch Einsetzen der Werte

$$a = z' \sin\alpha, \quad x = z' \cos\alpha$$

in die Gleichung der U Fläche ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{z'^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2 \sin^2\alpha} = 1$$

Die ebenen Schnittcurven der U Fläche durch die Y Axe sind für sämtliche Werte des Winkels α Hyperbeln, deren grosse Axe gleich r ist.

Wenn α gleich einem Rechten ist, geht z' in z über, und die Gleichung nimmt die Form an

$$z^2 - y^2 = r^2$$

Da für $x = 0$ auch die Function v den Wert 0 annimmt, so stehen über der y Axe nur reelle Ordinaten der Fläche U und kann deshalb die gleichseitige Hyperbel, welche den Schnitt der U Fläche durch die YZ Ebene bildet als reelle Nebencurve *) der in diesem Falle durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

gegebenen Hauptcurve bezeichnet werden.

Wenn der Winkel α abnimmt, so nimmt auch die Nebenaxe, also auch der Parameter der Hyperbeln ab, bis diese für $\alpha = 0$ in eine vom Endpunkte des Radius aus sich erstreckende in der X Axe liegende Gerade zusammenfällt.

Für die Punkte der X Axe, für welche $x > r$, ist also $u = 0$, während für diejenigen Punkte, für welche $x < r$ ist, die Function u den Wert $\sqrt{r^2 - x^2}$ annimmt.

---

*) Allgemein entspricht der Function

$$z = f(x + iy)$$

neben der reellen der Function

$$z = f(x)$$

zugehörigen, über der x Axe verlaufenden Curve, ein System reeller Nebencurven. Da durch Trennung des reellen und imaginären Teiles der Function

$$e = f(x + iy)$$

diese Function sich unter der Form

$$z = u + iv$$

darstellen lässt, so müssen sich unter der Bedingung $v = 0$ reelle Ordinaten ergeben. Wird der Gleichung $v = 0$ neben der Bedingung $y = 0$ durch die Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0$$

genügt, so verlaufen über den der letzten Gleichung entsprechenden Curven die reellen Nebencurven.

Diese reellen Nebencurven, welche die Eigenschaft haben, dass jedes Maximum oder Minimum derselben mit einem Minimum oder Maximum der Hauptcurve zusammenfällt, sind eingehend behandelt in den Abhandlungen „Ueber imaginäre Punkte" in den Programmen des Realgymnasiums zu Dessau von den Jahren 1893, 1894 und 1896.

Zur weiteren Bestimmung der Gestaltung der U Fläche mag noch hinzugefügt werden, dass diese Fläche im Scheitel des Kreises, welcher die Schnittcurve der XZ Ebene darstellt, einen singulären Punkt besitzt.

Aus der Differentialgleichung der Projection der Niveaulinien der Fläche U

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

ergiebt sich durch Berechnung der Werte für $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$, welche für $x = 0$ und $y = 0$ gleichfalls den Wert 0 annehmen, also durch Berechnung des unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden Wertes für $\frac{dy}{dx}$ der Wert

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1$$

In dem den Coordinaten $x = 0$ und $y = 0$ entsprechenden Scheitel des Kreises schneiden sich zwei auf einander senkrechte Niveaulinien, und zwar unter einem Winkel von 45° und 135° gegen die X Axe.

Die U Fläche ist in diesem Punkte sattelförmig, indem innerhalb der gegenüber liegenden von den Niveaulinien eingeschlossenen Quadranten, innerhalb deren die X Axe liegt, die Fläche im Anschluss an den Kreisbogen des Schnitts in der XZ Ebene bis zur X Axe abfällt, in denjenigen Quadranten dagegen, welchen die Y Axe zugehört, im Anschluss an die gleichseitige Hyperbel der YZ Ebene aufsteigt.

IV. Von den ebenen Schnitten der V Fläche durch die X und Y Axe.

Wenn die durch die X Axe gelegte Ebene unter dem Winkel α gegen die XY Ebene geneigt ist, und die Coordinaten in dieser Ebene durch x und z' bezeichnet werden, so hat man die Werte

$$v = z' \sin\alpha, \quad y = z' \cos\alpha\,.$$

in die Gleichung der V Fläche

$$v^2(v^2 + r^2 - x^2) = y^2(x^2 - v^2)$$

einzusetzen und erhält so für die ebenen, durch die X Axe gelegten Schnitte die Gleichung

$$\frac{x^2}{r^2 \sin^2\alpha} - \frac{z'^2}{r^2} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

Die Curven dieser ebenen Schnitte sind Hyperbeln, deren Nebenaxe constant gleich r ist, während die Hauptaxe von r bis 0 abnimmt, wenn der Winkel α von 90^0 bis 0^0 abnimmt. Der Parameter der Hyperbeln wächst daher mit abnehmendem Winkel, und die Schnittcurve wird für $\alpha = 0^0$ eine gerade Linie und zwar die Y Axe, für welche $v = 0$ ist.

Für $\alpha = 90^0$ geht z' und z und die Schnittcurve in die gleichseitige Hyperbel

$$x^2 - z^2 = r^2$$

über.

Da für Werte von x, welche grösser als r sind, die reelle Function u gleich null ist, so gehen die complexen Ordinaten für diesen Teil der X Axe in einfache imaginäre Ausdrücke über und die gleichseitige Hyperbel stellt sich hier als imaginäre Nebencurve des durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

gegebenen Kreises dar, während die in der YZ Ebene liegende gleichseitige Hyperbel

$$z^2 - y^2 = r^2$$

als reelle Nebencurve des Kreises bezeichnet werden musste. Um die ebenen Schnitte der V Fläche durch die Y Axe zu erhalten, mögen die Ordinaten in der unter dem Winkel α gegen die xy Ebene geneigten Ebene durch x' bezeichnet und daher

$$v = x' \sin\alpha, \quad x = x' \cos\alpha$$

gesetzt werden. Man erhält dann für die Schnittcurve die Gleichung

$$\frac{x'^2 \cos 2\alpha}{r^2} + \frac{y^2 \cos 2\alpha}{r^2 \sin^2\alpha} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Die ebenen Schnitte der V Fläche durch die Y Axe sind Ellipsen für alle Werte von α, welche innerhalb 0^0 und 45^0 liegen. Für $\alpha = 0$ wird die grosse Axe der Ellipse gleich r, die kleine Axe gleich 0, die Ellipse geht in die X Axe von $+r$ bis $-r$ über, für welchen Teil der Axe $v = 0$ ist. Mit zunehmendem Winkel α nehmen auch beide Axen der Ellipse zu, bis die unter dem Winkel $\alpha = 45^0$ gelegte Ebene die V Fläche im Unendlichen schneidet.

Zur Bestimmung der Lage der complexen Punktepaare, welche den imaginären Durchschnittspunkten des Kreises und der geraden Linie entsprechen, sind noch die Beziehungen zwischen den ebenen Schnitten beider Flächen U und V festzustellen.

Projicirt man die ebenen Schnitte beider Flächen auf die XY Ebene, so erhält man für die Projection des durch die Y Axe gelegten Schnittes der U Fläche die Gleichung

$$\frac{x^2}{r^2 \cos^2\alpha} - \frac{y^2}{r^2 \sin^2\alpha} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

und für die Projection des durch die X Axe gelegten ebenen Schnittes der V Fläche die Gleichung

$$\frac{x^2}{r^2 \sin^2\alpha} - \frac{y^2}{r^2 \cos^2\alpha} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

In beiden Fällen sind die Projectionen Hyperbeln, deren Haupt- und Nebenaxe die dem Winkel α entsprechende Horizontal- und Verticalprojection des Radius sind.

Setzt man in die zweite Gleichung für α den Winkel $90^0 - \alpha$ ein, so geht die Gleichung der zweiten Projection in diejenige der ersten über.

Die Projectionen des durch die Y Axe unter dem Winkel α gegen die XY Ebene gelegten Schnittes der U Fläche und die Projection des durch die X Axe unter dem Winkel $90^0 - \alpha$ gelegten Schnittes der V Fläche fallen daher zusammen.

In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass auch die Ellipsen zusammenfallen, welche sich als Projectionen des durch die Y Axe unter dem Winkel α gelegten Schnittes der V Fläche und des durch die X Axe unter den Winkel $90^0 - \alpha$ gelegten Schnittes der U Fläche ergeben. Auch hier sind die beiden Axen der Ellipsen die dem Winkel α entsprechenden Horizontal- und Vertical Projectionen des Radius.

V. Von den Schnittpunkten des Kreises und der geraden Linie für complexe Variable.

Der Schnittpunkt eines Kreises und einer geraden Linie wird nach Einführung complexer Variablen im allgemeinen durch ein complexes Punktpaar dargestellt werden, dessen reeller Punkt den reellen Flächen des Kreises, und der geraden Linie, also den Flächen U und U' zugleich angehört und dessen imaginärer, derselben Abscisse zugehörigen Punkt ebenso den imaginären Flächen des Kreises

und der geraden Linie, also den Flächen V und V' gemeinsam ist. Die Abscisse eines Durchschnittspunktes des Kreises und der geraden Linie wird sich daher als derjenige Punkt darstellen, in welchem die Projection der Schnittcurve der beiden imaginären Flächen V und V' durchschneidet. Ein dieser Abscisse zugehöriges complexes Punktpaar gehört zugleich den dem Kreise und der geraden Linien entsprechenden Flächen an.

Die Projection der Schnittcurve der reellen Flächen des Kreises und der geraden Linie, also der Flächen U und U' ergiebt sich aus den Gleichungen

$$u^2(u^2-r^2+x^2) = y^2(x^2+u^2)$$
$$u = ax+b$$

und erhält man aus denselben die Gleichung:

$$y^2 = \frac{(ax+b)^2\{(a^2+1)x^2+2ab\,x^2+b^2-r^2\}}{(a^2+1)x^2+2ab\,x+b^2} \quad \ldots\ldots (9)$$

Für die Projection der Schnittcurve der beiden Flächen V und V' ergiebt sich aus den Gleichungen

$$v^2(v^2+r^2-x^2) = y^2(x^2-v^2)$$
$$v = ay$$

die Gleichung

$$a^2y^2(a^2y^2+r^2-x^2) = y^2(x^2-a^2y^2)$$

welcher genügt wird durch die Werte

$$y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10^\alpha)$$

und

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{r^2}{a^2+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10^\beta)$$

Aus der Zusammenstellung der Werte für y^2 aus den Gleichungen (9) und (10^α) ergeben sich die reellen Werte der Abscissen

$$x = -\frac{ab}{a^2+1} \pm \frac{1}{a^2+1}\sqrt{r^2(a^2+1)-b^2} \quad \ldots\ldots (11)$$

Dieselben entsprechen den aus den Gleichungen

$$x^2+y^2 = r^2$$
$$y = ax+b$$

sich ergebenden Werten für die reellen Durchschnittspunkte des in der XZ Ebene liegenden Kreises und der derselben Ebene angehörigen geraden Linie.

Die Abscissen der imaginären Durchschnittspunkte ergeben sich durch Zusammenstellung der Gleichungen (9) und (10β). Die hierdurch sich ergebende Gleichung lässt sich auf die Form bringen:

$$x^4+\left(\frac{2a^3b}{a^4-1}+\frac{2ab}{a^2+1}\right)x^3+\left\{\frac{a^2b^2-a^2r^2+b^2}{(a^2+1)^2}+\frac{a^2b^2}{a^4-1}\right\}x^2$$
$$+\left\{\frac{(a^2b^2-a^2r^2+b^2)2a^3b}{(a^2+1)^2(a^4-1)}+\frac{2a^3b^3}{(a^4-1)(a^2+1)}\right\}x$$
$$+\frac{a^2b^2}{a^4-1}\left(\frac{a^2b^2-a^2r^2+b^2}{(a^3+1)^2}\right)=0 \quad \ldots (12)$$

Die 4 Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x_1=-\frac{ab}{a^2+1}$$

$$x_2=-\frac{ab}{a^2-1}$$

$$x_{3,4}=\frac{-ab\mp\sqrt{a^2r^2-b^2}}{a^2+1}.$$

Aus der Gleichung:

$$y^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{r^2}{a^2+1}$$

ergeben sich hieraus für y die 4 Werte

$$y_1=\pm\frac{1}{a^2+1}\sqrt{b^2-r^2(a^2+1)}$$

$$y_2=\pm\frac{1}{a^4-1}\sqrt{b^2(a^2+1)^2-r^2(a^2-1)^2(a^2+1)}$$

$$y_{3,4}=\pm\frac{1}{a(a^2+1)}\sqrt{a^2(b^2-a^2r^2)-b^2\mp 2ab\sqrt{a^2r^2-b^2}}$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2r^2-b^2}\pm b}{a(a^2+1)}\sqrt{-1}$$

Die aus den Werten $x_{3,4}$ sich ergebenden Werte für y sind imaginär, die diesen Werten entsprechenden Wurzeln kommen demnach nicht in Betracht.

Die aus den Wurzeln x_2 und y_2 sich ergebenden Werte für die complexen Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} x_2+iy_2 &= -\frac{ab}{a^2-1} \pm \frac{i}{a^4-1}\sqrt{b^2(a^2+1)^2-r^2(a^2-1)^2(a^2+1)} \\ u_2+iv_2 &= -\frac{b}{a^2-1} \pm \frac{i\,.\,a}{a^4-1}\sqrt{b^2(a^2+1)^2-r^2(a^2-1)^2(a^2+1)} \end{aligned}\right\} . \quad (13)$$

genügen in Bezug auf das Vorzeichen des imaginären Ausdrucks für iv nicht gleichzeitig den Bedingungen

$$uv = -xy$$
$$v = ay$$

Die durch die Gleichungen (13) gegebenen Coordinaten gehören also dem Durchschnittspunkte des Kreises und der geraden Linie nicht an *).

---

*) Die Werte der durch die Gleichung (13) gegebenen Coordinaten x_2+iy_2 und u_2+iv_2 genügen, wie dies den obigen Entwicklungen entspricht, den allgemeinen Bedingungen

$$(x \pm iy) + (u \pm iv)^2 = r^3$$
$$u \pm iv = a(x \pm iy) + b$$

sobald die Abhängigkeit der Vorzeichen der Grössen u und v von den Grössen x und y unberücksichtigt bleibt.

Die Abscissen $x_2 \pm iy_2$ entsprechen, da dieselben sich aus den Wurzeln der Gleichung (12) ergeben haben, daher auch, sobald

$$b^2 > \frac{r^2(a^2-1)^2}{a^2+1}$$

ist, Durchschnittspunkten der Projectionen, welche einerseits die Durchschnittscurven der beiden reellen Flächen. andrerseits die Durchschnittscurven der beiden imaginären Flächen des Kreises und der geraden Linie in der XY Ebene ergeben.

Bestimmt man das Vorzeichen der Grösse v in der Ordinate $u+iv$ so dass der Bedingung

$$xy + uv = 0$$

genügt wird, setzt also

$$x_2+iy_2 = -\frac{ab}{a^2-1} \pm \frac{t}{a^4-1}\sqrt{b^2(a^2+\ \ )^2-r^2(a^2-1)^2(a^2+1)}$$
$$u_2+iv_2 = -\frac{b}{a^2-1} \mp \frac{ai}{a^4-1}\sqrt{b^2(a^2+1)^2-r^2(a^2-1)^2(a^2+1)}$$

so genügen diese Coordinaten der Gleichung des Kreisee

$$x^2 + y^2 = r^2$$

aber nicht der Gleichung der geraden Linie

$$y = ax + b$$

Es kommen daher für die imaginären Durchschnittspunkte des Kreises und der geraden Linie nur die entsprechenden Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} x \pm iy &= -\frac{ab}{a^2+1} \pm \frac{i}{a^2+1}\sqrt{b^2 - r^2(a^2+1)} \\ u \pm iv &= \frac{b}{a^2+1} \pm \frac{ia}{a^2+1}\sqrt{b^2 - r^2(a^2+1)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (14)$$

in Betracht.

Die Coordinaten dieser complexen Punktpaare stimmen überein mit den Coordinaten, welche sich nach den Gleichungen (1) und (2) für imaginäre Durchschnittspunkte des Kreises und der geraden Linie ergeben haben.

Die imaginären Durchschnittspunkte des Kreises und der geraden Linie finden ihre geometrische Darstellung daher durch die complexen Punktpaare, deren reeller Punkt den reellen Flächen, deren imaginärer Punkt den imaginären Flächen, durch welche der Kreis und die gerade Linie für complexe Variable dargestellt werden, gemeinsam ist.

VI. Bestimmung der Lage der imaginären Schnittpunkte.

Die reellen Schnittpunkte des Kreises

$$z^2 + x^2 = r^2$$

und der geraden Linie

$$z = ax + b$$

liegen, wie der Kreis und die gerade Linie selbst, in der XZ Ebene

---

Die Gleichung der geraden Linie, deren Durchschnitt mit dem Kreise durch die vorstehenden Coordinaten in diesem Falle gegeben ist, hat die Form

$$y = -ax - \frac{b(a^2+1)}{a^2-1}$$

Die Lage dieser Linie wird durch die Lage des Punktes bestimmt, in welchem die Linie

$$y = ax + b$$

von demjenigen Lote durchschnitten wird, welches vom Anfangspunkt der Coordinaten auf die Linie

$$y = -ax - b$$

gefällt wird. Die Linie, deren Gleichung

$$y = -ax - \frac{b(a^2+1)}{a^2-1}$$

ist, steht auf diesem Lote in dem bezeichneten Schnittpunkte senkrecht.

Die Coordinaten des Mittelpunkts beider Durchschnittspunkte

$$\xi = -\frac{ab}{a^2+1}, \quad \eta = \frac{b}{a^2+1}$$

gehören zu dem Fusspunkte des vom Anfangspunkt der Coordinaten auf die gerade Linie gefällten Lotes.

Wenn die Schnittpunkte des Kreises und der geraden Linie imaginär werden, so wird die Abscisse der Schnittpunkte durch die Gleichung

$$x \pm iy = -\frac{ab}{a^2+1} \pm \frac{i}{a^2+1}\sqrt{b^2 - r^2(a^2+1)}$$

gegeben. Die Schnittpunkt liegen daher zu beiden Seiten der XZ Ebene in der Entfernung y von derselben.

Die über den durch diese Abscissen gegebenen Fusspunkten stehenden Ordinaten sind durch die Gleichung gegeben:

$$u \pm iv = \frac{b}{a^2+1} \pm i\frac{a}{a^2+2}\sqrt{b^2 - r^2(a^2+1)}$$

Auch in diesem Falle sind die Mittelpunkte beider imaginären Schnittpunkte bestimmt durch die Gleichungen

$$\xi = -\frac{ab}{a^2+1}, \quad \eta = \frac{b}{a^2+1}$$

Auch die Mitte der imaginären Schnittpunkte ist reell, liegt in der XZ Ebene, fällt auch hier mit dem Fusspunkte des vom Anfangspunkt der Coordinaten auf die gerade Linie gefällten Lotes zusammen.

Die beiden reellen den complexen Punktpaaren zugehörigen Punkte liegen in der Höhe des Fusspunktes dieses Lotes zu beiden Seiten der XZ Ebene; die imaginären Punkte liegen zu entgegengesetzten Seiten der XY Ebene und zwar so verteilt, dass die imaginären und reellen Punkte auf denselben oder entgegengesetzten Seiten der XY Ebene liegen, jenachdem in der Abscisse des Punktpaares die Werte von x und y entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben.

Die beiden reellen den complexen Punktpaaren angehörenden Punkte liegen hiernach zugleich in der U Fläche und in der durch die Y Axe und das vom Anfangspunkt der Coordinaten auf die gerade Linie gefällte Lot gelegten Ebene. Da diese Ebene die U Fläche nach Abschnitt III. in einer Hyperbel schneidet, so muss

der Ort der reellen Punkte die Hyperbel sein, deren Horizontalprojection nach Gleichung (7) durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{r^2 \cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{r^2 \sin^2 \alpha} = 1$$

gegeben ist, wenn α den Winkel bezeichnet, welchen das Lot mit der XY Ebene bildet. Da der Winkel α aber durch das Lot zur Linie

$$z = az + b$$

bestimmt wird, so nimmt hier $\operatorname{tang} \alpha$ den Wert

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{1}{a}$$

somit die vorstehende Gleichung der Hyperbel die Form

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = \frac{r^2}{1 + a^2}$$

an. Es stimmt diese Gleichung mit der Bedingungsgleichung 10$^{\beta}$ überein, welche für die Durchschnittspunkte des Kreises und der geraden Linie aufgestellt ist.

Die beiden imaginären, den complexen Punktpaaren angehörigen Punkte gehören der V Fläche an und liegen zugleich in der Ebene, welche durch die x Axe unter demselben Winkel α gegen die XY Ebene gelegt ist, unter welchem die gerade Linie

$$z = ax + b$$

gegen die X Axe geneigt ist.

Da diese Ebene die V Fläche in einer Hyperbel schneidet, so müssen die imaginären Punkte auf dieser Hyperbel liegen, deren Horizontalprojection nach Gleichung (8) durch die Gleichung

$$\frac{x^4}{x^2 \sin^2 \alpha} - \frac{y^2}{r^2 \cos^2 \alpha} = 1$$

gegeben ist.

Da hier der Winkel durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \alpha = a$$

bestimmt ist, so lässt sich auch diese Gleichung auf die Form bringen

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = \frac{r^2}{1 + a_n^2}$$

Die Projectionen beider Hyperbeln, auf denen die reellen und imaginären Punkte der complexen Punktepaare liegen, fallen daher zusammen, wie dies schon durch den Umstand bedingt ist, dass die zugehörigen reellen und imaginären Punkte eines complexen Punktpaares senkrecht über demselben Fusspunkte liegen *).

Es entsprechen die betreffenden Schnitte der U und V Fläche zugleich den Bedingungen, unter denen bereits im Abschnitt IV. das Zusammenfallen der Projectionen beider Schnittcurven nachgewiesen worden ist.

In zwei besonderen Fällen gehen die complexen Punktpaare, welche die imaginären Schnittpunkte darstellen, in einfache Punkte über, und zwar, wenn die den Kreis in der XZ Ebene durchschneidende gerade Linie der X Axe oder der Z Axe parallel ist.

Wenn die Linie der X Axe parallel ist, in der Gleichung

$$z + qx + b$$

---

*) Auch die reellen und imaginären Punkte der Punktepaare, deren Coordinaten durch die Gleichungen B gegeben sind, liegen auf Hyperbeln, deren Projection mit der Projection der oben behandelten Hyperbeln zusammenfällt. Der Halbirungspunkt dieser imaginären Punkte ist gleichfalls reell und durch die Coordinaten

$$\xi = -\frac{ab}{a^2-1}, \quad \eta = -\frac{b}{a^2-1}$$

gegeben. Es ist dies der in der Anmerkung (pag. 249) bezeichnete Punkt, in welchem das vom Anfangspunkt der Coordinaten auf die Linie

$$y = -ax - b$$

gefällte Lot die Linie

$$y = ax + b$$

durchschneidet.

Die reellen Punkte dieser Punktpaare liegen in der Ebene, welche durch dies Lot und durch die Y Axe bestimmt ist, demnach auf der Hyperbel, in welcher diese Ebene die U Fläche durchschneidet. Die imaginären Punkte liegen auf der Hyperbel, in welcher die unter dem Winkel α gegen die XY Ebene der V Fläche durchschneidet.

Bei diesen Punktpaaren liegen jedoch abweichend von den den imaginären Schnittpunkten des Kreises und der geraden Linie entsprechenden Punktpaaren die reellen und imaginären Punkte so, dass beide auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der XY Ebene liegen, je nachdem die den zugehörigen Abscissen entsprechenden Werte von x und y gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

für a der Wert 0 eintritt, die Gleichung der Linie also die Form $z = b$ annimmt, so ergeben sich für die Abscissen der reellen Schnittpunkte nach Gleichung 11) die Werte

$$x = \pm\sqrt{r^2 - b^2}$$

so lange $b<r$ ist.

Wenn $b > r$ ist, so werden die Schnittpunkte imaginär und nach Gleichung (14) erhält die Abscisse den Wert

$$x \pm iy = \pm\, i\sqrt{b^2 - r^3}$$

indem der reelle Teil des Ausdrucks zu null wird, und die Ordinate den Wert

$$u \pm iv = b$$

annimmt, indem der imaginäre Ausdruck v zur null wird.

Diesen reellen Ordinaten entsprechen daher, indem die imaginären Punkte fortfallen, allein reelle Punkte, welche in der YZ Ebene liegen und und zwar auf der gleichseitigen Hyperbel, welche in der YZ Ebene über der Y Axe aufsteigt und im Abschnitt III. als die reelle Nebencurve des Kreises bezeichnet worden ist.

Wenn die Linie der Z Axe parallel ist, die Gleichung der Linie also die Form $x = c$ annimmt, so ergiebt sich für die Abscisse der reellen Durchschnittspunkte aus der Gleichung 11), da in diesem Falle

$$a = \alpha, \quad -\frac{k}{\alpha} = c$$

zu setzen ist, der Wert

$$x = e, \text{ dem die Ordinate } z = \pm\sqrt{r^2 - e^3}$$

entspricht, welche reell ist, so lange $r > e$ ist.

Für die Abscisse der imaginären Durchschnittspunkte ergiebt sich aus den Gleichungen (19) gleichfalls $x = s$; die Ordinate $u + iv$ nimmt dagegen den Wert

$$u \pm iv = \pm\, i\sqrt{c^2 - r^2}$$

an, da der Wert

$$u = \frac{b}{a^2 + 1}$$

in diesem Falle den Wert 0 annimmt.

Die reellen Ordinaten kommen in Wegfall und es stehen über der X Axe in der XZ Ebene daher allein imaginäre Ordinaten.

Da deren Endpunkte zugleich der V Fläche und der XZ Ebene angehören, so liegen dieselben in der gleichseitigen Hyperbel, in welcher die XZ Ebene nach IV. die V Fläche durchschneidet, und welche als die imaginäre Nebencurve des Kreises bezeichnet worden ist.

Resultat der verschiedenen Untersuchungen.

Verschiebt man eine in der XZ Ebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten gezogene gerade Linie, welche einen in derselben Ebene um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen Kreis durschneidet, parallel so, dass ihre Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten mehr und mehr zunimmt, so rücken die reellen Schnittpunkte näher und näher, bis beide Schnittpunkte, wenn die Linie um dem Radius vom Anfangspunkte der Coordinaten entfernt ist, in einen Punkt zusammenfallen. Entfernt sich die Linie weiter, so erscheinen die imaginären Schnittpunkte zu beiden Seiten der XZ Ebene in gleicher Entfernung von derselben als complexe Punktpaare, deren Mittelpunkt der Fusspunkt des vom Anfangspunkt der Coordinaten auf die Linie gefällten Lotes bleibt, und deren reelle und imaginäre Punkte auf zwei Hyperbeln verlaufen.

Die reellen Punkte dieser complexen Punktpaare liegen in der durch die Y Axe und das auf die Linie gefällte Lot gelegten Ebene und verlaufen auf einer Hyperbel, deren Scheitel der Punkt ist, in welchem das auf die Linie gefällte Lot den Kreis durchschneidet.

Die imaginären Punkte liegen in einer Ebene, welche durch die X Axe unter demselben Winkel gegen die XY Ebene gelegt ist, unter welchem die gerade Linie gegen die X Axe geneigt ist, und verlaufen auf einer Hyperbel, deren Scheitel die Projection des Scheitels der ersteren Hyperbel auf die XY Ebene ist. Im Scheitel dieser Hyperbel entspricht der imaginären Ordinate der Wert null und diese Ordinate steigt auf der einen Seite der schiefen Ebene in die Höhe, während sie auf der anderen Seite abfällt.

Die Horizontalprojectionen beider Hyperbeln fallen zusammen in die Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = \frac{r^2}{1+a^2}$$

ist.

Die complexen Punktepaare, welche den imaginären Durchschnittspunkten entsprechen, gehen in einfache Schnittpunkte über, wenn die gerade Linie der X und Y Axe parallel ist, indem im ersteren Falle für $a = 0$ die imaginären Schnittpunkte durch reelle Punkte dargestellt werden, welche in der YZ Ebene auf der reellen Nebencurve liegen, während für $a = \infty$ allein imaginäre Schnittpunkte vorhanden sind, welche in der XZ Ebene auf der imaginären Nebencurve des Kreises liegen.

XXVII.

Zur Coordinatentransformation.

Von

Rudolf Ziegel.

Die Gleichung der Curve zweiter Ordnung in homogenen Punktcoordinaten lautet

$$f(y_1 y_2 y_3) \equiv a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} y_3^2 + 2a_{12} y_1 y_2 + 2a_{13} y_1 y_3 + 2a_{23} y_2 y_3 = 0$$

Man erhält die Gleichung in homogenen Liniencoordinaten, wenn man in der vorigen die y_i mit den u_i und die Coefficienten mit den entsprechenden Unterdeterminanten der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (a_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\lambda})$$

vertauscht (vgl. Clebsch-Lindemann, Geometrie I, p. 78 und 281). In übersichtlicher Form geschrieben, heisst sie

$$g(u_1 u_2 u_3) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ersetzt man in $g(u_1, u_3, u_3)$ die Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 bzhw. durch die Abgeleiteten

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = f_2, \quad \frac{df}{\partial y_3} = f_3$$

so erhält man

$$g(f_1, f_2, f_3) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & f_2 \\ a_{41} & a_{32} & a_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante hat den einfachen Wert $-4f(y_1, y_2, y_3).\varDelta$ es enthält also $g(f_1, f_2, f_3)$ den Factor $f(y_1, y_2, y_3)$, wie ja stets die mit den ersten Ableitungen geränderte Hesse'sche Covariante einer ternären Form durch die Form selbst teilbar ist. Die Determinante $\varDelta$ wurde stillschweigend als von null verschieden vorausgesetzt, entsprechend soll im Folgenden die Hesse'sche Covariante nicht identisch den Wert null haben.

Es wird behauptet, dass allgemein

> die linke Seite $g(u_1, u_2, u_3)$ der Gleichung einer Curve in homogenen Liniencoordinaten durch die linke Seite $f(y_1\, y_2, y_3)$ der Gleichung derselben Curve in homogenen Punktcoordinaten teilbar ist; wenn man die u_i durch die Abgeleiteten $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ ersetzt, d. h. dass $g\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial y_3}\right)$ den Factor $f(y, y_2, y_3)$ enthält.

Es sei

$$f(y_1, y_2, y_3) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten von höherer als der ersten Dimension. Wir führen einen Parameter tp ein, dass die Functionen

$$y_i = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, 3$$

die Gleichung (1) identisch befriedigen und die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t), & \varphi_2(t), & \varphi_3(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \varphi_3'(t) \\ \varphi_1(t), & \varphi_2(t), & \varphi_3(t) \end{vmatrix}$$

wo die Accente die Ableitungen nach der unabhängigen Variablen

bezeichen, nicht identisch verschwindet. Die y_i bilden dann ein Fundamentalsystem von Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3y}{dt} + p_1 \frac{d^2y}{dt} + p_2 \frac{dy}{dt} + p_3 y = 0 \tag{2}$$

Zwischen den Fundamentalintegralen y_i dieser Differentialgleichung besteht die homogene, nicht lineare Relation (1). Aus dieser folgt nach dem Euler'schen Satze und durch Differentiation

$$y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 = 0$$

$$\frac{dy_1}{dt} f_1 + \frac{dy_2}{dt} f_3 + \frac{dy_3}{dt} f_3 = 0$$

Das Ergebniss dieser beiden inbezug auf f_1, f_2, f_3 homogenen linearen Gleichungen ist

$$f_1 : f_2 : f_3 = \left(y_2 \frac{dy_1}{dt} - y_3 \frac{dy_2}{dt}\right) : \left(y_3 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dy_3}{dt}\right)$$

$$: \left(y_1 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dy_1}{dt}\right) = u_1 : u_2 : u_3$$

oder

$$f_1 = du_1, \quad f_2 = du_2, \quad f_3 = du_3 \tag{3}$$

wenn man mit u_1, u_2, u_3 die den Integralen y_1, y_2, y_3 der Differentialgleichung (2) adjungirten Integrale bezeichnet. M bedeutet eine gewisse Function von t.

Nun hat Herr Fuchs (vgl. Sitzb. d. Berl. Akad. 180, p. 47.) bewiesen, dass auch die (linear unabhängigen) Integrale u_1, u_2, u_3 einer homogenen Relation mit constanten Coefficienten

$$g(u_1, u_2, u_3) = 0 \tag{4}$$

genügen. Ersetzt man hierin u_1, u_2, u_3 durch die Ausdrücke (3) so erhält man

$$g(f_1, f_2, f_3) = 0$$

Da zwischen den Integralen y_1, y_2, y_3 nicht mehr als eine irreductible homogene Gleichung bestehen kann, so ist notwendig $g(f_1, f_2, f_3)$ teilbar durch $f(y_1, y_2, y_3)$. Die Gleichung (4) stellt dasselbe Gebilde in Linien — wie Gleichung (1) in Punktcoordinaten dar (vgt. etwa A. Krug, Zur linearen Differentialgleichung dritter Ordnung, Prag 1892, p. 60). Damit ist die Behauptung erwiesen.

Unser Satz liefert eine neue Methode zur Transformation einer Gleichung von Punkten in Liniencoordinaten. Als Beispiel soll die Gleichung

$$f(y_1, y_2, y_3) \equiv y_1^n + y_2^n + y_3^n = 0$$

behandelt werden, wo n eine ganze Zahl bedeutet.

Es kommt nach dem Obigen darauf an, eine irreductible Form $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ zu finden so, dass das Product $(y_1^n + y_2^n + y_3^n) \cdot \varphi(\varphi_1, y_2, y_3)$ nur die Potenzen y_1^{n-1}, y_2^{n-1}, y_3^{n-1} enthält, d. h. dass

$$(5) \quad (y_1^n + y_2^n + y_2) \cdot \varphi(y_1, y_2, y_3) = g(y_1^{n-1}, y_2^{n-1}, y_2^{n-1}) \text{ ist,}$$

$$g(u_1, u_2, u_3) = 0$$

ist dann die gesuchte Gleichung in Liniencoordinaten.

Die $n-1$ verschiedene Wurzeln der Gleichung

$$x^{n-1} = 1 \quad \text{seien} \quad 1, \varrho, \varrho^2, \ldots \varrho^{n-2}$$

Wir ersetzen in (5) y_2 durch ϱy_2, dabei bleibt die linke Seite ungeändert, weil sie nur y^{2n-1} enthält, andererseits aber geht sie in $(y_1^n + \varrho y_2^n + y_3^n) \cdot \varphi(y_1, \varrho y_2, y_3)$ über: es ist daher

$$(y_1^n + y_3^n + y_3^n) \cdot \varphi(y_1, y_2, y_3) = (y_1^n + \varrho y_2^n + y_3^n) \cdot \varphi(y_1, \varrho y_2, y_3)$$

Hieraus folgt, dass $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ durch $y_1^n + \varrho y_2^n + y_3^2$ teilbar ist.

Ersetzt man ferner y_2 der Reihe nach durch $\varrho^2 y_2$, $\varrho_3 y_2, \ldots \varrho^{n-2} y_2$, so erkennt man, dass $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ teilbar ist durch $y_1^n + \varrho^2 y_2^n + y_{3^n}$, $\ldots y_1^n + \varrho^{n-2} y_2^n + y_6^n$. In derselben Weise findet man, wenn y_3 durch $\varrho^1 y_3$, $\varrho^2 y_3, \ldots \varrho^{n-2} y_3$ ersetzt wird, dass $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ auch die Factoren $y_1^n + y_2^n + \varrho y_3^n$, $y_1^n + y_2^n + \varrho^2 y_3^n, \ldots y_4^n + y_2^n + \varrho^{n-3} y_3^n$ enthält.

Wir ersetzen nun gleichzeitig y_2 durch ϱy_2, $\varrho^2 y_2, \ldots \varrho^{n-2} y_2$ und y_2 durch $\varrho^1 y_3$, $\varrho^2 y_3, \ldots \varrho^{n-3} y_3 \ldots$ und ersehen, dass $\varphi(y_4, y_2, y_3)$ auch durch $y_1^n + \varrho y_2^n + \varrho y_3^n$, $y_1^n + \varrho y_2^n + \varrho^2 y_3^n, \ldots y_1^n + \varrho^2 y_2^n + \varrho^{n-2} y_3^n \ldots, y_1^n + \varrho^{n-2} y_2^n + \varrho^2 y_3^n$, $y_1^a + \varrho^{n-2} y_2^n + \varrho^2 y_3^n, \ldots y_1^n + \varrho^{n-2} y_2^n + \varrho^{n-2} y_3^n$ teilbar ist.

Allgemein sei jetzt

$$y_1^n + \varrho^p y_2^n + \varrho^q y_3^n = (p, q)$$

gesetzt; dabei sollen p und q alle Werte von 0 bis $n-2$ mit Ausnahme des Wertepaares $(p = 0, q = 0)$ annehmen. Solcher Trinome giebt es

$$(n-1)^2 - 1 = n(n-2)$$

Die Function $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ ist nach dem Vorigen durch die sämtlichen $n(n-2)$ Trinome teilbar.

Je zwei der Functionen (p, q) sind teilerfremd. Denn jeder Divisor einer Function (p, q) muss y_1, y_2, y_3 gleichzeitig enthalten. Ein gemeinsamer Divisor zweier Functionen müsste auch in deren Differenz aufgehen, diese ist aber nur von y_2 und y_3 abhängig.

Daher ist die Function $\varphi(y_1, y_2, y_3)$ durch das Product der sämtlichen $n(n-2)$ Trinome teilbar.

Das Product $(y_1^n + y_2^n + y_3^n) \cdot \Pi(p, q)$ ist eine homogene Function von $y_1^{n-1}, y_2^{n-1}, y_3^{n-4}$. Es hat nämlich die $(n-1)^2$ Factoren

$$\begin{array}{lllll}
(0, 0), & (1, 0), & (2, 0), & \ldots & (n-2, 0) \\
(0, 1), & (1, 1), & (2, 1), & \ldots & (n-2, 1) \\
(0, 2), & (1, 2), & (2, 2), & \ldots & (n-2, 2) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(0, n-2), & (1, n-2), & (2, n-2(, & \ldots & (n-2, n-2)
\end{array}$$

Ersetzt man y_1 durch ϱy_1, so stimmt das Product der Factoren der λten Spalte mit dem der Glieder der $(\lambda-1)$ Spalte überein; ersetzt man y_1 durch $\varrho^{\varkappa} y_1$, so stimmt das Product der Factoren der λ ten Spalte mit dem der Glieder der $(\lambda = \varkappa)$ten Spalte überein für $\varkappa = 2, 3, \ldots n-2$.

Wird y^2 durch $\varrho^{\varkappa} y_2$ ersetzt, so geht die λte in die $(\lambda + \varkappa)$te Spalte über, und, wenn y_3 durch $\varrho^{\varkappa} y_3$ ersetzt wird, die λte Zeile in die $(\lambda + \varkappa)$te Zeile für $\varkappa = 1, 2, \ldots n-2$). Hierbei ist von $\lambda + \varkappa$ der kleinste positive Rest nach dem Modul $n-1$ gemeint).

Daraus folgt, dass in der Tat die Function $(y_1^n + y_2^n + y_2^n . \Pi(p, q)$ nur von den Potenzen $y_1^{n-1}, y_2^{n-1}, y_3^{a-1}$ abhängt.

Hiernach ist der Quotient $\frac{(y_1^n + y_2^n + y_3^n) \cdot \varphi(y_1 y_2 y_3)}{(y_1^n \mp y_2^n + v_3^n \cdot \Pi(p, q)}$ eine Function von $y_1^{n-1}, y_2^{n-1}, y_3^{n-1}$, da Zähler und Nenner einzeln es sind, ferner eine ganze rationale Function, da $\varphi(y_1, y_7, y_3)$ durch $\Pi(p, q)$ teilbar ist. Es ist daher

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = \Pi(p, q) \cdot \psi(y_1^{n-1}, y_2^{n-1}, y_3^{n-1})$$

wo ψ eine willkürliche Form bezeichnet, die allgemeinste Lösung der gestellten Aufgabe. Hieraus folgt auf Grund der Gleichung (5)

$$g(y_1^{n-1}, y_2^{n-1}, y_{3n-1}) = (y_1^n + y_2^n + y_3^n) \cdot \Pi(p, q)$$
$$\cdot \psi(y_1^{n-1}, y_2^{n-6}, y_3^{n-1})$$

§ 1.

$$0 \overset{=}{<} u \overset{=}{<} a$$

Seien α, β, γ die Richtungswinkel von AP, BP, MP; dann ist

$$\delta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \gamma \tag{1}$$

der gesuchte Winkel. Nun hat man

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v-a}{u+a}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{v-a}{u-a}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{v}{a}$$

woraus:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\frac{2u(v-a)}{(v-a)^2+a^2-u^2} = -2u\frac{v-u}{p^2-2u^2}$$

wo

$$p = (v-a)^2+a^2+u^2 \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{p-2u^2+r}{2u(v-a)}$$

wo

$$r^2 = p^2 - 4a^2u^2 \tag{3}$$

Das fragliche Vorzeichen von v darf nicht unentschieden bleiben. Sind u und $v-a$ positiv, so muss r das Vorzeichen von $\sin(\alpha+\beta)$ haben. Die Bedingung ist ausserhalb des Feldes immer erfüllt. Dann zeigt eine Betrachtung des Dreiecks APB, worin $AP > BP$, dass Wkl. $ABP > BAP$, d. h.

$$2R - \beta > \alpha \quad \text{oder} \quad \alpha+\beta < 2R$$

folglich

$$\sin(\alpha+\beta) > 0$$

ist. Demnach ist r stets positiv.

Jetzt ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{u(p-2u^2+r) - 2ur(v-a)}{2u^2(v-a)+v(p-2u^2+r)}$$

Das ist, nach Erweiterung des Bruchs mit $2u^2(v-a)+v(p-2u^2-r)$

$$\operatorname{tg}\delta = 2au\,\frac{\dfrac{u^2+v^2}{p+r}-1}{p-2a^2} \tag{4}$$

Hiernach ist $\delta = 0$ erstens für $u = 0$, zweitens für

$$u^2+v^2 = p+r$$

Die letztere Gleichung gibt nach Gl. (2) (3):

$$[u^2+(v-a)^2-a^2]^2 = 0$$

daher ist $\delta = 0$ erstens längs der y Axe, zweitens längs dem Kreisbogen

$$u^2+(v-a)^2 = a^2 \tag{5}$$

der sich vom Punkte $(0, 2a)$ zum Punkte (a, a) erstreckt.

Zur Ermittelung des grössten absoluten δ ergibt die Differentiation von Gl. (4) bei constantem u mit Anwendung von Gl. (2) und (3):

$$\frac{\partial\operatorname{tg}\delta}{\partial v} = \frac{4au}{p+r}\,\frac{(v-2a)(v-a)^2-v(a^2-u^2)}{(p-2a^2)^2}\,\frac{r-2a(v-a)}{p}$$
$$= \frac{4au}{p+r}\,\frac{(v-2a)(v-a)^2-v(a^2-u^2)}{r[r+2a(v-a)]}$$

folglich ist der Wert von

$$v\Delta = (v-2a)(v-a)^2 - v(a^2-u^2)$$

allein bestimmend für das Wachsen oder Abnehmen von δ. Nun ist, für $v < 2a$, Δ beständig < 0, dagegen für $v > 2a$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial v} = 2\left(v-2a+\frac{a^3}{v^2}\right) > 0$$

folglich nimmt δ von $v = a$ bis $v = 2a$ beständig ab, dagegen wächst Δ, das für $v = 2a$ negativ war, für $v > 2a$ beständig und muss einmal aber auch nur einmal verschwinden, d. h. δ muss für irgend ein $v > 2a$ nach absolutem Werte ein einziges Maximum haben.

Der Punkt P, welcher für irgend ein u diesem Maximum entspricht, erzeugt bei variirendem u (von 0 bis 1) eine Curve Q, deren Gleichung

$$v\Delta \equiv (v-2a)(v-a)^2 - v(a^2-u^2) = 0$$

Längs der Curve Q ist

$$\{(v-2a)(3v-2a)+u^2\}\partial v + 2vu\,\partial u = 0$$

daher nimmt v bei wachsendem u beständig ab; die Endpunkte sind:

$$Q_0\,(u=0,\ v=2{,}839\ .\ .\ .) \quad \text{und} \quad Q_1\,(u=1,\ v=2)$$

Die Variation von δ längs Q lässt sich nicht einfach ausdrücken; doch zeigt die folgende Tabelle, dass δ mit x von 0 an beständig wächst.

Coordinaten längs Q. Sei $a=1$.

v	u	$-\operatorname{tg}\delta$
2	1	0,0897
2,1	0,971	0,0846
2,2	0,934	0,0789
2,3	0,883	0,0720
2,4	0,820	0,0646
2,5	0,742	0,0562
2,6	0,640	0,0468
2,7	0,501	0,0355
2,8	0,272	0,0214
2,839	0	0

Das, obwol unbewiesene stete Wachsen, als unzweifelhaft angenommen, folgt, dass der Wert im Punkte

$$-\operatorname{tg}\delta = \frac{5\sqrt{5}-11}{2} = 8(\sqrt{5}-1)^5 = 0{,}0[illegible]0\,66\,999 \tag{6}$$

der grösste im Bereiche $0 \leqq u \leqq a$ ist.

§ 2.

$$a \leqq u \leqq v$$

Liegt der Punkt P im so begrenzten, zweiten Gebiet, so sind die äussersten Sehstrahlen AP und CP. Möge daher jetzt β der

Richtungswinkel von CP bezeichnen, während Gl. (1) den gesuchten Winkel δ wie bisher ausdrückt. Hier ist:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v-a}{u+a}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{v+a}{u-a}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{v}{u}$$

woraus:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{2(uv \pm a^2)}{u^2 - v^2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{r - u^2 + v^2}{2(uv + a^2)}$$

wo

$$r^2 = (u^2+v^2)^2 + 8a^2uv + a^4$$

Jetzt ist

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \gamma\right) = \frac{u(r - u^2 + v^2) - 2v(uv + a^2)}{2u(uv + a^2) + u(r - u^2 + v^2)}$$

Macht man den Zähler rational, so findet man:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2a^2(n^9 - v^2)}{(u^2+v^2)^2 + 4a^2uv + (u^2+v^2)r}$$

Diese Ausdrucksform stellt den Sinn der Variation von δ unmittelbar durch das ganze Gebiet übersichtlich ins Licht. Wenn u von 1 bis v wächst, so ist der Zähler des Ausdrucks stets negativ und wächst, der Nenner stets positiv und wächst. Folglich ist

$$\text{abs. } \operatorname{tg}\delta = -\operatorname{tg}\delta$$

beständig positiv und nimmt bis 0 beständig ab.

Nun ist der Sehstrahl CP, identisch mit BP, beiden Gebieten gemein für $u = a$, mithin sind die in § 1. berechneten Werte von δ auch im 2. Gebiete für $v = a$ gültig. Aus § 1. ist bekannt, dass, für $v > 2a$, $-\operatorname{tg}\delta$ beständig abnimmt. Alles Wachsen von u und v, beginnend von $u = a$ und $v = 2a$, vermindert also den Wert von $-\operatorname{tg}\delta$. Das Ergebniss von § 1. gilt nun auch für das 2. Gebiet, demnach für die ganze Ebene; d. h. der Wert (5) ist der grösste.

Bemerkung 1. Die Eigenschaft des Kreises (5), nach welcher längs desselben $\delta = 0$ ist, erschien als besonderes Ergebniss der Rechnung. Ausserdem ist sie aber auch durch Figurbetrachtung sofort zu ersehen. Liegt nämlich P auf dem Kreise, so sind die beiden Teile des Winkels zwischen den äussersten Sehstrahlen,

APM und BPM, Peripheriewinkel auf gleichen Sehnen, und MP selbst halbirt ihn.

Bemerkung 2. Im 2. Gebiet führt die Betrachtung des Dreiecks ACP mittelst bekannter Sätze mühelos zu dem Ausdruck

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{f-g}{f+g} - \frac{2eh}{(f+g)^2 - e^2}$$

wo

$$AC = e; \quad PA = f; \quad PC = g$$

die Seiten und h die Höhe von P aus bezeichnen. Doch scheint dieser Weg für die Theorie nicht förderlich.

XXIX.

Ueber die trigonometrische Lösung merkwürdiger Dreiecksaufgaben.

Von

A. Korselt in Plauen i./V.

„Die reine Mathematik wächst, indem man die alten Probleme mit neuen Methoden durchdenkt“, sagt F. Klein in seiner Gedächtnissrede auf Riemann[1]). Beispiele dafür sind die in diesem Jahrhundert gelösten berühmten geometrischen Probleme des Altertums. Seit Anfang dieses Jahrhunderts werden aber in den Lehrbüchern neue mit Zirkel und Lineal zu bewältigende Constructionsaufgaben gestellt, ohne dass dabei eine bestimmte Einteilung durchgeführt wird. Man stellt die Aufgaben willkürlich neben einander und fragt nicht, ob dies sämtliche lösbare Aufgaben sind, die sich aus vorgegebenen Stücken bilden lassen. Nur für die Ordnung nach den Methoden der Lösung ist ein guter Anfang gemacht in der Schrift Petersens: Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben. Im Geiste der modernen Mathematik (vergl. Engel, der Geschmack in der neueren Mathematik S. 10 und 11) hat man sich zuerst zu fragen:

> „Welche elementar-geometrischen Aufgaben lassen sich mit Zirkel und Lineal lösen?“

und da für scheinbar einfache Aufgaben diese Werkzeuge nicht genügen und ein beliebiger Winkel durch wenige einfache Versuche,

---

1) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 41 S. 47.

z. B. durch fortgesetzte Halbirung, beliebig genau in n gleiche Teile zerlegt werden kann, so kommt man von selbst auf die allgemeinere Frage:

„Welche elementar-geometrischen Aufgaben sind mit Lineal, Zirkel und Winkelteilung lösbar?“

oder in's Algebraische übersetzt: welche geometrischen Aufgaben führen zu „metacyklischen“ (auflösbaren) Gleichungen: d. h. Gleichungen, deren Wurzeln sich durch Wurzeln binomischer Gleichungen ausdrücken lassen?

Diese Frage ist für eine besondere Aufgabe von Herrn Heymann in Hoffmann's Zeitschrift 1896 S. 597 gestellt und von mir in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 42, S. 304 ff. beantwortet, aber sonst noch nicht berührt worden. In ihrer Allgemeinheit bietet sie auch keinen Angriffspunkt, man wird das Gebiet der gegebenen Elemente einschränken müssen. Nur sind in den planimetrischen Lehrbüchern die am häufigsten vorkommenden Aufgaben diejenigen der Bestimmung eines Dreiecks aus den sogenannten merkwürdigen Strecken, d. h. aus den Seiten a_i, Höhen h_i, Winkellinie m_i, Radien des Umkreises (r), des Inkreises (ϱ), der Ankreise (ϱ_i), den inneren (w_i) und äusseren (w_i') Winkelhalbirenden. Nur einzelne Fälle davon werden behandelt, über die andern schweigt man. Angeregt durch diese Bemerkung und die Frage Herrn Heymanns will ich daher untersuchen:

„Welche Dreiecke lassen sich mit Lineal, Zirkel und „Winkelteilung bestimmen, wenn irgend drei der Seiten „a_i, h_i, m_i, r, ϱ_i, w_i, w_i' gegeben sind?“

Die Antwort erhalten wir durch die Entscheidung, ob eine gewisse aus den Ausdrücken der gegebenen Stücke durch die Seiten abgeleitete Gleichung im obigen Sinn auflösbar ist. Dabei stütze ich mich auf das vortreffliche Buch H. Weber's: „Lehrbuch der Algebra“, 2 Bde., 1. Auflage, das ich mit 20. Band- und Seitenzahl anführe, und auf den Begriff des Rationalitätsbereichs, der in Kronecker's: „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen“ S. 1—17 auseinander gesetzt wird. Mit $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$ wird der aus den bekannten Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ abgeleitete Rationalitätsbereich, mit $(R, e_1, e_2, \ldots)$ der zu $(e_1, e_2 \ldots)$ gehörige allgemeine Rationalitätsbereich bezeichnet, d. h. derjenige, der aus $(e_1, e_2 \ldots)$ durch Hinzunahme aller von e_1, e_2 unabhängigen Grössen („Constanten“) entsteht.

Die erwähnten Aufgaben teilen wir in drei Ordnungen I, II, III, jenachdem sie Stücke einer, zweier oder dreier Sorten enthalten,

jede Ordnung in Familien (arabische Ziffern) nach der Art der Stücke, jede Familie in einzelne Aufgaben ($e-e$)) nach der Lage der Stücke. Ein B. mit Ziffer hinter einer Aufgabe bedeutet eine unter dieser Summe gelöste Aufgabe in Brockmann's „Materialien zu Dreiecksconstructionen" (Teubner).

Sehr viele Aufgaben lassen sich auf andere zurückführen durch Vertauschung der Indices der gegebenen Stücke oder durch Vertauschung der Länge einer Seite a_i mit dem entgegengesetzten Werte $-a_i$. Z. B. bedeutet $31^a(123)(2-2)$ hinter der Aufgabe 86^b, dass 86^b aus 31^a entsteht durch die aufeinander folgenden Substitutionen:

$$a_2 \text{ für } a_1 \; a_3 \text{ für } a_2, \; a_1 \text{ für } a_3, \; -a_2 \text{ für } a_2$$

Dadurch gehen nämlich die Werte der in 31^a gegebenen Stücke, ausgedrückt durch die Seiten, über in die in 86^b gegebenen Stücke; aus den Werten der a_i in 31^a findet man dadurch die Werte der a_i in 83^b. Es ist dabei noch zu beachten, dass durch die Substitution übergeht

ϱ^2 in ϱ_i^2 und umgekehrt,
ϱ_k^2 in ϱ_i^2,
w_k^2 in $w_k'^2$

während die andern hier vorkommenden Stücke unverändert bleiben.

Das Zeichen $\equiv$ zwischen zwei Ausdrücken bedeutet, dass für den einen ein kürzeres Zeichen eingeführt wird. Sollen die Variablen x_1, x_2 . . . einer Function f ersetzt werden durch die Werte e_1. e_2, . . . , so wird dies geschrieben

$$((x_1 = e_1, \; x_2 = e_2, \; . \; . \; .)$$

b. hinter einer Aufgabe sagt, dass ihre elementare Lösung bekannt und einfach ist, ein a. giebt die Auflösbarkeit durch die gestatteten Werkzeuge an, f heisst „construirbar" A_i, B_i, P_i verweisen wir bzhw. auf die bekannten Beziehungen

$$h_i = \frac{2\varrho\varrho}{\varrho_i - \varrho} = \frac{2_k \varrho_l}{\varrho_k + \varrho_l}$$

$$w_i w_i' = h_i \sqrt{w_i^2 + w_i'^2}$$

$$w_i^4 (a_k^2 - a_l^2)^2 - 4 a_1^2 a_2^2 a_3^2 w_i^2 + a_k^2 a_l^2 [4 q_k^2 q_l^2 - (q_k^2 + q_l^2 - (q_k^2 + q_l^2 - q_i^2)^2] = 0$$

In dieser Arbeit benutzen wir ausser den elementaren folgende algebraische Sätze:

A. Satz von **Budam-Fourier**. *Die Anzahl der zwischen* α *und* β *gelegenen reellen Wurzeln von* $f(x)$ *ist höchstens wie die Zahl der zwischen* α *und* β *verlorenen Zeichenwechsel, und wenn sie kleiner ist, so ist der Unterschied eine gerade Zahl.* W. I, 300.

B. Satz von **Rolle**. *Hat* $f(x)$ *nur reelle Wurzeln, so haben auch die Abbildungen* $f(x)^{(x)}$ *nur reelle Wurzeln.* W. I, 32a.

C. Satz von **Sturm**. *Ist* $f(x), f_1(x), \ldots f n_1(x)$ *eine „Sturm'sche Kette," so ist die Anzahl der Wurzeln von f zwischen* α *und* β $(\alpha < \beta)$ *gleich dem Ueberschuss der Anzahl der Zeichenwechsel der Kette für* $x = \alpha$ *über die Anzahl der Zeichenwevhsel für* $x = \beta$. W. I, 273. Die Bildung der Sturm'schen Kette geschieht nach W. I, 279.

D. *Wenn* eine *Wurzel einer irreducibeln Gleichung durch Lösung cyklischer Gleichungen bestimmbar ist, so ist die Gleichung metacyklisch.* W. I, 599.

E. *Sind die Coefficienten der unzerlegbaren Function* $f(x)$ *rationale Functionen irgend welcher Parameter, und erhält f einen von x abhängigen Factor g, nachdem man für einige Parameter bestimmte rationale Werte eingesetzt hat, so ist* $g = 0$ *auflösbar, wenn die Gleichung* $f = 0$ *es ist.*

F. Satz von **Kronecker**. *Eine inducible metacyklische Gleichung vom Primzahlgrad mit reellen Coefficienten hat entweder lauter reelle Wurzeln oder nur eine.* W. I, 610.

G. *Wenn im Grade einer irreduciblen Gleichung mehrere verschiedene Primzahlen aufgehen, so kann diese Gleichung nur dann durch successive Adjunction von Wurzeln metacyklischer Gleichungen reducibel werden, wenn sie imprimitiv ist.* W. II, 295.

H. *Wenn eine irreducible Gleichung* $f = 0$, *in deren Grade mehr als eine Primzahl aufgeht, durch successive Adjunction von Radicalen in s Factoren r. Grades zerfällt, so wird diese Zerfällung herbeigeführt durch Adjunction der Wurzeln einer metacyklischen Gleichung 3. Grades* $\varphi = 0$ W. II, 296.

Es ist hier hinzuzufügen, was in W. I, 518, 549 zwar bewiesen. aber nicht hervorgehoben wird.

H'. *Jeder Factor* f_α *von f enthält nur eine Wurzel* y_α *der Gleichung* $\varphi = 0$ *und ist in dem Gattungsbereiche* (y_α) *unzerlegbar. Für* y_α *kann eine rationale Function einer einzigen Wurzel von* $f = 0$ *genommen werden.*

Aus D., H., H' folgt

J. *Um alle metacyklischen Gleichungen* $p_1 p_2$ten *Grades* $(p_1; p_2)$ *verschiedene Primzahlen) in irgend einem Körper* Ω *zu erhalten, adjungire man*

die Wurzel einer Gleichung $p_1$ten *Grades und bilde in dem erweiterten Körper alle Gleichungen* $p_2$ten *Grades, oder man adjungire die Wurzel einer Gleichung* $p_2$ten *Grades und bilde in dem erweiterten Körper alle Gleichungen* $p$ten *Grades.*

K. *Ist* ξ *eine Wurzel einer unzerlegbaren Gleichung* $f(x) = 0$ *und ist die ganze Function* $g(y, \xi)$ *im Rationalitätsbereiche* (ξ) *unzerlegbar, so ist die Norm von* g *Potenz einer unzerlegbaren Function.* Knesér, math. Annalen Bd. 30, S. 181.

Daraus folgt

L. *Sondert sich von einer unzerlegbaren Function* f *vom* $d$ten *Grade durch Adjunction einer Irrationalität* ξ δten *Grades ein im Bereiche* (ξ) *irreducibler Factor* $e$ten *Grades ab, so ist* δe *durch* d *teilbar.*

M. *Eine unzerlegbare Function* f *kann nicht durch Adjunction einer Wurzel einer unzerlegbaren Gleichung* $g = 0$ *in Factoren zerfallen, wenn die Grade von* f *und* g *teilerfremd sind.*

N. *Zerfällt eine irreducible Function* $f(0)$ 10ten *oder* 6ten *Grades durch besondere Bestimmung der in* f *vorkommenden Parameter in einen linearen und einen unzerlegbaren Factor* 9ten *bzhw.* 5. *Grades* $g(x)$, *so kann* $f(x) = 0$ *nicht metacyklisch sein.*

Denn von g müsste sich dann durch Adjunction der Wurzel einer Gleichung $\gamma = 0$ ein Factor absondern, und zwar wäre γ im ersten Falle vom 2. oder 5. Grade, im zweiten vom 2. oder dritten Grade, das führt angewandt auf g zu einem Widerspruch gegen *M.*

I. Stücke einer Sorte.

1)	$a_i(a_1 a_2 a_3$ b.	4)	$\varrho_i(\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ B. 150
2)	$h_i(h_1 h_2 h_3$ B. 44	5)	$w_i(w_1 w_2 w_3$
3)	$m_i(m_1 m_2 m_3$ B. 47	6)	$w_i'(w_1' w_2' w_3$ a

5) ist trigonometrisch nicht lösbar, wie ich in der Zeitschrift f. Math. u. Physik Bd. 42 S. 304 ff. bewiesen habe, 6) dagegen nach Heymann in Hoffmanns Zeitschrift 1897, S. 174 lösbar.

II. Stücke zweier Sorten.

7)	$a_i h_k(a_1 a_2 h_1$ b.	8)	$a_i m_k(a_1 a_2 m_1$ b.
	$a_1 a_2 h_3$ b.		$a_1 a_2 m_3$ B. 12
	$a_1 h_1 h_2$ b.		$a_1 m_1 m_2$ b.
	$a_1 h_2 h_3$ b.		$a_1 m_2 m_3$ b.
9)	$a_i r(a_1 a_2 r$ b.	10)	$a_i \varrho(a_1 a_2 \varrho$ a.

10) giebt eine kubische Gleichung für a_3, kommt also trigonometrisch (oder algebraisch) auf 1) zurück.

11) $a_i w_k (a_1 a_2 w_1$ a.
$a_1 a_2 w_3$ B. 19, S. 21
$a_1 w_1 w_2$
$a_1 w_2 w_3$

11^a führt durch eine unzerlegbare kubische Gleichung für a_3 auf 1)

11^c) a_1, w_1, w_2

Man hat bekanntlich

$$w_2^2 = a_1 a_3 [(a_1 a)^2 - a_2^2], \quad \text{also} \quad a_2^2 = (a_1 + a_2)^2 \left(1 - \frac{n_1^2}{a_1 a_3}\right)$$

oder wenn man

$$w_1 = a_1 e_1, \quad w_2 \equiv a_1 e_2, \quad a_3 \equiv a_1 x$$

setzt, den Wert von a_2^2 in b_1 einsetzt und durch a_1^n teilt

$$f = e_1^4 [2x^2 + x - e_2^2 (x+1)^3 - 4 e_1 x^3 (x+1)^2 (x - e_2^2) + e_2^2 x (x+1)^4 (x - e_2^2 (x+1)^2] = 0$$ [1])

Der Ausdruck f im Bereiche (R, x, e_1, e_2) unzerlegbar. Denn zunächst hat f keinen von e_1 unabhängigen Factor, da die Coefficienten der Potenzen von e_1 teilerfremd sind. Hätte f einen Factor $ae_1^2 + b$, so müsste $f = 0$ einen im Bereiche (R, x, e_2) liegenden Wert von e_1^2 ergeben, was die Auflösung der Gleichung f nach e_1^2 als nicht richtig erweist. Hätte f einen Factor $ae + b$, so hätte es, da f_1 nur gerade Potenzen von e_1 enthält, auch den Factor $ae + b$, also auch den Factor $a^2 e^2 + b^2$, was eben als unmöglich nachgewiesen wurde. Ebenso beweist man, dass, wenn f einen unzerlegbaren Factor hätte von der Form $ae^2 + be + c$, auch $ae^2 + be + c$ ein Factor von f wäre, und da diese Factoren beide unzerlegbar, also teilerfremd sind, müsste das von e_1 freie Glied des Ausdrucks f ein rationales Quadrat c^2 sein, was offenbar nicht der Fall ist. Damit ist f in allen Fällen als unzerlegbar nachgewiesen.

Weiter erhält man:

---

1) Will der Leser die nicht ausführlich entwickelten Formeln prüfen, so kann er sich der Stücke eines pythagoräischen Dreiecks oder der am Ende stehenden Tafeln für zwei besondere Dreiecke bedienen.

$$f(e_1 = e_2 \equiv c^2 [e^2(x+1)^2 - x^2(x+2)]\{e^4(x+1)^2 + e^2x[(x+1)^4 + x^2 - 2x - 2] - 4x^3(x+1)^2\}$$
$$\equiv e^2[e^2(x+1)^2 - x^2(x+2)]g$$

wie es sein muss, denn

$$e^2(x+1)^2 - x^2(x+2) = 0$$

ist die Gleichung, die man erhält, wenn man von vornherein nur das gleichschenklige Dreieck betrachtet, in dem $a_1 = a_2$ ist. Auch in den folgenden Aufgaben wird sich durch diese Specialisirung auf ein gleichschenkliges Dreieck aus der Resultante f ein Factor absondern, was zugleich als Rechenprobe dienen kann.

$$g\left(e = 1,\ x = \frac{1}{y}\right)y^5 \equiv h = y^5 + y^4 + 3y^3 + 3x^2 - 4y - 3$$

$h = 0$ hat nicht lauter reelle Wurzeln, da sonst nach B) auch

$$\frac{h'''}{3!} = 10y^2 + 4y + 3 = 0$$

nur reelle Wurzeln hätte.

Da $h(0) < 0$, $h(1) > 0$, $h(-1) > 0$, so hat $h = 0$ mindestens zwei reelle Wurzeln.

h ist endlich unzerlegbar. Denn da die Werte $y \pm 1$, ± 3 nicht h verschwinden machen, so hätte h höchstens noch einen quadratischen Factor $y^2 + u_1y + u_2$, wo u_1 und u_2 ganze Zahlen sind.

Hat eine Function

$$f \equiv y^5 + a_1y^4 + a_2y^3 + a_3y^2 + a_4y + a_5$$

die Gestalt eines Productes $(y^2 + u_1y + u_2)(y^3 + u_3y^2 + u_4y + u_5)$, so muss sein

$$\text{I.}\quad u_1^3 - a_1u_1^2 - u_1(2u_2 - a_2) + u_5 + a_1u_2 - a_3 = 0$$

$$\text{II.}\quad u_1^5 - a_1u_1^3(3u_2 - a_2) + u_1(2a_1u_2 - a_3) + u_2^2 - a_2u_2 + a_4 = 0$$

$$\text{III.}\quad u_2u_5 = a_5$$

also durch Elimination

$$\text{IV.}\quad u_1^2u_2 + x_1(a_1u_2 - u_5) + u_2^2 - a_2u_2 + a_4 = 0$$

In unserem besonderen Falle erhalten wir daraus die Gleichungen

$$u_2^3 - u_1^2 - u_1(2u_2 - 3) + u_5 + u_2 - 3 = 0$$

$$u_1^4 \quad u_1^3 - u_1^2(3u_2 - 3) + u_1(2u_2 - 3) + u_2^2 - 3u_2 - 4 = 0$$

$$u_2 u_5 = -3$$

$$u_1^2 u_2 + u_1(u_2 - u_5) + u_2^2 - 3u_2 - 4 = 0$$

worin, wie in allen später bei ähnlicher Gelegenheit erhaltenen Gleichungen die vorkommenden Unbestimmten ganze Zahlen sein müssen. Aus diesen Gleichungen erhält man die Congruenzen

$$u_1 + u_5 + u_2 - 1 \equiv 0, \quad u_1 u_2 \equiv 0, \quad u_2 \equiv u_5 \equiv 1 \ (2$$

also

$$u_1 = 0, \quad u_1 + u_3 + u_2 - 1 \equiv 0 + 1 + 1 - 1 \equiv 0 \ (2$$

was unmöglich.

Also ist unser Ausdruck h unzerlegbar im natürlichen Rationalitätsbereiche (1), und da h nach dem Vorigen mindestens 2, höchstens 3 reelle Wurzeln hat, so ist nach E), F) $h = 0$ und $f = 0$ nicht auflösbar, die behandelte Dreiecksaufgabe also nicht trigonometrisch zu lösen.

11a) $a_1, \; w_2, \; w_3$

Setzt man

$$w_2 \equiv a_1 c_2, \quad w_3 \equiv a_1 e_3, \quad a_2 \equiv a_1 y_2, \quad a_3 \equiv a_1^2 y_2, \quad 1 - \frac{c_2^2}{y_3} \equiv x^2$$

$$e_2^2(y_3 + 1)^2 = y_3[(y_3 + 1)^2], \quad y_1^2 = (y_3 + 1)^2 x^2$$

$$y_3 = \frac{c_3^2}{1 - x^2}, \quad y_2 = \frac{e_3^2 + 1 - x^2}{1 - x^2} x$$

und dies in den Ausdruck für w_3^2 eingesetzt, ergiebt

$$f \equiv e_3^2[c_2^2 x + (1 - x)(1 + x)^2]^2 + x[e_2^2 - (1 + x)^2](e_2^2 - 1 - x^2)^2 = 0$$

f ist im Bereiche (R, c_2, e_3, x) unzerlegbar, was man wie in der vorigen Aufgabe beweist.

$$f(e_3^2 = -c_2^2 + 1, \; e_2 \equiv e) = (1 - x)[e^6 x - e^4 x(2x^2 + x + 1)$$
$$+ e^2(1 + x)^2(x^3 - 2x^2 + 6x - 1) - (1 + x)^4(x - 1)(4 - x)]$$
$$\equiv (1 - x) g$$

g ist im Bereiche (R, e, x) unzerlegbar. Denn zunächst lässt sich wie vorhin beweisen, dass g keinen von e unabhängigen und auch keinen solchen Factor hat, der ungerade Potenzen von e enthält. Also müsste die Function von δ

$$h = x^5 g\left(e_z = \frac{\delta}{x}\right) = \delta^3 - \delta^2 x(2x^2+x+1) + \delta x(1+x)^2(x^3-2x^2+6x-1)$$
$$-x^2(1+x)^4(x-1)(4-x$$

eine ganze Function von x als Wurzel δ haben. Aus $h = 0$ schliesst man, dass diese Function δ durch x teilbar sein muss, so müsste auch

$$\frac{h(=x\varepsilon)}{x^2} \equiv i = x\varepsilon^3(2x^2+x+1) + \varepsilon(1+x)^2(x^3-2x^2+6x-1)$$
$$-(1+x^4)(x-1)(4-x)$$

eine ganze Function ε von x als Wurzel haben. Durch Gradabzählung erkennt man, dass diese Function keine Constante, sondern vom 1. oder zweiten Grade in x sein müsste. Setzt man demgemäss

$$\varepsilon = ax^2+bx+c, \quad a \neq 0$$

oder

$$\varepsilon = ax+b. \quad a \neq 0$$

so ergiebt sich durch Entwicklung des Ausdrucks i nach Potenzen von x und Nullsätzen der Coefficienten die Unmöglichkeit beider Annahmen.

Ferner ist

$$g(e^2 = 4+4\varrho) = (x-1)[x^5+(4+4\tau)x^4+(-6+4\varrho)x^3$$
$$-(4+16\varrho)x^2+(37+4\varrho)x+4\varrho]$$
$$\equiv (x+1)h$$

wo

$$\varrho \equiv \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \varrho^2+\varrho+1 = 0$$

Ich erinnere daran, dass in dem Bereiche (ϱ) alle Teilbarkeitsgesetze der natürlichen Zahlen gelten. W. I, § 174.

Die Gleichungen I—IV werden hier

$$u_1^3 - v_1^2(4+4\varrho) - u_1(2u_2+6=4\varrho) + u_5 + (4+4\varrho)u_2 + 4 + 16\varrho = 0$$

$$u_1^4 - x_{13}+4\varrho) - u_1^2(3u_2-4\varrho) + u_1(2(6+4\varrho)u_2 + 14 + 16\varrho)$$
$$+u_2^2 - (-6+1\varrho)u_2 + 371 + 1\varrho = 0$$

$$u_2 u_3 = 4\varrho$$

$$u_1^2 u_2 + u_1((1+\varrho)u_2 - u_5) + u_2^2 - (-64\varrho)u_2 + 37\varrho = 0$$

worin u_1, u_2, u_5 ganze Zahlen des Bereichs (ϱ) bedeuten.

A) ist $u_1 \equiv d\lambda$, so ist $u_5 \equiv d\lambda$, also $u_5 = 4\zeta\varrho^\lambda$, $u_2 = \varepsilon\varrho^{1-\lambda}$

B) ist $u_1 \equiv \varrho^\lambda$, so ist $u_5 \equiv 1(2$, also $u_5 = \zeta\varrho^\lambda$, $u_2 = 5\varepsilon\varrho^{1-\lambda}$

wobei $\varepsilon^2 = 1$ ist und λ die Werte 0, 1, 2 haben kann.

Aus der letzten Gleichung erhält man im Falle A)

$$u_2^2 + 2u + 1 = 0(4, \quad u_2 + 1 \equiv 0(2, \quad \text{also } \lambda = 1, \; u_3 = 4\varrho, \; u_2 = \varepsilon$$

also wird sie zu $u_1^2 + 4u_1 + 6 + 38\varepsilon + 4(r-1)\varrho$, oder

$$(n_1 + 2)^2 = -[2 + 38\varepsilon + 4(\varepsilon - 1)\varrho\}$$

das ist unmöglich, weil die rechte Seite weder für $\varepsilon = 1$ noch für $\varepsilon = -1$ ein Quadrat in (ϱ) wird. Man erkennt dies durch Vergleichung der Coefficienten der Potenzen von ϱ, wenn man setzt

$$u_1 + 2 = 2x + 2y\varrho$$

Im Falle B) ergiebt die letzte Gleichung

$$-\varepsilon\varrho^\lambda + 1 \equiv 0(\lambda, \quad \text{also} \quad \lambda = 0, \quad u_5 = \varepsilon, \quad u_2 = 4\varepsilon\varrho$$

das ergiebt aber für die letzte Gleichung etwas unmögliches. Also hat h keinen quadratischen Factor in (ϱ).

Hätte $h = 0$ eine rationale Wurzel x, so müsste offenbar sein

$$x = 4\varepsilon\varrho^2, \quad \text{also}$$

$$(37 + 4\varrho)\varepsilon\varrho^\lambda + \varrho \equiv 0 \; (4, \quad \text{also} \quad \lambda = 1, \quad \varepsilon = -1, \quad x = -4\varrho$$

was aber keine Wurzel von h ist. Also ist h unzerlegbar.

Da nun für g und h die Voraussetzungen von N über f und g zutreffen, so ist h, also auch f nicht auflösbar.

12)	$a_i\varrho_k(a_1 a_2 \varrho_1$	10 (1—1). a.	13)	$a_i a_k'(a_1 a_2 w_1'$	11^a(3—3). a
	$a_1 a_2 \varrho_3$	10 (3—3). a		$a_1 a_2 w_3'$	11^b(1—1). k
	$a_1 \varrho_1 \varrho_2$	construirbar		$a_1 w_1' w_2'$	11^c(3—3)
	$a_1 \varrho_2 \varrho_3$	49^b(2—2), k.		$a_1 w_2' w_3'$	11^d(1—1)

12^c) $a_1, \varrho_1, \varrho_2$

Nach A_3 ist diese Anfgabe gleichwertig mit a_1, h_1, ϱ_1 oder mit a_1, h_1, ϱ_1, also mit 37^c.

14) $k_i m_k$ ($h_1 h_2 m_3$ B. 40
$h_1 h_2 m_3$ B. 39
$h_1 m_1 m_2$ B. 46
$h_1 m_1 m_3$ B. 45

15) $h_i r$ $(h_1 h_2 r.$ a

Man hat bekanntlich

$$h_i = \frac{2\varrho\varrho_i}{\varrho_i - \varrho}, \quad \text{also} \quad \varrho_1 = \frac{\varrho h_1}{h_1 - 2\varrho}, \quad \varrho_2 = \frac{\varrho h_2}{h_2 - 2\varrho}$$

$$r = \frac{\varrho(\varrho_1 + \varrho_2(\varrho_1 + \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_3)}{4\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}$$

also

$$r(hr - 2\varrho)(h_2 - 2\varrho)[-h_1, h_2 + 2\varrho(h_1 + h_2)] + 2\varrho^3[-h_1 h_2 + \varrho(h + h)] = 0$$

Diese auflösbare Gleichung 1) und 2) führt unsere Aufgabe algebraisch auf 60) oder B. 167 zurück.

16) $h, \varrho(h_1 h_2 h_3 \varrho$ construirbar

kommt durch $A_{\delta,2}$ auf ϱ, ϱ_1, ϱ_2 = 28) zurück

17) $h_1 \varrho_1$ $(h_1 h^2 \varrho_1$ 16(1 — 1). t.
$h_1 h_2 \varrho_3$ 16(16(3 — 3). t
$h_1 \varrho_1 \varrho_2$ B. 137
$h_1 \varrho_2 \varrho_3$ unbestimmt wegen A_r

18) $h_i w_k (h_1 h_2 w_1$ a.
$h_1 h_2 w_3$ B. 21.
$h_1 w_1 w_2$
$h_1 w_2 w_3$

18a) h_1, h_2, w_1

Da

$$w_i = \frac{2}{h_i' + h_l'} \sqrt{\frac{h_k' h_l'}{(h_i' - h_k' + h_l'(h_i' + h_k' - h_l')}}, \quad h_i' \equiv \frac{1}{h_i}$$

kommt man durch eine kubische Gleichung für h_1' auf 2)

18c) h_1, w_1, w_2

Setzt man

$$h_2' h_1 \equiv y, \quad h_3' h_1 \equiv z, \quad 2h_1 \equiv e_1 w_1, \quad 2h \equiv e_2 w_2$$

so vermöge des eben hingeschriebenen Wertes von w_i

$$e_1^2 = \frac{(y+z)^2(1-y+z)(1+y-z)}{yz}, \quad e_2^2 = \frac{(1+z)^2(-1+y+z)(1+y \quad z)}{z}$$

oder

$$y^4 - y^2(2z^3+1) + z^2(z-1) - y \cdot z(e_1^2 - z) = 0$$
$$y^2(1+z)^2 = ze_2^3 + (z^2-1)^2$$

oder nach Elimination von y

$$f \equiv [e_2^4 z - e_2^2(4z-1)(z+1)^2 + 1(z-1)(z+1)^4]^2$$
$$-[ze_2^4 + e_2^2 - 1^2](z+1)^6(e_1^2-1)^2 = 0$$

Man beweist durch Entwicklung nach Potenzen von e_1, dass f im Bereiche (R, e_1, e_2, z) unzerlegbar ist.

$$f(e_1 = e_2 \equiv e) = ze^2[e^2 + (z-2)(z+1)^2]$$

wo:

$$g \equiv e^4 z - e^2(z+1)^2(z^4 + 4z^3 + 7z^3 + 10z - 1) + 4(z+1)^4(z^2+2z-2)$$

g lässt sich leicht als irreducibel im Bereiche (R, e, z) nachweisen

$$g(e^2 = 8) = -4zh, \text{ wo } h \equiv z^5 + 6z^4 + 20z^3 + 48z^2 + 55z + 6$$

h ist offenbar im natürlichen Rationalitätsbereiche unzerlegbar, nach H ist also $h = 0$, $g = 0$, $f = 0$ unlösbar.

Setzt man

1b[d]) h_1, w_2, w_3

$$h_2' h_1 \equiv y, \quad h_3' h_1 \equiv z, \quad 2h_1 \equiv e_2 w_2, \quad 2h_1 \equiv e_3 w_3$$

so erhält man ähnlich wie vorher

$$e_2^2 = \frac{(1+z)^2(-1+y+z)(1+y-z)}{z}$$

$$e_3^2 = (1+y)_2 \frac{(-1+y_2+z)(1+y+z)}{y}$$

oder

$$y^4 - (z^2+z)y^2 - (z^2-1) + y(2z^2 - e_3^2) = 0$$
$$(z+1)^2 y^2 = ze_2^2 + (z^2-1)^2$$

oder nach Elimination von y

$$f \equiv z^4[e_2^4 - e_2^2(4-z)(z+1)^2 + (1-z)(1+z)]^2$$
$$-[2e_2^2 + (z^2-1)^2[(2z+1)^6(2z^2 - e_3(^2 = 0$$

eine Gleichung 12. Grades für z, die im Bereiche (R, e_2, e_3, z) unzerlegbar ist.

$$f(e_3 = 0,\ e_3 \equiv e) \equiv z^4 e^2[(1+x(^2(1-z) - e^2][(1+z)^2(4z^2+4z-5) - e^2]$$
$$\equiv z^4 e^2 g_1 g$$

$$g(e^2 = -1) = k = 4z^4 + 12z^4 + 7z^3 - 6z^2 - 5z + 1$$

Daraus ergiebt sich die Sturm'sche Kette $h', h_1, \ldots h_5$, nämlich

$$h' \equiv h_1 = 4 . 5z^4 + 12 . 4z^3 + 7 . 3z^2 - 6 . 2z - 5$$

$$4 . 5^2 h = 4 . 5z + 12h_1 - 4h_2, \quad h_2 \equiv 2 . 51z^3 + 3^2 . 17z^3 + 2^6 z - 40$$

$$1^2 h_1 = (2 . 5 . 37z + 3 . 21)h_2 - 5^2 h_3$$

$$h_3 = 2 . 5^2 . 11z^2 + z^2 . 5 . 19z + 7 . 11$$

$$2 . 5^4 . 11^2 h_2 \equiv (2 . 5^2 . 11 . 37z + 5 . 5603)h_3 - 5 . 37z h_4$$

$$h_4 = 2 . 5 . 37z + 11 . 109$$

$$2 . 37^2 h_3 = (. 5 . 37 . 11z - 10377)h_4 - h_5$$

$$h_5 = -(2 . 7 . 11 . 37^2 + 11 . 109 . 19344)$$

Für $z = \pm \infty$ erhält man die Vorzeichenfolge

$-\infty$	$- + - + - -$
$+\infty$	$+ + + + + -$

Es gehen also zwischen $-\infty$ und $+\infty$ drei Wechsel verloren, $k = 0$ hat also nach dem Sturm'schen Satze 3 reelle und 2 complexe Wurzeln, und da h sich durch Congruenzen als unzerlegbar nachweisen lässt, ist $h = 0$, also $f = 0$ nicht auflösbar.

19) $h_i w_k' (h_1 h_2 w_1'$ 18^a(2 — 2). a.
$h_1 h_2 w_3'$ 18^b(1 — 1). f.
$h_1 w_1' w_2'$ 18^c(3 — 3)
$q_1 w_2' w_3'$ 18^d(1 — 1)

40) $m_i r (-m_1 m_2 r)$ a.

Da

$$a_i^2 = \tfrac{4}{9}(2m_k + 2m_i^2 - m_i^2), \quad r^2[4a_1^2 a_2^3 - (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2))] = a_1^2 a_2^2 a_1^2$$

so ergiebt sich durch Elimination der a_i eine kubische Gleichung für m_3^1, die Aufgabe kommt auf 3) zurück.

21) $m_i e (m_1 m_2 \varrho$

Man setze

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \equiv x, \quad \frac{a_3}{a_1 + a_2} \equiv y, \quad \frac{m_1}{m_1} \equiv \varrho, \quad \frac{4\varrho}{m_1} \equiv \sigma$$

so wird nach den bekannten Formeln

$$\varrho = \frac{a_1}{1+x}\sqrt{\frac{(1-y)(y^2-x^2)}{1+y}}, \quad a_2 = \frac{1-x}{1+x}a_1, \quad a_3 = \frac{2y}{1+x}a_1$$

$$c^2 = \frac{8y^2 + x^2 + 6k + 2}{8y^2 + x^2 - 6x + 1}, \quad y^2 = \frac{-e^2(x^2 - 6x + 1) + x^2 + 6x + 1}{8(e^2 - 1)}$$

$$6\,\sigma^2 x(1 + y) + (1 - y)\,[e^2(3x - 1)^2 - (3x + 1)^2] = 0$$

also wenn y eliminirt wird (durch symmetrische Functionen y_1 und $y_2 = -y_1$), nach Multiplication mit $8(c^2 - 1)$

$$\begin{aligned} f = {} & 36\,\sigma^4 x^2 [e^2(x-3)^2 - (x+3)^2] \\ & - 12\,\sigma^2 x\,[e^2(3x-1)^2 - 3x + 1)^2]\,[e^2(x^2 - 6x - 7) - (x^2 + 6x - 7)] \\ & + [e^2(x-3)^2 - (x+ \ )^2\,[e^2(3x-1)^2 - (3x+1)^2]^2 = 0 \end{aligned}$$

$$f(e \pm 1) = -12 \,.\, 36x^3(\sigma^2 + 2)^2$$

wie es sein muss. f ist im Bereiche (R, x, σ, e) irreducibel.

$$\begin{aligned} f(e = {} & 2\sigma(x-4)\,[4\,\sigma^4 x^2(x-9) - 4\,\sigma^2 x(9x-1)(x^2 - 10x - 7) \\ & + (x-9)(x-1)^2(9x-1)^2] \equiv 27(x-1)g \end{aligned}$$

ist in (R, x, σ) unzerlegbar, also ist nach N $f = 0$ nicht auflösbar.

22) $m_i\,\varrho_k$ ($m_1\,m_2\,m_3\,\varrho_1$ 21 (1 — 1)
$m_1\,m_2\,\varrho_3$ (21 (3 — 3)
$m_1\,\varrho_1\,\varrho_2$ construirbar
$m_1\,\varrho_2\,\varrho_2$ B. · 29

22c) $m_1\,\varrho_1\,\varrho_2$

geht wegen A_3 in $m_1 h_3 \varrho_1$, also in $h_1 m_2 \varrho_2$, d. h. in 57d über.

23) $m_i\,w_k$ ($w_1\,m_2\,w_1$ a.
$w_1\,m_2\,w_3$ a.
$m_1\,w_1\,w_2$
$m_1\,w_2\,w_3$

Bei diesen wie bei andern Aufgaben versuchte ich zunächst, die Seiten zu berechnen, kam aber auf abschreckend lange Rechnungen, als ich die allgemeinen Eliminationsmethoden anwandte; erst nach längerem Nachdenken fand ich die richtigen Wege.

23a) m_1, m_2, w_1

Berechnet man aus den Formeln für m_i die Werte a_1^2 und a_2^2, ausgedrückt durch m_1^2, m_2^2, a_3^2 und setzt sie in die Beziehung Γ für w_1 ein, so erhält man

$$a_1^2 = 2\left(-a_3^2 + \frac{2m_1^2 + 4m_1^2}{3}\right), \quad a_2^2 = 2\left(-a_3^2 + \frac{4m_1^2 + 2m_2}{3}\right)$$

$$w_1^4\left(3a_3^2-\frac{8m_1^2+4m_2^2}{3}\right)^2-16\left(a_3^2-\frac{2m_1^2+4m_2^2}{3}\right)$$
$$\times\left(a_3^2-\frac{4m_1^2+2m_2^2}{3}\right)a_1^2w_1^2$$
$$+2a_3^2\left(-a_3^2+\frac{4m_1^2+2m_1^2}{3}\right)\left[8a_3^2\left(-a_3^2+\frac{4m_1^2+2m_2^2}{3}\right)\right.$$
$$\left.-\left(a_3^2+4\frac{m_1^2-m_2^2}{3}\right)^2\right]=0$$

also eine Gleichung 4. Grades für a_3^2. Damit kommt die Aufgabe auf 8^d zurück.

23[b]) m_1, m_2, w_3

Giebt ähnlich wie vorher eine Gleichung 4. Grades für a_3^2.

23[c]) m, w_1, w_2

Man hat

$$a_1^2=2(a_2^2+a_3^2)-4m_1^2,\quad w_1^2(a_2+a_3)^2=a_2a_3[(a_2-a_3)^2-a_2^2]$$
$$=a_2a_3[-(a_2-a_3)^2+m_1^2]$$

also wenn man setzt

$$\frac{a_1-a_3}{a_2+a_3}=x,\quad \frac{w^1}{m_1}\equiv c,\quad \frac{w_1}{m_1}\equiv e_2$$

so wird

$$a_2^2=\frac{m_1^2(1+x)[(1+x)(1-x)-e_1^2]}{x^2(1-x)}$$

$$a_3^2=\frac{m_1^2(1-x)[(1-x)(1+x)-e_1^2]}{x^2(1+x)}$$

$$a_4^2=\frac{4m_1^2[(1-x)(1+x)-e_1^2(x^2+1)]}{x^2(1+x)(1-x)}$$

und dies in die Beziehung Γ_2 eingesetzt, ergiebt

$$f\equiv e_2^4x^2(1+x)^2[(7-x)(1+x)^2(3-x)-e_1^2(3x^2+2x+3)]^2$$
$$-16(1-x)(1+x)^2e_2^2[(1-x)(1+x)-e_1^2(x^2+1)][(7-x)(1+x)-1^2]$$
$$+64e_1^2[(1-x)(1+x)-e_1^2][(1-x)(1+x)-e_1^2(x^2+1)]$$
$$\times[(1-x^2)^2-e_1^2]=0$$

Daraus wird

$$f(e_2^2 = e_3^2 = e^2) = e^2[e^2(3x^2 - 2x + 3) - (1 - x)^2(1 + x)x + 3)]$$
$$[e^4(3x^6 + 12x^5 + 18x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 16)$$
$$+ e^2(1 - x)(1 + x)(x^6 - 4x^5 - 19x^4 - 12x^3 - 19x^2 + 32)$$
$$- 16(1 - x^2)^3(1 + x)^3] = 0$$

wie es sein muss. Ferner wird

$$f(e_1 = 1, e_2 \equiv e) = x^6[e^4(1 + x)^2(x^2 - 2x - 7)^2$$
$$+ 32(1 + x)^2(1 - x)^2 e^2 - 128(2 - x)^2] \equiv x^6 g$$

f ist im Bereiche (R, x, e_2, e_1), g im Bereiche (R, x, e) unzerlegbar.

$$g\left(e^2 = \frac{32}{7^2}\right) = \frac{32 \cdot 4}{7^4}(x - 2)h$$

wo

$$h \equiv \frac{8(1 + x)^2(x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 21x + 2 \cdot 49) - 7^4(2 - x)^2}{x - 2}$$

oder

$$h \equiv 8(1 + x)^2(x^3 - 2x^2 - 14x - 49) - 7^4(x - 2)$$

Die Unzerlegbarkeit von h beweist man leicht an der transformirten Form

$$h\left(x = \frac{z}{2} - 1\right) \cdot 4 \equiv i = z^5 - 257 - 4 \cdot 7z^3 - 8 \cdot 38z_2^3 - 2 \cdot 7^4 z_6$$
$$+ 2^2 \cdot 3 \cdot 7^4$$

Die Anwendung des Satzes N auf g und h ergiebt wieder die trigonometrische Unlösbarkeit der Aufgabe.

23[d]) m_1, w_2, w_3

Es ist

$$a_3^2 = \frac{a_1^2}{2} - a_2^2 + 2m_1^2, \quad w_3^2(a_1 + a_2)^2 = a_1 a_2\left[\frac{(a_1 + 2a_2)^2}{2} - 2m_1^2\right]$$

Setzt man

$$\frac{a_2}{a_1} \equiv x, \quad \frac{w_2}{m_1} \equiv e_2, \quad \frac{w_3}{m_1} = e^3$$

so wird

$$a_1^2 = \frac{2m_1^2[2x + e_3^2(x + 1)^2]}{x(2x + 1)^2}, \quad a_2^2 = \frac{2x\, m_1^2[2x + e_3^2(x + 1)^2]}{(2x + 1)^2},$$
$$a_3^2 = \frac{m_1^2(x + 1)^2[4x + e_3^2(1 - 2x^2)]}{x(2x + 1)^2}$$

dies eingesetzt in Γ_2 ergiebt nach Multiplication mit $x^4(2x + 1)^6$

$$f \equiv e_2^4 x^2 (2x+1)^2 [4x^2(x+2) - e_3^2 (x+1)^2 (2x^2+1)]^2$$
$$+ 2e_2^2 x^3 (x+1)^2 [2x + e_3^2 (x+1)^2 [2x + e_3^2 (x+1)^2][4x - e_3^2 (2x^2-1)]$$
$$+ 2e_3^2 (x+1)^4 [2x + e_3^2 (x+1)^2][4x - e_3^2 (2x^2-1)][16x^2$$
$$- e_3^3 (x+1)^2 (2x-1)^2] = 0$$

f ist in (R, x, e_2, e_3) unzerlegbar.

$$f(e_2 = e_3) \equiv \varrho (2x+1)[e^2(x+1)^2(2x-1) - 4x][e^4(x+1)^2(8x^6+24x^5$$
$$+30x^4+4x^3-9x^2+2)$$
$$-4e^2 x(4x^6+12x^5+29x^4+50x^3+37x^2+8x-1) - 64x^3(x+1)^3]$$
$$\equiv e^2(2x+1) f_1 f_2$$

wie es sein muss. Ferner

$$f(e_2 \equiv e_1 e_3 = 2) = 16(2x+1)^3 [e^4 x^2 (2x+1)(x^3+x^2+1)^2$$
$$+16 e^2 x^3 (x+1)^2 (x-1)(x+2)^2 + 16(x+1)^4 (x+2)(x-1)^2 (2x^2+3x-1)]$$
$$\equiv 16(2x+1)^3 g$$

f_1, f_2 und g sind in (R, x, e) unzerlegbar.

Da f vom 12. Grade ist, so müsste, wenn $f = 0$ auflösbar wäre nach den Sätzen G, K und H' f nach Adjunction einer Wurzel ξ einer unzerlegbaren Gleichung $\varrho = 0$ entweder sechsten, oder vierten, oder dritten oder zweiten Grades in Factoren bzhw. 2ten, 3ten, 4ten, 6ten Grades zerfallen, die in (ξ) irreducibel sind,

a) $\varrho = 0$ vom 6. Grade.

Sondert sich durch die Substitution $e_2 = e_2 \equiv e$ von ϱ ein Factor δten Grades ab, so muss δ eine der Zahlen 2, 3 sein, weil für $\delta = 1$ die Function f_1 oder f_2 einen Factor ersten Grades erhalten müsste.

Da nach Adjunction von ξ jetzt alle Factoren von f zweiten Grades sind, müsste auch für $\delta = 2$ f_1 oder f_2 einen Factor ersten Grades erhalten, dessen Coefficienten rationale Functionen der Irrationalität ξ zweiten Grades sind. Das ist für f_1 nach M unmöglich, für f_2 würde es das Vorhandensein eines rationalen Factors zweiten Grades bedeuten, gegen Voraussetzung.

$\delta = b$ ist nach denselben Erwägungen unmöglich.

b) $\varrho = 0$ vom 4. Grade.

Durch $e_2 = e_3 = e$ sondert sich aus ϱ ein Factor vom Grade $\delta = 1, 2$ ab.

Für $\delta = 1$ würde, da jetzt alle Factoren von f 3ten Grades sind, f_2 einen Factor 2ten Grades bekommen, dann wäre aber f_2 reduzibel.

Für $\delta = 2$ müsste f_2 einen Factor 2ten Grades bekommen, dann hätte aber, wie man durch Normenbildung erkennt, f_2 einen rationalen Factor vierten Grades.

c) $\varrho = 0$ vom 3. Grade.

Für $e_2 = e$, $e_3 = 2$ würde sich von ϱ ein Factor vom Grade $\delta = 1{,}3$ absondern. Da jetzt alle Factoren von f vierten Grades sind, müsste g dann einen linearen, also auch einen Factor von niedrigerem Grade als 9 haben, gegen Voraussetzung. Für $\delta = 3$ müsste g einen unzerlegabren Factor von niedrigerem als dritten Grade, also auch einen rationalen Factor von niedrigerem als 9ten Grade haben, gegen Voraussetzung.

d) $\varrho = 0$ vom 2. Grade.

f_1 oder f_2 müssten durch die Substitution $e_2 = e_3 \equiv e$ einen Factor von niedrigerem als 4ten Grade bekommen, was nach K unmöglich.

Also ist auch diese Aufgabe nicht lösbar.

24) $m_i w_k' (m_1 m_2 w_1'$ $\quad 23^a (2-2)$. a.
$\quad m_1 m_2 w_3'$ $\quad 23^b (1-1)$. a.
$\quad m_1 w_1' w_2'$ $\quad 23^c (3-3)$
$\quad m_1 w_2' w_3'$ $\quad 23^d (1-1)$

25) $r \varrho_i (r w_1 w_2$ B. 218

26) $r w_i (r w_1, w_2$

Für $a_1 = a_2 \equiv a$ wird $w_1 = w_2 \equiv w$, und

$$r = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - a_3^2}}, \quad w = \frac{a_0 \sqrt{a(2a + a_3)}}{a + a_3}$$

also, wenn

$$\frac{w}{a} = x, \frac{w}{r} \equiv e \text{ gesetzt wird,}$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad re = \frac{xa\sqrt{2 + x}}{x + 1}$$

$$f \equiv e^2 (x+1)^2 - (2-x) x^2 (2+x)^2 = 0$$

ist in (R, x, e) unzerlegbar. Man hat

$$f(e^2 = 11) \equiv g = x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 22x + 11$$

$$g^{\mathrm{I}} = 5x^4 + 2\,.\,4x^3 - 4\,.\,3x^2 + 3\,.\,2x + 22$$

$$\frac{g^{\mathrm{II}}}{2} = 5\,.\,2x^3 + 2\,.\,2\,.\,3x^2 - 4\,.\,3\,.\,x + 3$$

$$\frac{g^{\mathrm{III}}}{3} = 5\,.\,2x^2 + 2\,.\,2\,.\,2x - 4$$

$$\frac{g^{\mathrm{IV}}}{4!} = 5x + 2$$

$$\frac{g^{\mathrm{V}}}{5!} = 1$$

Man findet für die Vorzeichen von g für verschiedene Werte von x und für die Anzahl v der Zeichenwechsel von g, g^{I}, — g^{V} für denselben Wert von x die Tafel:

x	g	g^{I}	g^{II}	g^{III}	g^{IV}	g^{V}	V
—3	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$>$	5
—2	$>$	$<$	$<$	$>$	$<$	$>$	4
—1	$<$	$>$	$>$	$<$	$<$	$>$	3
0	$>$	$>$	$>$	$<$	$>$	$>$	2
1	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	0

Darnach liegen (A) alle reellen Wurzeln zwischen — 3 und 1, die drei negativen Wurzeln liegen zwischen — 3 und 0. Da

$$g = x^5 + 2x^4 + 3x^2 + (22x - 4x^3) + 11$$

hat g keine positive Wurzel zwischen 0 und 1, also überhaupt keine positive Wurzeln, sondern 3 reelle (negative) und 2 complexe Wurzeln. Da g offenbar auch unzerlegbar ist (wie ich hier wie bei allen andern Aufgaben bewiesen, aber wegen der Leichtigkeit der Beweise nicht immer hersetzte), muss nach F und E $g = 0$ und $f = 0$ unauflösbar sein.

27) $r w_i'(r w_1' w_2'$ 26(3 — 3)

28) $\varrho \varrho_i (\varrho \varrho_1 \varrho_2$ B. 149

29) $\varrho w_i (\varrho w_1 w_2$

Man setze

$$\frac{e}{w_1} \equiv e_1, \quad \frac{e}{w_2} \equiv e_2, \quad \frac{a_2+a_3}{a_1} \equiv x, \quad \frac{a_2-a_3}{a_1} \equiv y$$

so wird

$$e_1 = \frac{x}{1+x}\sqrt{\frac{1-y^2}{x^2-y^2}}, \quad 2e_2 = \frac{2+x-y}{1+x}\sqrt{\frac{(x-1)(y+1)}{2(x-y)}}$$

oder

$$y^2 = \frac{[e_1^2(x+1)^2-1]x^2}{e_1^2(x+1)^2-x^2}$$

$$8e_2^2(x+1)^2(x-y)-(x-1)(y+1)(2+x-y)^2 = 0$$

Eliminirt man y aus letzterer Gleichung und setzt

$$c_1^2(x+1)^2-x^2 \equiv M$$

so wird die Resultante

$$f \equiv 64x^2e_2^4M^2+16e_2^2xM[4(x+1)^2e_1^4+x^2(x^2-2x-7)e_1^2+x^3]$$
$$+e_1^2(x-1)^2[4e_1^2(x+1)^2-x^2(x+3)]^2 = 0$$

f ist im Bereiche (R, e_2, e_1, x) unzerlegbar

$$f(e_1 = e_2) \equiv e^2(x+1)[4e^2(x+1)^2+x^2(x-3)][16e^4x(x+1)^2$$
$$-4e^2(7x^3+x^2+x-1)+x^2(x^2+6x-3)]$$

wie es sein muss. Ferner

$$f(4e_2^2 = -4e_1^2+1, \; e_1 \equiv e)$$
$$= e^2(x-1)[64e^6x(x+1)^4-16e^4(x+1)^2(x^4+8x^3+2x+1)$$
$$+4e^2x^2(3x^4+18x^3+8x^2+14x+5)+x^4(x^3+x^2-13x-5)] = e^2(x-1)g$$

Wie in 11^d) beweist man, dass g im Bereiche (R, e, x) unzerlegbar ist.

$$g\left(e^2=-\frac{1}{4}\right) \equiv h = x^7-3x^6-42x^5-34x^4-30x^3-14x^2-5x-1$$

$$h' = 7x^6-3\,.\,6x^5-42\,.\,5x^4-34\,.\,4x^3-30\,.\,3x^2-19\,.\,2x-5$$

$$\frac{h^{II}}{2} = 7\,.\,3x^5-3\,.\,3\,.\,5x^4-42\,.\,5.2\,.\,x^3-34\,.\,2\,.\,3x^2-30\,.\,3x-14$$

$$\frac{h^{III}}{3!} = 7\,.\,5x^4-3\,.\,5\,.\,4x^3-12\,.\,5x^2-34\,.\,2\,.\,2x-30$$

$$\frac{h^{IV}}{4!} = 7\,.\,5x^3-3\,.\,5\,.\,3x^2-42\,.\,5x-34$$

$$\frac{h^{V}}{5!} = 7\,.\,3\,.\,x^2-3\;\;3\,.\,2x-42$$

$$\frac{h^{\mathrm{V}}}{6!} = 7x - 3$$

$$\frac{h^{\mathrm{XII}}}{7!} = 1$$

Hier findet man die Tabelle

x	h	h^{I}	h^{II}	h^{III}	h^{IV}	h^{V}	h^{VI}	h^{VII}	V
9	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	0
8	$<$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	1
0	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$>$	1
$-\frac{1}{4}$	$<$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$<$	$>$	5
$-\frac{1}{2}$	$>$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$<$	$>$	6
-4	$>$	$>$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$>$	6
-5	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$>$	7

Darnach liegen die reellen Wurzeln von h zwischen 9 und -5, und zwar nach A mindestens 2. Wären alle Wurzeln reell, so wäre das Product ihrer Beträge kleiner als

$$9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 5 = \frac{45}{2 \cdot 4^4}$$

also kleiner als 1, während es doch gleich dem Betrage des constanten Gliedes von h, also gleich 1 sein müsste.

Also hat h höchstens 5 reelle Wurzeln.

$h = 0$ ist auch unzerlegbar. Denn offenbar hat h keine rationale Wurzel. Für einen quadratischen Factor wäre

$$h = (x^2 + u_1 x + u_2)(x^5 + u_3 x^4 + u_4 x^3 + u_5 x^2 + u_6 x + u_7)$$

mit ganzzahligen u. Das giebt ausgeführt

I. $u_1^5 + 3u_1^4 - u_1^3(4u_2 + 12) - u_1^2(9u_2 - 34) + u_1(3u_2^2 + 84u_2 - 30)$
$+ u_4 + 3u_2^2 - 34u_2 + 14 = 0$

II. $u_1^6 + 3u_1^5 - u_1^4(5u_2 + 42) - u_1^3(12u_2 - 34) + u_1^2(6u_2^2 + 126u_2 - 30)$
$+ u_1(\text{!}\, u_2^2 - 68u_2 + 14) - (u_2^3 + 42u_2^2 - 30u_2 + 5) = 0$

III. $u_2 u_7 = -1$

IV. $-u_1^4 u_2 - u_1^3 \cdot 3u_2 + u_1^2(3u_2^2 + 42u_2) + u_4(6u_2^2 - 34u_2 - u_7)$
$-(u_2^3 + 42u_2^2 - 30u_2 + 5) = 0$

Daher

$$u_2 = \varepsilon, \quad u_7 = -\varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 1$$

$$u_1^5 + 3u_1^4 - u_1^3(4\varepsilon + 42) - u_1^2(9\varepsilon - 34) + u_7(84\varepsilon - 24) - 35\varepsilon + 17 = 0$$

$$u_{11} + 3u_1^5 - u_1^4(5\varepsilon + 42) - u_1^3(12\varepsilon - 34) + u_1^2(126\varepsilon - 24) + u_1(-68\varepsilon + 23) + 29\varepsilon - 47 = 0$$

$$-u_1^4 - 3u_1^3 + u_1^2(42 + 3\varepsilon) + u_1(6\varepsilon - 33) + 29 - 47\varepsilon = 0$$

$$-u_1^3\varepsilon + u_1^2(1 - 3\varepsilon) + u_1(2 + 37\varepsilon) - 35\varepsilon + 17 = 0$$

$$-u_1^3\varepsilon + u_1^2(\varepsilon + 5) + u_1(2 - 11\varepsilon) + 29 - 47\varepsilon = 0$$

$$u_1^2(4\varepsilon + 4) - 48\varepsilon u_1 - 12\varepsilon + 12 = 0$$

$$u_1^2(\varepsilon + 1) - 12\varepsilon u_1 - 3\varepsilon + 3 = 0$$

Da u_1 eine ganze Zahl sein muss, folgt aus der letzten Gleichung

$$\varepsilon = 1, \quad u_1^2 - 6u_1 = 0, \quad u_1 = 0, 6$$

keiner dieser Werte genügt aber der drittletzten Gleichung, also hat h keinen quadratischen Factor.

Wäre

$$h = (x^3 + u_1 x^2 + u_2 x + u)(x^4 + u_4 x^3 + u_5 x^2 + u_6 x + u_7)$$

so wäre für ganzzahlige $u_1 \ldots u_7$

I. $u_1^4 + 3u_1^3 - u_1^2(3u_2 + 42) - u_1(4u_2 - 2u_3 - 34) + u_2^2 + 42u_2 + 3u_3 - 30 - u_7 = 0$

II. $u_1^0 + 3u_1^4 - u_1^3(4u_2 + 52) - u_1^2(uu_3 - 3u_2 - 34)u_2 - 42w_3 + u_1(3u_2^2 + 84u_2 + 6u_3 - 30) + 3u_2^2 - 2u_2 u_3 - 34u_2 - 42u_3 + 14 = 0$

III. $u_1 z u_2 + u_1^3(3u_2 - u_3) - u_1^2(3u_2^2 + 42u_2 - 3u_3) - u_1(6u_2^2 - 4u_2 u_3 - 34u_2 - 42u_3) + u_2^3 + 47u_2^2 + 5u_2 u_3 - 30u_2 - u_3^2 - 34u_3 + 5 = 0$

IV. $u_3 u_7 = -1$

also

V. $-u_1^{?} u_? - u_1^2(3u_2 - n_3) + u_1(2u_2^2 + 42u_2 + 3u_3 + u_2) + 3u_2^2 - 2u_2 u_3 - 34u_2 - 42u_3 + 44 = 0$

VI. $u_1^2(-u_2^2 + 6u_3 + u_7) + u_1(-3u_2^2 + 2u_2 u_3 + 14) + u_2^3 + 47u_2^2 + 6u_2 u_3 - 30 u_2 - u_3^2 - 84u_3 + 5 = 0$

VII. $u_3 = \varepsilon, \quad u_7 = -\varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 1$

Aus I. folgt

$$u_1 + u_1 - u_1 u_2 + u_2 + 1 - 1 \equiv 0(2 \quad \text{oder} \quad u_2(1 - u_1) \equiv 0(2$$

aus II.

$$u_1 + u_1 - u_1(u_2 - 1) + u_1 u_2 + u_2 \equiv 0\ (2, \quad \text{also}$$

$$u_1 + u_2 \equiv 0(2, \quad u_1 \equiv u_2(2$$

Aus I.

$$u_1^2 - u_1^3 - u_1^4(-u_2+2)\, u_2(2u_2 - 2\varepsilon - 2 + u_2^2 + 2u_2 - \varepsilon + \varepsilon \equiv 0(4$$

oder

$$-u_1^3 - u_1^2(-u_2+2) + 2u_1 + 2 \equiv 0\ (4, \quad \text{also} \quad u_1 \equiv u_2 \equiv 1(2$$

Aus II.

$$u_1 - 1 - u_1 \,.\, 2 - (u_2 + \varepsilon - 2) + u_1(-1 + 2\varepsilon + 2) - 1 - 2\varepsilon - 2 - 2\varepsilon + 2 \equiv 0(4$$

oder

$$-u_2 - \varepsilon + 2(4, \qquad u_2 \equiv 2 - \varepsilon(4$$

Aus III.

$$2 - \varepsilon + u_1(2 + \varepsilon - \varepsilon) - (3 - 2\varepsilon + \varepsilon) - u_1(2 + 2\varepsilon - 2\varepsilon) + u_2 + 2 - 2 + 2\varepsilon - 1 - 2\varepsilon + 1 \equiv 0(4$$

oder

$$-\varepsilon + 1 \equiv 0\ (4$$

Aus IV. und V.

$$-u_1 - (3-1) + v_1(2+2+3-1) + 3 - 2 - 2 + 2 \equiv 0(4, \quad \text{oder} \quad u_1 \equiv -1(4$$

Aus I.

$$1 + 3u_1 - (3u_2 + 2) - u_1(-2u_2 - 2 - 2) + 1 + 2x_2 + 3 + 2 + 1 \equiv 0(8$$

oder

$$u_1 - 3u_2 \equiv 0(8, \qquad u_2 \equiv 3u_3\ (8$$

Aus II.

$$u_1 + 3 - u_1(u+2) - (2u_1 - 3 - 2) + u_1(3 + 4 - 2 + 2) + 3 - 2 - 2 - 2 - 2 \equiv 0(8$$

oder

$$-u_1 + 3 \equiv 0(8, \qquad u_1 \equiv 3(8, \qquad u_1 \equiv 1(8$$

Aus I.

$$1 - 5u_1 - 9(3u_2 - 6) - u_1(6 - 2 - 2) + 1 - 6 + 3 + 2 + 1 \equiv 0(16$$

oder

$$8 - 7u_1 + 5u_2 \equiv 0(16, \qquad u_2 \equiv -5u_1 + 8(16$$

Aus II.

$$u_1 + 3 + 7u_1(4-6) + 7(3u_1 + 8 - 3 - 2) + u_1(3 + 4 + 6 + 2) + 3 - 2 - 2 - 2 - 2 \equiv 0(16, \quad \text{oder}$$

$$7u_1+38 \equiv 0(16, \quad u_1\varepsilon \equiv -5(16, \quad u_2 \equiv 1(16$$

Aus V.

$$-3-9(3-1)-5(2-6+3-1)+3-2-2+6-2 \equiv 0(16 \quad \text{oder}$$
$$-8 \equiv 0(16$$

Das ist ein Widerspruch, also hat h auch keinen kubischen Factor, h ist unzerlegbar, $k=0$ ist nach dem Kronecker'schen Satze nicht auflösbar, ebenso nicht $f=0$, nach E.

30) $\varrho w_1' (\varrho w'_1 w_2'$

Setzt man

$$\frac{\varrho}{w_1'} \equiv \varepsilon_1, \quad \frac{\varrho}{w_2'} \equiv \varepsilon_2, \quad a_3+a_3 \equiv a_1 x, \quad a_2-a_3 \equiv a_1 y$$

so wird

$$e_1 = y\sqrt{\frac{x-1}{(x+1)(x^2-y^2)}}, \quad e_2 = \frac{x-y-2}{2}\sqrt{\frac{1-y}{2(x+1)(x-y)}}$$

Daraus erhält man

$$y^2 = \frac{e_1^2x^2(x+1)}{e_1^2(x+1)+x-1)}. \quad 8e_2^2(x+1)\ (x-1)+(y-1)(x-2-y)(x-y2$$
$$-y)^2 = 0$$

oder wenn aus letzterer Gleichung durch Normbildung y eliminirt wird,

$$f \equiv 64e_2^4x^2(x+1)^2M^2+16e_2^2x(x+1)M[4e_1^4(x+1)^2$$
$$-e_1^2(x+1)(x^3+x^3-8x+8)-(x-1)(x-2)^2]$$
$$=[e_1^2(x+1)^2-1][4e^2(x+1)-(x=2]^2(-1)^2 = 0$$

worin

$$M \equiv e_1^2(x+1)+x-1$$

gesetzt ist. f ist in (R, e_1, e_2, x) unzerlegbar. Es wird

$$f'(e_1 = e_2 \equiv e) = [4e^2(x+1)=(x-2)^2]\{16x(x+1)\ M[e^2(x+1)^2+e-1]$$
$$[4e^2(x+1)-(x=2)^2]\}$$

wie es sein muss. Ferner

$$f(e_1^2 = 1,\ e_2 \equiv e) = x^2]256e^4x(x+1)^2-32e^2x(x+1)(x^2+3x-16)$$
$$=(x+2)(x-1)^2] \equiv x^3(=1) = 0$$

g ist im Bereiche (R, e, x) unzerlegbar.

$$g\left(e^2 - \frac{1}{8}\right) \equiv h = x^5 - 12x^4 + 73x^3 - 10x^2 - 292x + 128$$

$$h^{I} = 5x^4 - 12 \cdot 4x^3 + 73 \cdot 3x^2 - 10 \cdot 2x - 292$$

$$\frac{h^{II}}{2} = 5 \cdot 2x^3 - 11 \cdot 2 \cdot 3x^2 + 73 \cdot 3x - 10$$

$$\frac{h^{II}}{3\,!} = 5 \cdot 2x^2 - 12 \cdot 2 \cdot 2x + 73$$

$$\frac{h^{IV}}{4\,!} = 5x - 12$$

$$\frac{h^{V}}{5\,!} = 1$$

Wir bekommen die Tafel

x	h	h^{I}	h^{II}	h^{III}	h^{IV}	h^{V}	V
-2	<	>	<	>	<	>	5
-1	>	0	<	>	<	>	4
0	>	<	<	>	<	>	4
1	<	<	>	>	<	>	3
2	<	>	>	>	<	>	3
3	>	>	>	>	>	>	0

$h = 0$ hat also die reellen Wurzeln zwischen -2 und 3, nämlich 1 Wurzel zwischen -2 und -1, und 3 oder 1 Wurzel zwischen 2 und 3. Im ersten Falle wäre das Product der Wurzeln positiv, während es wegen des Endgliedes von h negativ ist. Also hat h 3 reelle und 2 complexe Wurzeln. Ausserdem ist h wieder irreducibel, also ist nach Kronecker

$$h = 0, \quad g = 0, \quad f = 0$$

nicht auflösbar.

31) $\varrho_i w_k (\varrho_1, \varrho_2 w_1$ a.
$\varrho_1 \varrho_2 w_2$ B. 233
$\varrho_1 w_1 w_2$
$\varrho_1 w_2 w_3$ 30(3 – 3) (13)

31[a]) $\varrho_1, \varrho_2, w_1$

Es ist

$$w_i = \frac{2\varrho_k\varrho_l\sqrt{(\varrho_i+\varrho_k)(\varrho_1+\varrho_2)}}{\varrho_i\varrho_k+\varrho_k\varrho_l+2\varrho_k\varrho_i}$$

Dies giebt hier eine cubische Gleichung für ϱ_3, damit ist die Aufgabe algebraisch auf 4) zurückgeführt.

31^c) ϱ_l, w_1, w_2

Setzt man

$$\frac{\varrho_1}{w_1} \equiv e_1, \quad \frac{\varrho_l}{w_2} \equiv e_2, \quad a_2+a_3 \equiv a_1 x, \quad a_2-a_3 \equiv \alpha_1 y_1$$

so wird

$$e_1 = \frac{x}{x-1}\sqrt{\frac{1-y^2}{x^2-y^2}}, \quad e_2 = \frac{x-y+2}{2}\sqrt{\frac{1+y}{(x-1)(x-x)}}$$

oder

$$y^2 = \frac{[e_1^2(x-1)^2-1)x^2}{e_1^2(x-1)^2-x_1^2} \quad 8e_2^2(x-1)(x-y)-(y+1)(x+2-y)=0$$

oder

$$f \equiv 64e_2^4x^2(x-1)^2M^2+16e_2^2xM[4e_1^4(x-4)^6+e_3^2x^2(x-1)^2(x^2-2x-7)$$
$$+x^3(x+1)^2[+e_1^2x-1(^2(x+1)^2[4e_1^2(x-1)^2-x^2(x+3)]^2=0$$

f ist im Bereiche (R, x_1, c_1, $)_2$) unzerlegbar.

$$f(e_1=e_2\equiv e(x-1)e^2[4e^2(x-1)^2+x^2(x-3)][16x(x-1)^4e^4$$
$$-4e^2(x-1)^2(7x^3+x^2+x-1)+x^2(x+1)^2(x^2+6x-3)]\equiv(x+1)e^2g$$

wie es sein muss. g ist in (R, e, x) unzerlegbar.

$$g(e^2=\tfrac{1}{2})\equiv h(x+1)=(x+1)(x^5-3x+23-11x^2-4x+2)$$

h ist im natürlichen Rationalitätsbereiche unzerlegbar. Aus diesen Eigenschaften von g und h folgt wieder die Unauflösbarkeit von $f=0$.

32) $\varrho_i w_k'$ ($\varrho_1\varrho_2 w_1'$ 31^b) (3—3) a
$\varrho_1\varrho_2 w_3'$ construirbar
$\varrho_{11} w_1' w_2'$ 31^c) (12) (3—3)
$\varrho_1 w_2' w_3'$ 29) (13) (1—2)

32^b geht aus der construirbaren Aufgabe 86^a) durch die construirbaren Substitutionen (B) (1—1) hervor.

33) $w_i w_k'$ ($w_1 w_2 w_1'$ 18^c B_1
$w_1 w_2 w_3'$ 6(3—3)

$w_1 w_2' w_1'$ 33ª (1—1) a

$w_1 w_2' w_3'$ 5(1=1)

33ª führt auf 18ᶜ zurück, wegen dar Beziehung B. für $i = 1$.

III. Stücke dreier Sorten.

34) $a_i h_l$ ($a_1 h_1 m_1$ b
$a_1' h_1 m_2$ b
$a_1 h_2 m_1$ b
$a_1 h_2 m_2$ b
$a_1 h_2 m_3$ b

35) $a_i h_k r$ ($a_1 h_1 r$ b
$a_1 k_2 r$ B. 92

36) $a_i h_k \varrho$ ($a_1 h_1 \varrho$ B. 144
$a_1 h_2 \varrho$ B. 184

37) $a_i h_i \varrho_i$ ($a_1 h_1 \varrho_1$
$a_1 h_0 \varrho_2$
$a_1 h_2 \varrho_1$
$a_1 h_2 \varrho_2$
$a_1 h_2 \varrho_3$

38) $a_1 h_k w_c$ ($a_1 h_2 w_2$ construirbar
$a_2 h_1 w_2$ a
$a_1 h_2 w_2$
$a_2 h_3 w_2$ 3 . 36
$a_3 h_2 w_3$ b

38ª $a_1\ h_1\ w_2$

Durch das rechtwinklige Dreieck aus h_1 und w_1 ist der Winkel $\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}$ zwischen h_1 und w_1 bestimmt, die Aufgabe kommt also zurück auf a_1, h_1, $\alpha_2 - \alpha_3$, das ist in dem anfangs erwähnten Buche Petersens die Aufgabe 314.

38ᵇ) a_1, h_1, w_2

Zieht man aus w_2 den Wert von a_2^2, setzt ihn in h_1 ein und nimmt $\frac{a_3}{a_1} = x$ als Unbekannte, so kommt

$$4 a_1^2 h_1^2 x^2 - 4 w_2^2 a_1^2 x^2 (1+x)^2 + w_2^4 (1+x)^4 = 0$$

eine auflösbare Gleichung.

38ᶜ) a_1, h_2, w_1

Man setze

$$\frac{w_1}{a_1} \equiv e_1, \ \frac{h_1}{a_1} \equiv h, \qquad \sqrt{1-h^2} = \delta, \ \frac{a_2}{a_1} \equiv x_1$$

so ist die Aufgabe äquivalent mit a_1, δ, e. Durch Elimination von a_3 ergiebt sich

$$a_6^2 = \frac{a_2^2}{2} - a_1^2 + 2m_2^2, \quad w_3^2(a_1+a_2)^2 = a_1 a_2\left[\frac{(2a_1+b_1)^2}{2} - 2w_2^2\right]$$

eine auflösbare Gleichung für a

44) $a_i m_k w_l'$ $(a_1 m_1 w_1'$ 43ᵃ $(x-2)$ a
$a_1 m_1 w_2'$ 43ᵇ (1—1) a
$a_1 m_2 w_1'$ 43ᶜ (2—2) a
$a_1 m_2 w_2'$ 43ᵈ (1—1) a
$a_1 m_1 u_3'$ 43ᵉ (2—2) a

45) $a_1 r \varrho$ $(a_1 r \varrho$ B. 125

46) $a_2 r \varrho^k$ $(a_1 r \varrho_1$ 45(1—1) f
$a_1 \varrho_2$ 45(2-2) f

47) $a_1 r w_k$ $(a_1 r w_1$ B. 316
$a_1 r w_2$ a

47ᵇ) a_1, r, w_2

Man hat

$$a_2^2 = (a_3+a_1)^2 - \frac{(a_3+a_1)^2}{a_3 a_1} w_2^2$$

dies eingesetzt in

$$r^2[4a_3^2 a_1^2 - (a_3^2 + a_1^2 - a_2^2)^2] - a_1^2 a_2^2 a_3^2 = 0$$

ergiebt

$$r^2[4a_3^2 a_1^2 - (a_3+a_1)^2 w_2^2] w_2^2 + a^{13} a_3^3 w_2^2 - a_1^4 a_3^4 = 0$$

eine auflösbare Gleichung für a_3.

48) $a_i r w_k'(a_1 r w_1'$ 47ᵃ (2—2) f
$a_1 r u_2'$ 57ᵇ (1—1) a

49) $a_i \varrho_k$ $(a_1 \varrho \varrho_1$ B 129
$a_1 \varrho \varrho_2$ 12ᶜ (23) (1—1) f

50) $a_i \varrho w_k$ $(a_1 \varrho w_1$ a
$a_1 \varrho w_2$ a

50ᵃ) a_1. ϱ_1, w_1

Setzt man

$$a_3 + a_2 \equiv a_1 x, \quad a_3 - a_2 \equiv a_1 y, \quad \varrho \equiv a_1 \sigma, \quad w_1 \equiv a_1 e_1$$

so wird

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(y^2-1)}{x+1}}, \quad e = \frac{1}{2x}\sqrt{(x^2-y^2)(x^2-1)}$$

also

$$y^2 = \frac{4\sigma^2(x+1)+x-1}{4(x-1)}, \quad x^2 e^2 = \frac{-4\sigma^4(x+1)+(x-1)(x^2-1)}{4(x-1)}(x^2-1)$$

oder

$$x^2 e^2 - (x+1)^2[(x-1)^2 - 4\sigma^2] = 0$$

eine auflösbare Gleichung für x. Dadurch ist die Aufgabe auf 10) zurückgeführt.

50[b]) a_1, ϱ_1, w_2

Man hat

$$a_2^2 = (a_3 + a_1)^2 - \frac{(a_3 + a_1)^2}{a_3 a_1} w_2^2$$

$$4\varrho^2(a_2 + a_3 + a_1) = (-a_2 + a_3 + a_1)[a_2^2 - (a_3 - x_1)^2]$$

Eliminirt man a_2, so wird

$$16\varrho^4 w^2 - 8\varrho^2 \left[4 a_3 a_1 - \frac{(a_3 + a_1)^2}{a_3 a_1} w_2^2\right](2a_3 a_1 - w_2^2)$$
$$+ w_2^2 \left[4 a_3 a_1 - \frac{(a_3 + a_1)^2}{a_3 a_1} w_2^2\right]^2 = 0$$

durch diese auflösbare Gleichung für a_3 kommt 50[b]) auf 10) zurück

51) $a_1 \varrho w_k'$ ($a_1 \varrho w_1'$ u
$a_1 \varrho w_2'$

51[a]) a_1, ϱ, w_1'

Man hat

$$4\varrho\varrho_1 = a_1^2 - (a_3 - a_2)^2, \quad \frac{z}{z_1} = \frac{-a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

also

$$a_3 - a_2 = \sqrt{a_1^2 - 4\varrho_1\varrho_2}, \quad a_3 + a_2 = a_1 \frac{\varrho_1 + \varrho}{\varrho_1 - \varrho}$$

$$4a_3 a_2 = a_1^2 \frac{4\varrho\varrho_1}{(\varrho_1 - \varrho)^2} + 4\varrho\varrho_1, \quad a_3 a_2 = \varrho\varrho_1\left(1 + \frac{a_1^2}{(\varrho_1 - \varrho)^2}\right)$$

$$(a_1 - a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3) = 4\varrho\varrho_1, \quad w_1' = \frac{2\varrho\,\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho}\sqrt{\frac{a_1^2 + \varrho_1 - \varrho)^2}{a_1^2 - 4\varrho\varrho_1}}$$

Diese Gleichung 4. Grades für ϱ_1 führt die Aufgabe auf 49[a]) zurück

51[b]) a_1, ϱ_1, w_2'

$$a_2^2 = (a_3 - a_1)^2 + \frac{(a_3 - a_1)^2}{a_3 a_1} w_2'^2$$

$$4\varrho^2(a_2 + a_1 + a_1) = [a_2^2 - (a_3 - a_1)^2](-a_2 + a_3 + a_1)$$

Setzt man

$$\varrho \equiv a_1 \sigma, \quad w_2' \equiv a_1 e, \quad a_3 \equiv {}_1 x$$

und eliminirt a_2, so kommt

$$f \equiv 16\sigma^4[4x^2-(x-1)e^2] - 8\sigma^2 e^2 x(x-1)^2[e^2(x-1)^2+2x^3+2x] + e^4(x-1)^2[4x^2-e^2(x-1)^2] = 0$$

f ist in (R, σ. e, x) unzerlegbar.

$$f(e=1) = (x+1)[16\sigma^4(3x-1) - 8\sigma^2 x(x-1)^2(2x^2-x+1) + (3x-1)(x-1)^4] \equiv (x+1)g$$

fg ist im Bereiche (R, σ, x) irreducibel. Nach N ist $f = 0$ unauflösbar.

52) $a_i \varrho_k w_l$ ($a_1 \varrho_1 w_1$ 50^a (1—1) a
$a_1 \varrho_1 w_2$ 51^b (1 —1)
$a_1 \varrho_2 w_1$ 51^a (2—2) a
$a_1 \varrho_2 w_2$ 50^b (2—2) a
$a_1 \varrho_2 w_3$ 51^c (2—3) (2—2)

53) $a_i \varrho_k w_l'$ ($a_1 \varrho_1 w_1'$ 51^a(1—1)a
$a_1 \varrho_1 w_2'$ 50^b(1—1)a
$a_1 \varrho_2 w_1'$ 50^a(2—2)a
$a_1 \varrho_2 w_2'$ 51 (2—2)
$a_1 \varrho_2 w_3'$
50^c (23)(2—2) a

54) $a_i w_k w_l'$ ($a_1 w_1 w_1'$ 38^a B_1 f
$a_1 w_1 w_2'$ 11^c(1—1)
$a_1 w_2 w_1' w_1$ 11^c)2—2)
$a_1 w_2 w_2'$ $38^a B_2$ f
$a_1 w_2 w_3'$ 11^b(2—2)

55) $h_i m_x r$ ($k_1 m_1 r$ B. 106)
$h_1 w_k s$ a

55^b) h_1, m_2, r

$$a_1^2 = -a_3^2 + \frac{a_2^2}{2} + 2m_2^2, \quad 4a_1^2 h_1^2 = 4a_1^2 a_3^2 - (a_2^1 + a_3^2 - a_1^2)^2$$

$$a_3 a_3 - 2h_1 v$$

Daraus ergiebt sich durch Elimination a_3 und a_1

$$64h_1^2 r^2 a_2^4 \cdot (a_2^4 - 4a_2^2 m_2^2 + 16h_1^2 r^2)^2 - 8h_1^2 a_1^2 (a_2^4 + 4a_2^2 m_2^2 - 8h_1^2 r^2) = 0$$

Diese Gleichung vierten Grades für a_2^2 führt die Aufgabe auf 1)f zurück.

56) $h_i m_k \varrho$ ($h_1 m_1 \varrho$ B. 146
$h_1 m_3 \varrho$ construirbar

57) $h_i m_k \varrho_l$ ($h_1 m_1 \varrho_1$ 56^a (1—1)
$h_1 m_1 \varrho_2$ 56^a (2—2) f
$h_1 m_2 \varrho_1$ 56^b (1—1) f
$h_1 m_2 \varrho_2$ 56^b (2—2) f
$h_1 m_2 \varrho_3$ 56^b (3—3) f

56^b h_1, m_2, ϱ.

Man hat

$$= \frac{\varrho^i(\varrho_k+\varrho_l)}{\sqrt{\varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\varrho_2\varrho_3}}$$

$$m_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\varrho_3^2(2\varrho_1+\varrho)^2+2\varrho_3(2\varrho_1-\varrho_2)\varrho_1\varrho_2+(\varrho_1\varrho_2)^2}{\varrho_3(\varrho_1+\varrho_3)+\varrho_1\varrho_2}}$$

Setzt man in m_1 die aus h_1 folgenden Werte

$$\varrho_3 = \frac{h_1\varrho_2}{2\varrho_2-h_1}, \quad \varrho_1 = \frac{h_1\varrho}{h_1-2\varrho}$$

so erhält man

$$(h_1-4\varrho)^2\varrho_2^2+2\varrho_3k_1\varrho(3h_1-4\varrho)+h_1^2\varrho^2 = 4m_1(h_1-2\varrho)(2\varrho_2-h_1)$$

eine quadratische Gleichung für ϱ_2. Da sich jetzt die Seiten durch bekannte Quadratwurzeln ausdrücken lassen, ist die Aufgabe construirbar.

58) $h_i m_k w_l$ ($h_1 m_1 w_1$ B. 43
$h_1 m_1 w_2$
$h_1 m_2 w_1$ a
$h_1 m_2 w_2$
$h_1 m_2 w_3$

58b) h_1, m_1, w_2

Die Aufgabe ist im Bereiche des Lineals und Zirkels gleichwertig mit w_2, m_1, $\lambda \equiv \sqrt{m_1^2-h_1^2}$. Man hat

$$a_3^2 = -a_2^2+\frac{a_1^2}{2}+2m_1^2, \quad a_2^2 = \frac{a_1^2}{4}+a_1\lambda+m_1^2$$

$$a_3^2 = \frac{a_1^2}{4}-a_1\lambda+m_1^2$$

Setzt man diese Werte in Γ_2 ein, nachdem man

$$w_2 \equiv m_1 e, \quad \lambda = m_1 q, \quad w_1 \equiv e_1 x$$

gesetzt hat, so bekommt man

$$(f \equiv e^2x^2(x^2-qx-\tfrac{3}{4})^2 - 4e^2(x^2+qx+\tfrac{1}{4})(x^2-qx+\tfrac{1}{4})$$
$$+4(1-q^2)(x^2-qx+\tfrac{1}{4}) = 0$$

f ist in (B; e, q, x) unzerlegbar.

$$f(e^2 = 4(1-q^2)) = 18(q^2-1)x[q^4x^3-2q^3(x^2-\tfrac{3}{4}(x^2-q^2x(x^2-\tfrac{5}{4})^2$$
$$+q(2x^4+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{4})-x(x^2-\tfrac{1}{4})(x^2-\tfrac{9}{4})]$$
$$\equiv 16x(q^2-1)g$$

Ich beweise die Unzerlegbarkeit von g im Bereiche (R, q, x). g ist gleichzeitig zerlegbar oder unzerlegbar mit

$$-g\left(q=\frac{y}{x}\right)x \equiv h = x^6 - \left(g^2+2y+\frac{3}{2}\right)x^4 + (2y^3+\tfrac{5}{2}y^2-\tfrac{1}{2}y+\frac{5}{16}\Big)x^2$$
$$-\left(y^4+\tfrac{3}{2}y^3+\frac{25}{16}y^2+\tfrac{1}{4}y\right)$$

Dass h in (R, y, x) unzerlegbar ist, beweist man ebenso wie für die Function g in 11[d]. Die Anwendung von N auf g und f ergiebt wieder die Unauflösbarkeit von $f = a$

58[c]) h_1, m_2 w_1

$$a_2^2 = 2a_3^2 + 2a_1^0 - 4m_2^2, \quad a_3^2 = a_1^2 + \lambda + 2a_1\lambda + 4m_2^2$$
$$a_1^2 = 4)a_1^2 + a_1\lambda + m_2^2), \quad \varkappa \equiv \sqrt{4a_1^2 - h_1^2}$$

und wenn man diese Werte in P_1 einsetzt

$$w_1^4(3a_1+2\lambda)^2 - 4\lambda_1^2 a_3^2 a_3^2 + 4h_1^2 a_1^2 a_3^2 = 0$$

eine auflösbare Gleichung für a_1, durch welche die Aufgabe auf 34[b]) zurückführt.

58[d]) h_1, m_2, w_3

Setzt man

$$w_2 \equiv m_2 c_1, \quad \lambda \equiv \sqrt{4m_2^5 - h_1^2}, \quad \lambda \equiv 2m_2 q, \quad w_2 \equiv n_1 x$$

so findet man wie vorher

$$f \equiv e^4x^4(x+q)^2 - e^2(x^2+2qx+1)(4x^2+4qx+1)$$
$$+(1-q^2)(4x^2+4qx+1) = 0$$

wobei f vom 6. Grade in x und unzerlegbar in (R, c, q, x) ist.

$$f(e^2 = 1-q^2) = (1-q^2)x[(1-q^2)x^3(x+q)^2 - (x+2q)(4x^2+4qx+1)]$$
$$\equiv (1-q^2)xg$$

g ist eine in (R, q, x) unzerlegbare Function 5. Grades in x. Die Unzerlegbarkeit beweist man hier wie in 58[b]) für g.

Nach N ist also die Aufgabe nicht trigonometrisch lösbar.

58[e]) h_1, m_2, w_3

Setzt man

$$\lambda \equiv \sqrt{4m_2^2 - h_1^2}, \quad 2m_2 \equiv a_1 x, \quad \lambda \equiv 2m_2 q, \quad 2w_3 \equiv 2m_2 e$$

so erhält man durch Einsetzung der Werte von a_2^2 und a_3^2 in P_8:

$$f \equiv e^4x^2(x^2+4qx+3)^2 - 4e^2(x^2+4qx+4)(x^2+2qx+1)$$
$$+4(x^2+4qx+1)(1-q^2) \equiv 0$$

f ist im Bereiche (R, e, q, x) unzerlegbar.

$$f(e^2 = 1-q^2) = (1-q^2)x[(1-q^2)x(x^2+4qx+3)^2$$
$$-4(x+2q)(x^2+4qx+4)] \equiv (1-q^2)xg$$

Die Unzerlegbarkeit von g im Bereiche (R, q. x) beweist man wie in 58[b]. $f=0$ ist jetzt nach N nicht auflösbar.

59)	$h_i m_k w_l'$ ($h_1 m_1 w_1'$	58[a] (2—2) f		60)	$h_i r \varrho$ ($h_1 r \varrho$	B. 147
	$h_1 m_1 w_2'$	58[b] (1—1)		61)	$h_i r \varrho_k$ ($h_1 r \varrho_1$	60 (1—1) f
	$h_1 m_2 w_1'$	58[c] (2—2) a			$h_1 r \varrho_2$	60 (2—2) f
	$h_1 m_2 w_2'$	58[d] (1—1)		62)	$h_i r w_k$ ($h_1 r w_1$	85[a] B_1 f
	$h_1 m_2 w_3'$	58[e] (1—1)			$h_1 r w_2$	

62[b]) h_1, r, w_2

Man hat

$$w_2 = \frac{2}{h_3'+h_1'}\sqrt{\frac{h_1 h_3'}{(-h_1'+h_2'+h_3')(h_1'+h_2'-h_3')}}$$

$$r = \frac{2h_1'h_2'h_3'}{(h_1'+h_2'+h_3')-(h_1'+h_2'+h_3')(h_1'-h_2'+h_3')(h_1'+h_2'-h_3')}$$

wo $h_i' \equiv \frac{1}{h_i}$. Setzt man also

$$h_3'h_1 \equiv x, \quad h_1'h_1 \equiv y, \quad w_2 h_1' \equiv e, \quad r h_1' \equiv \sigma_1$$

so wird

$$y^2 = \frac{e^2(x+1)^2(x-1)^2+4x}{e^2(x+1)^2}, \qquad \sigma = \frac{2xy}{4x^2-(x^2+1-y^2)_2}$$

also

$$f \equiv 64\sigma^2x^2[e^2(x+1)^2-1]^2 - e^6[e^2(x-1)^2(x+1)^2+4x] = 0$$

f ist unzerlegbar 10. Grades für x im Bereiche (R, σ, ϱ, x).

$$f\left(\sigma = \frac{2\varrho^3}{4e^2-1}\right) = (x-1)\{-16e^6(x-1)(x+1)^8$$
$$+8e^4(x-1)(x+1)^4[x+1)^4-6x]+e^2(x+1)^2[32x(x^3+5x^2+11x-1)$$
$$-(x-1)(x+1)^6]-4x(x^5+7x^4+22x^3+42x^2+57x-1)\} \equiv (x-1)g$$

g ist hier wie in 11[d] im Bereiche (R, e, x) unzerlegbar.. N giebt angewandt auf f und g die Unauflösbarkeit von $f=0$.

63) $h_i r w_k'$ $(h_1 r w_1'$ 62^a (2—2) $\mathfrak{f}$

$h_1 r w_2'$ 62^b (1—1)

64) $h_i \varrho_1 \varrho_k$ $(h_1 \varrho \varrho_1$ unbestimmt wegen A_1

$h_1 \varrho \varrho_2$ B. 255

65) $h_i \varrho w_k$ $(h_1 \varrho w_1$ 86^a A_1 $\mathfrak{f}$

$h_1 \varrho w_2$ 86^b A_1 $\mathfrak{a}$

66) $h_i \varrho w_1'$ $h_1 \varrho w'$ 65^a B_1 $\mathfrak{f}$

$h_1 \varrho w_2'$ 87^b A_1 $\mathfrak{a}$

68) $h_i \varrho_k w_l'$ $(h_1 \varrho_1 w_1'$ 66^a (1—1) $\mathfrak{f}$

$h_1 \varrho_1 w_2'$ 65^b (1—1) $\mathfrak{a}$

$h_1 \varrho_2 w_2'$ 65^b (2—2) $\mathfrak{f}$

$h_1 \varrho_2 w_3'$ 66^b (2—2) $\mathfrak{a}$

$h_1 \varrho_2 w_1'$ 65^b (23) (2—2) $\mathfrak{a}$

69) $h_i \varrho_k w_l$ $(h_1 \varrho_1 w_1$ 65^a (1—1) $\mathfrak{f}$

$h_1 \varrho_1 w_1$ 66^b (1—1) $\mathfrak{a}$

$h_1 \varrho_2 w_2$ 66^b (2—2) $\mathfrak{f}$

$h_1 \varrho_2 w_2$ 65^b ((2—2) $\mathfrak{a}$

$h_1 \varrho_2 w_3$ 66^b (23) (2—2) $\mathfrak{a}$

69) $h_i w_l'$ $(h_1 w_1 w_1'$ unbestimmt wegen B_1

$h_1 w_1 w_2'$ 18^c (1—1)

$g_1 w_2 w_1'$ 18^c (2—2)

$h_1 w_2 w_2,$ 18^a B_2 $\mathfrak{a}$

$y_1 w_2 w_2'$ 18^d (2—2)

70) $m_i r \varrho$ $(m_1 r \varrho)$ $\mathfrak{a}$

71) $m_i r \varrho_k$ $(m_1 r \varrho_1$ 70 (1—1) $\mathfrak{a}$

$m r \varrho_2$ 70 (9—2) $\mathfrak{a}$

70) $m_1, \; r, \; \varrho_1$

Es ist

$$4\varrho\varrho_1 = a_1^2-(a_2-a_4)^2, \quad \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{-\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3}{\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3}, \quad (a_2-a_3)^2 = a_1^2-4\varrho\varrho_1,$$

$$\tfrac{1}{2}{}_2+\varrho_6 = \frac{\varrho_1+\varrho}{\varrho_1-\varrho}\,a_4$$

$$a_2a_3 = \frac{\varrho_1\varrho}{(\varrho_1-\varrho)^2}\,a_1^2+\varrho_1\varrho_2 \quad a_1^2+a_3^2 = \frac{\varrho_1^2+\varrho^2}{(\varrho_1-\varrho)^2}\,a_1^2-2\varrho_1\varrho$$

$$a_1+a_2+a_3 = \frac{2\varrho_1}{\varrho_1-\varrho}\,a_1$$

Setzt man dies in die Gleichung

$$r = \frac{a_1a_2a_3}{\sqrt{(a_1+a_2+a_3)(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)}}$$

so wird

$$r = \frac{a_2 a_3}{4\frac{\varrho_1 \varrho}{\varrho_1 - \varrho}}, \quad a_2 a_3 = \frac{4\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho} r, \quad a_1^2 = 4r(\varrho_1 - \varrho) - (\varrho_1 - \varrho)^2$$

$$a_2 + a_3^2 = \frac{4r(\varrho_1^2 + \varrho^2)}{\varrho_1 - \varrho} - (\varrho_1 + \varrho)^2, \quad (a_2 - a_3)^2 = 4r(\varrho_1 - (\varrho_1 + \varrho)^2$$

$$(a_2 + a_3)^2 = \frac{4r(\varrho_1 + \varrho)^2}{\varrho_1 - \varrho} - (\varrho_1 + \varrho)^2$$

Dies in den Ausdruck für m_1 eingesetzt, ergiebt

$$4m_1^2 + \varrho_1^2 + 6\varrho_1\varrho + \varrho^2 - \frac{4r(\varrho_1 + \varrho)^2}{\varrho_1 - \varrho} = 0$$

eine auflösbare Gleichung, die unsere Aufgabe auf 80) zurückführt

72) $m_i r w_k$ ($m_1 r w_1$ construirbar
$m_1 r w_2$

72ᵃ) $m_1, \ r, \ w_1$

Setzt man

$$a_2 + a_3 \equiv x, \quad a_2 a_3 \equiv y, \quad \text{also} \quad a_2^2 + a_3^2 = x^2 - 2y$$

so wird

$$4m_1^2 = 2x^2 - 4y - a_1^2 \quad w_1^2 x^2 = y(-x^2 + 4y + 4m_1^2)$$

$$r^2[4y^2 - (-x^2 + 2y + 4m_1^2)^2] = (2x^2 - 4y - 5m_1^2)y^2$$

also

$$a_1^2 = 2x^2 - 4y - 4m_1^2, \quad x^2 = \frac{4y(y + m_1^4)}{y + m_1^2}, \quad a_1^2 = \frac{4y(y + 2m_1^2 - w_1^2)}{y + w_1^9} - 4m_1^2$$

$$r^2(-x^2 + 4y + 4m_1^2)(x^2 - 4m_1^2) = \frac{4(y - m_1^2)(y + m_1^2)}{y + w_1^2}$$

oder

$$r^2 \cdot \frac{4w_1(y + m_1^2)}{y + w_1^2} \cdot \frac{4(y^2 - m_1^2 w_1^2}{y + w_1^2} = 4y^2 \frac{(y + m_1^2)\, y - w_1^2)}{y + w_1^2}$$

Da $y + m_1^2$ und $y + w_1^2$ nicht verschwinden, kann man beiderseits mit $\frac{(y + w_1^2)^2}{4\, y + m_1^2)}$ multipliciren und erhält dann eine quadratische Gleichung für y^2. Diese construirbare Aufgabe habe ich nirgends behandelt gefunden.

72ᵇ) $m_1, \ r, \ w_2$

$$a_2^2 = \frac{a_1^2}{2} - a_3^2 + 2m_1^2, \quad w_2^2(a_2 + a_1)^2 = a_1 a_3 \left[\frac{(a_1 + 2a_1)^2}{2} - 2m_1^2\right]$$

$$r^2(2a_1 a_3 + a_1^2 + a_3^2 - a_2^2)(2a_1 a_3 - a_1^2 - a_3^2 + a_2^2) = a_1^2 a_2^2 a_3^2$$

Man setze

$$\frac{a_1+2a_3}{a_1+a_3}\equiv x, \quad \text{also}$$

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{x-1}{2-x}, \quad a_1{}^2+a_3{}^2-a_2{}^2=\frac{a_1{}^2}{2}+2a_3{}^2-2m_1{}^2$$

$$w_2{}^2=\frac{x-1}{2-x}\left[\frac{x^2}{2}a_1{}^2-2m_1{}^2(2-x)^2\right]$$

und

$$m_1\equiv w_2e_1, \quad r\equiv w_2\sigma$$

so wird

$$f\equiv\sigma_2x^4[16e^2(x-1)^2(2-x)^2-(3x-4)^2]$$
$$-4(x-1)(2-x)[4e^2(2-x)(x-1)-(x^2-2)][2e^2(x-1)(2-x)+1]^2=0$$

f ist in (R, σ, e, x) unzerlegbar.

$$f(e=0)\equiv g=-\sigma^2x^4(3x-4)+4(x-1)(2-x)(x^2-2)$$

g ist in (R, σ, x) unzerlegbar.

$$g\left(\sigma=\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{81}(2x-3)(-18x^5+21x^4-41x^3+60x^2+90x-108)$$
$$\equiv-\frac{4(2x-3)}{81}h$$

h ist unzerlegbar (im Bereiche der rationalen Zahlen), N ergiebt engewandt auf h und g die Unauflösbarkeit von $f=0$.

73) $m_i r w_k'$ ($m_1 r w_1'$ 72[a] (2—2) ℓ; $m_1 r w_2'$ 72[b] (1—1)

74) $m_i \varrho \varrho_k$ ($m_1 \varrho \varrho_1$ 22[d] (3—3) ℓ; $m_1 \varrho \varrho_2$ 22[c](23)(1—1)ℓ

75) $m_i \varrho w_k$ ($m_1 \varrho w_1$ a; $m_1 \varrho w_2$

75[b]) $m_1 \varrho_1 w_1$

Man setze

$$\varrho\equiv w_1e, \quad \varrho\equiv m_1\sigma, \quad a_2+a_3\equiv a_1x_1, \quad a_2-a_3\equiv a_1y$$

so wird

$$e=\frac{x}{1+x}\sqrt{\frac{1-y^2}{x^2-y^2}}, \quad 4m_1{}^2=a_1{}^2(x^2+y^2-1)$$

$$y^2=\frac{e^2(x+1)^2x^2-x^2}{e^2(x+1)^2-x}$$

$$y^2+x^2-1=\frac{e^2(x+1)^2(2x^2-1)-x^4}{e^2(x+1)^2-x^2}, \quad \sigma^2=\frac{(x-1)(1-y^2)[e^2(x+1)^2-x^2]}{(x+1)[e^2(x+1)(2x^2-1)-x^4]}$$

$$\sigma^2=\frac{e^2(x^2-1)^2}{x^4-e^2(x+1)^2(x2^2-1)}$$

Diese auflösbare Gleichung führt die Aufgabe auf 1) zurück.

75^b) $m_1, \quad \varrho, \quad w_2$

Nimmt man

$$\varrho\equiv w_2 e, \quad m_1\equiv\varrho\sigma, \quad a_1+\varrho_3\equiv a_2 x, \quad a_1-a_3\equiv a_2 y$$

so wird

$$e=\frac{x}{1+x}\sqrt{\frac{1-y^2}{x^2-y^2}}. \quad y^2=\frac{e^2(x+1)^2x^2-x^2}{e^2(x+1)^2-x^2}$$

$$4m_1^2=\frac{y^2-xy+x^2+3}{4}a_2^2$$

$$=\frac{2e^2(x+1)^2(x^2+1)-x^4(x^2+9)-6x[e^2(x+1)^2-x^2]y}{4[e^2(x+1)^2-x^2]}a_2^2$$

$$\sigma^2=\frac{2e^2(x+1)^2(x^2+4)-x^2(x^2+1)-6x[e^4(x+1)^2-x^2]y}{4(x-1)(1-x)(x+1)^2e^2} \text{ oder ohne } y$$

$$\begin{aligned}f\equiv\ &16e^4(x+1)^4[\sigma^2(x-1)^2+(x^2+1)][\sigma^2(x-1)^2-(x^2-2)]\\ &-8e^2x^2(x+1)^2[\sigma^2(x-1)^2(x^2+1)-4x^4+2x^2+18]\\ &+x^4(x^2-9)^2=0\end{aligned}$$

f ist in (R, ϱ, σ, x) unzerlegbar.

$$\begin{aligned}(e=\tfrac{1}{2})=\ &(x-1)^2(\sigma^4(x-1)^2(x+1)^4+\sigma^2(x-1)(x+1)^2(-x^3+x^2-2x-4)\\ &+7x^6+22x^5+13x^4-4x^3+24x^2+24x+4]\\ &\equiv(x-1)^2g\end{aligned}$$

g ist in (R, σ, x) unzerlegbar.

$$46g\left(\sigma^2=\frac{17}{8}\right)=(x+3)(601x^5+183x^4-1366x^3+510x^2+1309x+363)$$
$$\equiv(x+3)h$$

h ist unzerlegbar, und $g=0$, $f=0$ nach der oft erwähnten Schlussweise unauflösbar.

76) $m_1\varrho w_k'$ ($m_1\varrho w_1'$ a
$m_1\varrho w_2'$

76^a) $m_1. \ \varrho, \ w_1'$

Man setze

$$\varrho \equiv w_1'e, \quad \varrho \equiv m_1\sigma, \quad a_2+a_3 \equiv a_1 x, \quad a_2-a_3 \equiv a_1 y_1$$

so wird

$$e = y\sqrt{\frac{x-1}{(x+1)(x^2-y^2)}}, \quad y^2 = \frac{e^2x^2(x+1)}{e^2(x+1)+x-1}$$

$$4m_1^2 = \frac{e^2(x+1)(2x^2-1)+(x-1)(x^2-1)}{e^2(x+1)+x-1}a_1^2$$

$$\sigma^2 = \frac{(x-1)(1-x)[e^2(x+1)^2-1]}{(1+x)^2[e^2(2x^2-1)+(x-1)^2]} = \frac{(x-1)^2[1-e^2(x+1)^2]}{(x+1)^2[e^2(2x^2-1)+(x-1)^2]}$$

Das ist eine auflösbare Gleichung für x.

76b) $m_1, \; e_1, \; w_3'$

Für

$$\varrho \equiv w_2'e, \quad m_1 \equiv \varrho\sigma, \quad a_3+a_1 \equiv a_2 x, \quad a_3-a_1 \equiv a_2 y$$

erhält man

$$e = y\sqrt{\frac{x-1}{(x+1)(x^2-y^2)}}, \quad y^2 = \frac{e^2(x+1)x^2}{e^2(x+1)+x-1}$$

$$4m_1^2 = a_2^2\frac{x^2+8+y^2+6xy}{4}$$

$$4\sigma^2(x-1)^2[1-e^2(x+1)^2] = 2e^2(x+1)^2(x^2+4)+(x+1)(x-1)(x^2+8)$$
$$+6x(x+1)[e^2(x+1)+x-1]y$$

oder rational gemacht

$$\equiv \{4\sigma^2(x-1)^2[e^2(x+1)^2-1]+2e^2(x+4)^2(x^2+1)+(x+1)(x-1)(x^2+8)\}^2$$
$$-36e^2x^4(x+1)^3[e^2(x+1)+x-1] = 0$$

f ist in (R, σ, e, x) unzerlegbar.

$$-f(\sigma=0) = (x+1)^2[32e^4(x+1)^2(x^2+1)(x^2-2)$$
$$+16e^2(x+1)(x-1)(2x^4-3x^2-8)-(x-1)^2(x^2+8)^2] \equiv (x+1)^2 g$$

ist in (R, e, x) unzerlegbar.

$$8g(e=\tfrac{1}{4}) = (x-3)(9x^5+15x^4-41x^3+131x^2-290x+150) \equiv (x-3)h$$

h ist in R(1) unzerlegbar, $g=0$, $f=0$ sind nicht auflösbar.

77) $m_i\varrho_i w_i (m_1\varrho_2 w_1$ 75a (1—1) a

$m_1\varrho_1 w_2$ 76b (1—1)

$m_1\varrho_2 w_1$ 76a (2—2) a

78) $m_i\varrho_k w_l' (m_1\varrho_1 w_1'$ 76a (1—1) a

$m_1\varrho_1 w_2'$ 75b (1—1)

$m_1\varrho_2 w_1'$ 75a (2—2) a

$m_1 \varrho_2 w_2$ 75[b] (2—2) $m_1 \varrho_2 w_2'$ 76[b] (2—2)

$m_1 \varrho_2 w_3$ 76[b] (23) (2—2) $m_1 \varrho_2 w_3'$ 75[b]) (23) (2—2)

79) $m_i w_k w_l'$ ($m_1 w_1 w_1'$ 58[a] B_1 k
$m_1 w_1 w_2'$) 23[c] (1—1)
$m_1 w_1 w_1'$ 23[c] (2—2)
$m_1 w_2 w_2'$ 58[c] B_2(12) a
$m_1 w_2 w_3'$ 23[d] (2—2)

80) $r \varrho \varrho_i$ ($r \varrho \varrho_1$ B. 217
81) $r \varrho w_i$ ($r \varrho w_1$ a
82) $r \varrho w_i'$ ($r \varrho w_1'$ a

Für 81) r, ϱ, w_1
ist

$$\varrho \equiv r\sigma, \quad \varrho \equiv w_1 e, \quad n_3 + a_2 \equiv a_1 x, \quad n_3 - a_2 \equiv a_1 y$$

$$e = \frac{x}{x+1}\sqrt{\frac{1-y^2}{x^2-y^2}}, \quad y^6 = \frac{e^2(x+1)x^2-x^2}{c^2(x+1)^2-x^2}$$

$$\sigma = \frac{2(x-1)(x-y^2)}{x^2-y^2} = \frac{2e^2(x-1)(x+1)^2}{x^2}$$

eine auflösbare Gleichung für x.

Für
$$\varrho \equiv m_1' e, \quad \varrho \equiv r\sigma, \quad a_3 + a_2 \equiv n_1 x, \quad a_2 - a_2 \equiv a_1 y$$
wird

$$e = y\sqrt{\frac{x-1}{(x+1)(x^2-y^2)}}, \quad y^2 = \frac{e^2(x+1)x^2}{c^2(x+1)+x-1)}$$

$$\varrho = \frac{2(x-1)(1-y^2)}{x^2-y^2} = \frac{(1-x)^2[e^2(x+1)^2-1]}{x^2}$$

eine auflösbare Gleichung für x.

83) $r \varrho_i w_k$ ($r \varrho_1 w_1$ 81 (1—1) a
$r \varrho_1 w_2$ 82 (12) (1—1)

84) $r \varrho_1 w_h'$ ($r \varrho_1 w_1'$ 82 (1—1, a
$r \varrho_1 w_2'$ 81 (1—2)(112) a

85) $r w_i w_k'$ ($r w_1 w_1'$ B. 110
$r w_1 w_2'$ 26 (r—1)

86) $\varrho \varrho_i w_k$ ($\varrho \varrho_1 w_1$ B. 298
$\varrho \varrho_1 w_2$ 31[a] (123) (2—2)a

87) $\varrho \varrho_l w_k'$ ($\varrho \varrho_1 w_2'$ 31[b] (13) (2—2) k
$\varrho \varrho_1 w_2'$ 86[b] (1—1) a

88) $\varrho w_i w_k'$ ($\varrho w_1 w_2'$ 65[a] B_1 k
$\varrho w_1 w_2'$ 36[b] (1—1)

89) $\varrho_i w_k w_l'$ ($\varrho_1 w_1 w_1'$ 88^a (1—1) ŧ
$\varrho_1 w_1 w_2'$ 29 (1—1)
$\varrho_1 w_2 w_1'$ 30 (2—2)
$\varrho_1 w_2 w_2'$ 35^a (12) (1—1) ŧ
$\varrho_1 w_1 w_3'$ 85^b (13) (1—1)

Tafeln für die merkwürdigen Strecken zweier Dreiecke.

$a_i = 1$

$h = m_i = w$	r	ϱ	ϱ_i	w_i'
$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$	∞

$a_1 = 3, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 5.$

h_1	h_2	h_3	m_1	m_2	m_3	r	ϱ	ϱ	ϱ_2	ϱ_3	w_1	w_2	w_3
4	3	$2\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{13}$	$\sqrt{13}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{2}$	1	2	3	6	$\frac{4}{3}\sqrt{10}$	$\frac{3}{2}\sqrt{5}$	$\frac{12}{7}\sqrt{2}$

w_1	w_2'	w_3'
$4\sqrt{10}$	$3\sqrt{5}$	$3 \,.\, 4\sqrt{2}$

Ein Ueberblick über das Ganze zeigt uns..

„Von den 244 behandelten Aufgaben sind 98 construirbar, 74 „trigonometrisch lösbar, 69 trigonometrisch nicht lösbar, 3 unbe- „stimmt."

„Es giebt keine algebraischen Beziehungen zwischen drei „merk- „würdigen Strecken" des Dreiecks als die unter A_i und B_i ange- gebenen".

Nun erheben sich aber die weiteren Fragen:

Welche von den als trigonometrisch lösbar nachgewiesenen Auf- gaben sind construirbar?

Welche algebraischen Beziehungen bestehen zwischen vier oder

mehr merkwürdigen Strecken, die in diesen linear oder quadratisch sind, z. B.

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4r^2$$

Welche weiteren einfachen Werkzeuge machen die trigonometrisch unlösbaren Aufgaben lösbar?

Die Beantwortung dieser Fragen bleibt ferneren Untersuchungen überlassen.

Plauen i./V., April 1899.

XXXI.

Bemerkungen zu der Figur von der Simpson'schen Geraden.

Von

Adalbert Grüttner.

Folgende kleine Betrachtung wird vielleicht als Anregung zu häuslichen Arbeiten für Schüler der Prima einigen Nutzen haben. Sie gründet sich auf den bekannten Satz von der Simpson'schen Geraden.

Wir setzen voraus, dass von einem Punkte P des Umkreises eines Dreiecks ABC nach seinen drei Seiten unter gleichen Winkeln φ und in gleichem Sinne drei Geraden gezogen sind. Die Schnittpunkte dieser drei Geraden mit den Dreiecksseiten sollen heissen P_a, P_b und P_c. Die Vierecke PP_aP_cB und PP_aP_bC sind dann Sehnenvierecke, woraus wir folgern, dass

$$\text{Wkl. } BP_aP_c = BPP_c \quad \text{und}$$
$$\text{Wkl. } CP_aP_b = CPP_b$$

Da nun ausserdem nach dem Aussenwinkelsatz

$$\text{Wkl. } BPP_c = AP_cP \cdot ABP = \varphi - ABC \quad \text{und}$$
$$\text{Wkl. } CPP_b = ACP - AP_bP = 180^0 - ABC - (180^0 - \varphi)$$
$$= \varphi - ABC$$

so haben wir

$$\text{Wkl. } BP_aP_c = CP_aP_b$$

Nach der Umkehrnng des Scheitelwinkelsatzes folgt hieraus sofort, dass P_a, P_b, P_c in gerader Linie liegen. — Alle Geraden, die wir durch Aenderung von φ erhalten, werden zu einander in irgend einer Beziehung stehen, die nunmehr untersucht werden soll.

Die Fusspunkte der Senkrechten auf die Dreiecksseiten mögen P_1, P_2, P_3 heissen. Auch sie liegen in einer Geraden, die wir g nennen wollen.

AP_bP_cP ist ein Sehnenviereck. Fällen wir nun von P auf die Seiten des Dreiecks AP_bP_c die Senkrechten, so müssen ihre Fusspunkte P_2, Q, P_4 auch in einer Geraden liegen, das heisst aber:

Der Fusspunkt der Senkrechten von P auf irgend eine der besprochenen Geraden liegt auf g.

Fassen wir nun g als Scheiteltangente einer Parabel mit dem Brennpunkt P auf, so können wir beweisen, dass alle jene Geraden Tangenten an diese Parabel sind. Zunächst wollen wir ihre Leitlinie suchen. Construiren wir den Gegenpunkt P' von P in Bezug auf AB, so muss P' ein Punkt der Leitlinie sein, da

$$PP_3 = P'P_3$$

ist. Es lässt sich nun zeigen, dass die Verbindungslinie von P' mit dem Höhenschnittpunkt H der Scheiteltangente parallel ist. Zum Beweise construiren wir uns durch Verlängerung der Höhe CD bis zum Umkreise den Gegenpunkt H' von H in Bezug auf AB und ziehen $H'P$ und HP', die sich auf AB schneiden. Dann ist

$$\text{Wkl. } P_1P_3P = P_1BP$$

weil P_1P_3BP ein Sehnenviereck ist. Ausserdem lässt sich leicht erkennen, dass

$$\begin{aligned}\text{Wkl. } P_1BP = CBP &= CH'P \\ &= H'HP \\ &= HP'P \text{ ist.}\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$\text{Wkl. } P_1P_3P = HP'P$$

Die Linien HP' und P_cP_3 sind also parallel, und HP' ist die Leitlinie unserer Parabel. Auf ihr müssen auch die Gegenpunkte von P in Bezug auf BC und CA liegen, denn ebenso wie PP' werden auch die Verbindungslinien der andern Gegenpunkte mit P durch g halbirt und liegen daher beide auf der Parallelen durch P' zu g.

Um nun zu beweisen, dass die Gerade $P_b P_c$ und mit ihr alle auf gleiche Weise entstandenen Geraden Tangenten an die Parabel sind, verlängern wir PQ bis zum Schnittpunkt R mit der Leitlinie HP' und errichten in R auf HP' die Senkrechte, welche $P_b P_c$ in T schneidet. T ist dann ein Parabelpunkt, da

$$RT = PT$$

ist. Dieser Punkt ist auch der einzige auf $P_b P_c$, welcher zugleich der Parabel angehört, denn, gäbe es noch einen andern X, so müsste sein, wenn Y der Fusspunkt der Senkrechten von X auf HP' ist,

$$XY = XP$$

Da nun aber auch

$$XR = XP$$

sein muss, und

$$XR = XY$$

unmöglich ist, so ist wirklich P der einzige Parabelpunkt auf $P_b P_c$ oder $P_b P_c$ ist Tangente an die Parabel. Zu diesen Tangenten gehören auch die Dreiecksseiten, denn zieht man nach einer Ecke, etwa B, die Verbindungslinie mit P, und construirt unter gleichem Winkel eine Gerade von P nach AC, so fällt der Scheitel dieses Winkels nach C, da sein Nebenwinkel dann $= 180^0 - ABC$, er selbst also $= ABC$ wird. BC ist also eine der besprochenen Geraden ebenso lässt sich das auch von AC und AB zeigen. Fassen wir nun zum Schluss alle Ergebnisse zusammen, so bekommen wir folgende Sätze:

Zieht man von einem Punkte P des Umkreises eines Dreiecks ABC Geraden unter gleichen Winkeln und in gleichem Sinne nach den drei Seiten, so liegen die drei Scheitel der gleichen Winkel auf einer Geraden. Aendert sich der Winkel, so ändert sich die Gerade und umhüllt während ihrer Bewegung eine Parabel, die auch die drei Dreiecksseiten als Tangenten und den Punkt P als Brennpunkt hat. Die Scheiteltangente dieser Parabel ist die Gerade, welche die Fusspunkte der Senkrechten von P auf die Dreiecksseiten verbindet. Ihre Leitlinie geht durch die drei Gegenpunkte von P in Bezug auf die Dreiecksseiten und durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

XXXI.

Ueber die Reduction einer Classe partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von

Berthold Oster.

1.

In seiner berühmten Abhandlung über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung sagt Ampère an einer Stelle: „Die allgemeine Integration der in der Form

$$F(x, y, z, p, q, s) = 0$$

enthaltenen Gleichungen kann als die erste der zu lösenden Aufgaben betrachtet werden, wenn man zur Integration aller Gleichungen zweiter Ordnung gelangen will“ [1]).

Der durch diese Worte vorgezeichnete Weg ist von vielen Mathematikern eingeschlagen worden und hat zu schönen Resultaten geführt. Die Worte Ampère's weisen aber zugleich auf das Problem hin, diejenigen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche nicht von vornherein in der Form

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

vorgelegt sind, auf diese Form womöglich zu reduciren. Diese zweite Aufgabe ist für die linearen Gleichungen schon von Euler

---

1) Journal de l'Ecole polytechnique, XVIIIe cahier (1820), p. 43.

gelöst. Für die Gleichungen der Monge-Ampère'schen Classe, welche bei Anwendung der Euler'schen Bezeichnungen in der Form

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

erscheinen, ist die gedachte Reduction nach Darboux und Lie dann und nur dann durch eine Berührungstransformation möglich, wenn jede der Charakteristiken eine integrable Combination zulässt.

Im Folgenden soll zunächst für Gleichungen von der Form

$$Ar + 2Bs + Ct + D = 0$$

— wo A, B, C, D Functionen von x, y, z, p, q sind – eine Methode der Reduction angewandt werden, welche schon Ossian Bonnet zur Reduction der Differentialgleichung für die Flächen constanten Krümmungsmasses benutzt hat [1]). Diese Methode führt, abgesehen von leicht anzugebenden Ausnahmefällen, stets zum Ziele und liefert somit eine Vereinfachung des Integrationsgeschäftes oder lässt doch wenigstens leichter entscheiden, ob die vorgelegte Gleichung der Monge-Ampère'schen oder auch der Darboux'schen Classe angehört [2]).

In die erwähnte Form können bekanntlich die Gleichungen der Monge-Ampère'schen Classe ohne weiteres übergeführt werden, wenn von ihnen eine particuläre Lösung mit drei willkürlichen Constanten bekannt ist.

2.

Die Bonnet'sche Methode besteht darin, durch wiederholte Einführung neuer unabhängigen Variabeln aus der Gleichung

$$Ar + 2Bs + Ct + D = 0 \tag{1}$$

das erste und dritte Glied der linken Seite zum Fortfall zu bringen. Dabei kann der Coefficient C als nicht identisch verschwindend vorausgesetzt werden, weil sonst die Reduction nur einen einzigen Schritt erforderte.

---

1) O. Bonnet, Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes. Journal de Mathématiques, t. V (1869), p. 153—266.

2) Für die der letzteren Classe angehörenden Gleichungen von der Form

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

liefert z. B. die ihr zuzuordnende „Hilfsgleichung" ein sehr einfaches Merkmal. — Vgl. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, t. II (1898), p. 334.

Es mögen zunächst an Stelle von x, y die neuen unabhängigen Variabeln α, y eingeführt werden, als deren Functionen von jetzt an also x, z, p, q zu denken sind. Werden unter dieser Voraussetzung die partiellen Differentialquotienten von x, z, p, q in Bezug auf α, y ausgeschrieben, während für die ursprüngliche Annahme die Euler-schen Abkürzungen beibehalten werden, so ergeben sich die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial y} = q + p\dfrac{\partial x}{\partial y}, & \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} = p\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y} = s + r\dfrac{\partial x}{\partial y}, & \dfrac{\partial p}{\partial x} = r\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial y} = t + s\dfrac{\partial x}{\partial y}, & \dfrac{\partial q}{\partial \alpha} = s\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} \end{cases}$$

Die Einsetzung der hieraus für r und t sich ergebenden Werte

$$r = \frac{\dfrac{\partial p}{\partial y} - s}{\dfrac{\partial x}{\partial y}}, \qquad t = \frac{\partial q}{\partial y} - s\frac{\partial x}{\partial y}$$

führt die Gleichung (1) in die folgende über:

$$A\left(\frac{\partial p}{\partial y} - s\right) + 2Bs\frac{\partial x}{\partial y} + C\left(\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial y} - s\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right) + D\frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

deren Coefficienten nunmehr Functionen von α und y sind. Jetzt werde die Wahl der Variabeln so getroffen, dass in der transformirten Gleichung der Coefficient von s verschwindet, sodass diese in die beiden folgenden zerfällt:

$$C\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 - 2B\frac{\partial x}{\partial y} + A = 0$$

$$A\frac{\partial p}{\partial y} + \left(C\frac{\partial q}{\partial y} + D\right)\frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

Der ersteren wird dadurch genügt, dass für $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ einer der beiden Werte

$$(3^*)\qquad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}$$

angenommen wird, der gewählte Wert werde durch $\dfrac{1}{m}$ bezeichnet.

Alsdann sind die vier simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(3)\quad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{\partial x}{\partial y} = \dfrac{1}{m} \\ \text{b)} & C\dfrac{\partial q}{\partial y} + md\dfrac{\partial p}{\partial y} + D = 0 \\ \text{c)} & m\dfrac{\partial z}{\partial y} = pp \\ \text{d)} & \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} + m\dfrac{\partial q}{\partial \alpha} = m\dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} \end{cases}$$

von denen c) und d) aus (2) hervorgehen, zur vollständigen Bestimmung von x, z, p, q als Functionen von α, y geeignet.

Da die Gleichung (3 b) der Integrabilitätsbedingung im allgemeinen nicht genügt, so entspricht sie nicht einer endlichen Gleichung zwischen p, q und α, y. Bedeutet aber

$$\omega(\alpha, y) = \omega$$

eine willkürliche Function der Argumente α, y, so ist es stets möglich, p und q durch ω, sowie den in Bezug auf y genommenen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \omega'$$

wie folgt, darzustellen:

$$p = f(\omega, \omega') \quad q = g(\omega, \omega')$$

und die Functionen f, g so zu wählen, dass sie, für p und q in (3 b) eingesetzt, diese Gleichung zu einer identischen machen.

Hierauf ergiebt sich aus (3 a) und (3 c)

$$x = h(\omega, \omega')$$

und ein ähnlicher Ausdruck für z. Die Substitution aller dieser Werte in (3 d) führt sodann zu folgender Gleichung:

$$(4)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial h}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial \omega'}\cdot\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \omega'}\cdot\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\,\partial y}\right) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \omega'}\cdot\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\,\partial y} \\ &- \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \omega'}\cdot\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial \alpha} + \frac{\partial h}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial h}{\partial \omega'}\cdot\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\,\partial y}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

welche offenbar linear in Bezug auf $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha . \partial y}$ ist. Hiermit ist die Gleichung (1) auf eine andere reducirt, welche nur zwei von den partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung enthält.

3.

Indem in der Gleichung (4) an die Stelle der Variabeln α, y, ω die gebräuchlichen x, y, z treten, erhält sie die Gestalt:

$$2Ss + Tt + U = 0 \tag{4*}$$

wo S, T, U Functionen von x, y, z, p, q sind und S als nicht identisch verschwindend vorausgesetzt werde [1]).

Die Einführung der neuen unabhängigen Variabeln x, α führt zu Gleichungen, welche den obigen, mit (2) bezeichneten, analog sind. Aus ihnen ergiebt sich der Wert

$$t = \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - s}{\frac{\partial y}{\partial x}}$$

dessen Einsetzung die Gleichung (4*) in

$$2Ss\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - s\right)T + U\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

überführt. Die Forderung, α so zu wählen, dass in (5) der Coefficient von s verschwinde, zerfällt letztere wieder in die beiden Gleichungen:

$$2S\frac{\partial y}{\partial x} - T = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}T + U\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Auf diese Weise ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung von y, z, p, q als Functionen von x, α:

$$(6)\quad\begin{cases} \text{a)} & \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T}{2S} \\ \text{b)} & \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{U}{2S} = 0 \\ \text{c)} & \frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x} \\ \text{d)} & \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial q}{\partial x} \end{cases}$$

1) Diese Voraussetzung wird bei Benutzung der Gleichungen (2) überflüssig.

Aus (6b) folgt sofort ohne Integrationsprocesse

$$p = P\left(q, \frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

Wird dieser Wert in a) und c) eingesetzt und werden darauf y und z als Functionen von q, $\frac{\partial q}{\partial x}$, x, α bestimmt, so liefert d) eine Gleichung

$$\Phi\left(q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 q}{\partial x\, \partial \alpha}\right) = 0 \tag{7}$$

welche von Differentialquotienten zweiter Ordnung nur $\frac{\partial^2 q}{\partial x\, \partial \alpha}$, und diesen linear, enthält. Sie ist die gewünschte reducirte Gleichung.

Es ist zu beachten, dass die Variabeln auch auf andere Weise vertauscht werden können, dass namentlich auch im Verlaufe der Rechnung durch Einführung neuer Variabeln Vereinfachungen möglich sind und es so bewirkt werden kann, dass die bei den Zwischenintegrationen auftretenden willkürlichen Functionen ausser Betracht bleiben dürfen.

Dass übrigens die Integration der Gleichung (7) die der Gleichung (1), und zwar ohne weitere Integrationen, nach sich zieht, zeigt eine einfache Ueberlegung.

4.

Beispiel.

Für die Differentialgleichung

$$pqr + (p^2 + q)s + pt - 2q = 0 \tag{A}$$

ist

$$A = pq, \quad B = \frac{p^2 + q}{2}, \quad C = p, \quad D = -2q$$

Von den beiden Werten $\frac{1}{p}$, $\frac{p}{q}$ des Ausdruckes (3*) werde zur Reduction der erste gewählt, es werde also

$$m = p$$

gesetzt. Die der Gleichung (3b) entsprechende Relation

$$p\frac{\partial q}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial y} - 2q = 0$$

wird befriedigt durch den Ansatz

$$p = \frac{\omega}{\frac{\partial \omega}{\partial y}}, \quad q = \omega \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

wo

$$\omega = \omega(y, \alpha)$$

eine willkürliche Function ihrer Argumente bezeichnet, und es folgt weiter:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial \log \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\omega}{\frac{\partial \omega}{\partial y}}\right)^2$$

also, bei Nichtberücksichtigung willkürlicher Functionen von α:

$$x = \log \omega, \quad z = \int \left(\frac{\omega}{\frac{\partial \omega}{\partial y}}\right)^2 dy$$

Hiernach ergiebt sich zur Bestimmung von ω die lineare Gleichung

$$\left(\omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^3 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0$$

oder, in anderer Bezeichnung:

(B) $$(zq - 1)s + \frac{p}{q}t + pq^2 = 0$$

Nunmehr ist

$$S = \frac{zq-1}{2}, \quad T = \frac{p}{q}, \quad U = pq^2$$

also folgt

$$p = -\frac{zq-1}{q^2}\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{q^3}\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{z}{q}\frac{\partial q}{\partial x}$$

und weiter:

$$y = \frac{1}{2q^2}, \qquad z = \frac{1}{q}$$

Für q resultirt schliesslich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x\, \partial \alpha} + \frac{3 - 2q}{q^2 - q} \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial \alpha} = 0$$

oder, in der üblichen Bezeichnung:

$$\text{(C)} \qquad s + \frac{3 - 2z}{z^2 - z} pq = 0$$

Sterkrade, April 1899.

XXXII.

Miscellen.

1.

Lösung der diophantischen Gleichung
$$axy + bx + cy + d = 0$$

Es werde vorausgesetzt, dass in der Gleichung

$$axy + bx + cy + d = 0 \tag{1}$$

die Coefficienten a, b, c, d ganze Zahlen sind und keinen gemeinsamen Teiler haben. Multiplicirt man die Gleichung mit a und addirt auf beiden Seiten bc, so kann man die Gleichung in folgende umformen:

$$(ax + c)(ay + b) = bc - ad \tag{2}$$

Zerlegt man nun die Grösse $bc - ad$ in zwei Factoren $P \,.\, Q$, so wird die Gleichung (2) identisch erfüllt, wenn gesetzt wird

$$\left.\begin{aligned} ax + c = P; \quad x = \frac{P - c}{a} \\ ay + b = Q; \quad y = \frac{Q - b}{a} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Setzt man diese Werte in die mit a multiplicirte Gleichung (1) ein, so erhält man die identische Gleichung

$$(P - c)(Q - b) + b(P - c) + c(Q - b) + ad = 0 \tag{4}$$

wobei also

$$P \,.\, Q = bc - ad = D \quad \text{ist.}$$

Aus jeder Zerlegung erhält man ein Wurzelpaar.

Sollen aber die Wurzeln **ganze Zahlen** sein, so sind diejenigen Factorenpaare auszuwählen, für welche die Congruenzen gelten

$$\left.\begin{aligned} P &\equiv c \mod a \\ Q &\equiv b \mod a \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Im allgemeinen gilt für zwei beliebige Factoren P_i und Q_i

$$P_i \,.\, Q_i = D \equiv bc \mod a$$

Nehmen wir nun an, es sei

$$P_i \equiv c \mod a$$
$$Q_i \equiv b + \beta \mod a$$

wobei $\beta < a$ vorauszusetzen ist, so ist

$$P_i\, Q_i \equiv c(b + \beta) \equiv bc \mod a$$

also

$$c\beta \equiv 0 \mod a$$

Da β nicht durch a teilbar ist, so muss entweder c durch a teilbar oder $\beta = 0$ sein.

Aehnliches gilt, wenn

$$P_i \equiv c + \gamma$$
$$Q_i \equiv b$$

angenommen wird.

Hieraus geht hervor: Genügt ein Factor der Congruenz (5), so genügt auch der andere Factor, wenn nicht der dem ersten Factor congruente Coefficient durch a teilbar ist.

Ist aber einer der Coefficienten c oder b durch a teilbar, so muss auch, wie aus (5) hervorgeht, der entsprechende Factor P oder Q durch a teilbar sein, ebenso die Grösse D. Zerlegt man D so, dass ein Factor den Teiler a enthält, und genügt der andere Factor der Congruenz (5), so liefern die beiden Factoren ein ganzzahliges Wurzelpaar.

1. Beispiel. Die Gleichung sei

$$27xy - 45x + 17y - 87 = 0$$

Es ist

$$\begin{aligned} D &= -45 \,.\, 17 + 87 \,.\, 27 = 9(3 \,.\, 87 - 5 \,.\, 17) \\ &= 2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 11 \end{aligned}$$

Nun ist

$$P = 2^2 \,.\, 11 \equiv 17 \mod 27$$

Es muss daher

$$Q = 2^2 \,.\, 3^2 \text{ sein, und somit}$$

$$x = \frac{44 - 17}{27} = 1$$

$$y = \frac{36 + 45}{27} = 3$$

2. Beispiel.

$$5xy + 14x - 25y + 32 = 0$$

$$D = -14 \,.\, 25 - 5 \,.\, 32 = -5 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 47$$

Hier ist für

$$P = -5 \,.\, 3 \qquad Q = 2 \,.\, 17 \equiv 14 \bmod 5$$

Also

$$x = \frac{-15 + 25}{5} = 2$$

$$y = \frac{14 + 14}{5} = 4$$

Ist $a = 1$, so giebt jede Zerlegung ein ganzzahliges Wurzelpaar, weil der Congruenz (5) immer genügt wird.

Ist $a = 1$, $d = 0$, so kann die Gleichung (1) umgeformt werden in

$$1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{y} = 0$$

und die identische Gleichung, die der Lösung dient, wird

$$1 + \frac{b}{Q - b} + \frac{c}{P - c} = 0$$

wobei

$$P \,.\, Q = bc$$

ist. Setzt man hier ferner

$$b = c = -f$$

so erhält man als diophantische Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \tag{6}$$

und die entsprechende identische Gleichung wird

$$\frac{1}{P + f} + \frac{1}{Q + f} = \frac{1}{f}$$

wobei

$$P \,.\, Q = f^2$$

Die Gleichung (6), die man als Gleichung der harmonischen Teilung bezeichnen kann und die in der Optik eine Rolle spielt, ist schon früher behandelt und gelöst. (S. Schilling, Ueber die optische Formel

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

als diophantische Gleichung. Hoffmann'sche Zeitschrift XXII, Heft 7).

September 1899.

Prof. Dr. Züge.

2.

Definitive Scheidung der pythagoreischen und nichtpythagoreischen Zahlen.

Zum Artikel p. 128 war ich dadurch veranlasst, dass ich den

Satz (1): „Jede Primzahl von der Form $4n+1$ ist eine Summe „von 2 Quadraten" —

nur als einzelnen ohne seine Folgerungen und dadurch hervorgerufenen Fragen aufgestellt gefunden habe. Es ergab sich leicht zunächst der

Satz (2): „Jede ganze Zahl, die keinen Factor von der Form $4n-1$ hat, ist eine Summe von 2 Quadraten." —

Ueber die Zahlen, welche hierin nicht einbegriffen sind, fehlt noch das Urteil und soll im Folgenden ermittelt werden.

Sei p ein ungerader Prim-Factor von x^2+y^2. Dann ist

$$x^2 \equiv -y^2 \text{ (mod, } p)$$

folglich

$$x^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} y^{p-1} \text{ (mod. } p)$$

Ist nun p mit r, also auch mit y relativ prim, so ist nach dem Fermat'schen Satze

$$x^{p-1} \equiv y^{p-1} \equiv 1 \text{ (mod. } p)$$

daher

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$$

das heisst:

$$p = 4n + 1$$

Demnach kann $z = x^2 + y^2$ keinen Primfactor von der Form $4n-1$ enthalten.

Haben aber x und y einen Factor q gemein, so kann man

$$z = z' q^2$$

setzen, und die genannte Eigenschaft von z gilt für z'. Es bleibt also möglich, aber ohne Einfluss auf z', dass z eine gerade Potenz von $4n-1$ zum Factor hat. Für alle Fälle gilt daher der

Satz (3): „Jede Zahl ist eine Summe von 2 Quadraten oder „nicht, je nachdem sie keinen oder irgend einen Factor von der „Form $4n-1$ in ungerader Potenz hat." R. Hoppe.

3.

Die Zusammensetzung lebendiger Kräfte.

E. Dühring sagt in seiner „Kritischen Geschichte der allg. Prinzipien der Mechanik" (2. Aufl. S. 153) „Die Aufgabe der Zusammensetzung der Kräfte kann in einem sehr allgemeinen Sinne gefasst werden, der weit über die Vorstellungen hinausführt, die sich an das Parallelogrammgesetz zu knüpfen pflegen. Indessen der wichtigste Schritt muss noch weiter tragen und sogar die Zusammensetzung der lebendigen Kräfte als eine analoge Grundform der Vereinigung dynamischer Wirkungen erkennen lassen."

Dühring begnügt sich mit diesem Hinweis. Das Folgende ist ein Versuch, diese Aufgabe zu lösen.

Denkt man sich im homogenen Mittel einen Kubus abgegrenzt, so kann dieser als der Repräsentant einer Centralkraft gelten.

Durch drei aufeinander rechtwinklige, zu den Würfelseiten parallele und durch das Centrum gelegte Ebenen werde dieser Kubus in acht congruente Kuben zerlegt, deren Seite $= v$ sei. Es ist dann $8v^3$ der Ausdruck für die Gesamtkraft. Reducirt man diese auf die vom Centrum durch die Seitenmitte gehenden Resultanten, um freie Kräfte zu erhalten, von denen 6 die Gesamtkraft bilden, so erhält man als Ausdruck für die centrale Teilkraft $\frac{8}{6}v^3 = \frac{4}{3}v^3$

Durch Differentiation ergiebt sich

$$\frac{4}{3}\frac{dv^3}{dv} = 4v^2$$

Mit Rücksicht auf dynamische Wirkung und Gegenwirkung ist zu setzen

$$4v^2 = v^2\sin^2\frac{\beta}{2} + 2v^2\cos^2\frac{\beta}{2}$$

wobei die Ausdrücke rechts den Quadraten der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks entsprechen, dessen Hypotenuse $= 20$ ist.

Man kann nun setzen

$$4v^2\cos^2\frac{\beta}{2} = 2v^2(2 + \cos\beta)\ ^{*)}$$

$$4v^2\sin^2\frac{\beta}{2} = 2v^2(1 - \cos\beta)$$

oder für $R_1 = 2v\cos\frac{\beta}{2}$ und $R_2 = 2v\sin\frac{b}{2}$

$$R_1^2 = v^2 + v^2 + 2vv\cos\alpha$$
$$R_2^2 = v^2 + v^2 - 2vv\cos\alpha$$

Setzt man nun

$$2v^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad \text{und} \quad v_1v_2\cos\alpha = v^2\cos\beta$$

so ist für $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = k$:

$$v^4k^2 = v_1^2v_2^2$$

wobei $k < 1$, d. h. $\alpha > \beta$ ist, denn $v^2 > v_1v_2$ Es ist nun

$$v_1^2 = \frac{v^4}{v_2^2}k^2$$

folglich durch Einsetzung in die Formel

$$v_1^2 + v_2^2 = 2v^2$$
$$v^4k^2 + v_0^4 = 2v_1v_3$$

oder $v_2^4 - 2v_1^2v_2 + v^4 = v^4(1 - k^2)$

woraus folgt

---

*) Aus dieser Gleichung erhält man für $\alpha = 90^0$, d. i. unter der Voraussetzung des dynamischen Maximums, für welches

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{ist:}$$

$$4v^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = v^2(1 + \sqrt{2})$$

Setzt man für v den Wert der grössten Fallgeschwindigkeit von 11 000 Sec.-Mtr. ein, so erhält man den Wert der Lichtgeschwindigkeit.

$$v_2^2 = v^2(1+\sqrt{1-k^2})$$

und

$$v_1^2 = v^2(1-\sqrt{1-k^2})$$

und daher nach der Voraussetzung

$$v_1^2 v_2^2 = v^4 k^2$$

Mit Bezug hierauf ergeben sich die allgemeinen Formeln des Parallelogrammgesetzes für Wirkung (Combination) und Gegenwirkung (Compensation)

$$R_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos\alpha \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$R_2^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos\alpha \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Setzt man nun weiter

$$R_1^2 = m v_1^2 \quad \text{und} \quad R_2^2 = m v_2^2$$

so ist

$$v_1[\sqrt{m-1+\cos^2\alpha} - \cos\alpha] = v_2$$

$$v_2[\sqrt{m-1+\cos^2\alpha} + \cos\alpha] = v_1$$

und

$$v_1 v_2 [m - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)] = v_1 v_2$$

daher $m = 2$, woraus folgt

$$v_1^2 - v_2^2 = 2 v_1 v_2 \cos\alpha$$

oder

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = v_1 v_2 \cos\alpha$$

Dies ist die Differenz zweier lebendigen Kräfte als Arbeit ausgedrückt. Somit ist die vorgenommene Aufgabe gelöst. Diese dynamische Formel wird zur kubischen für $\alpha = 0$. Man erhält dadurch

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} = v_1 v_2^2$$

woraus folgt für $v_2 = 1$

$$v_1 = r_2(\sqrt{2}+1)$$

und für $x_1 = 1$

$$v_2 = v_1(\sqrt{2}-1)$$

Es entspricht also $\frac{v_1}{v_2}$ der cotang 22° 30′

und $\frac{v_2}{v}$ der cotang 22° 30′

entspricht. Dies ist angenähert der Winkel der Ekliptik.

Eine weitere Interpolation der Gleichung soll hier unterbleiben.

Die Differenz der Grundgleichungen (1) und (2) ergiebt

$$R_1^2 - R_2^2 = 4 v_1 v_2 \cos\alpha$$

Ferner ist

$$R_1 R_2 = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4 v_1^2 v_2^2 \cos^2\alpha}$$

Setzt man nun

$$\frac{2 v_1 v_2 \sin\alpha}{\sqrt{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4 v_1^2 v_2^2 \cos^2\alpha}} = \cos\varphi$$

so ergiebt sich die Resultantengleichung

$$R_1^2 - R_2^2 = 2 R_1 R_2 \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \cos\varphi$$

welche der Verfasser bereits direct aus dem Kräfteparallelogramm mit Benutzung der graphischen Methode und dann auch durch Anwendung der Tangens-Functionen des doppelten bzhw. des halben, Winkels und des sog. separirten Tangentensatzes entwickelt hat, woraus sich ergab, dass φ dem Complement des Resultantenwinkels als der sog. Compensationswinkel entspricht.

Es hat aber sos φ die Bedeutung des dem Kräftesystem zukommenden Wirkungsgrades, bzhw. der bei Wechselmaschinen auftretenden sogenannten Leitungsfactoren.

Auch diese Gleichung ist hier nicht weiter zu interpretiren.

Schwartze.

Reinhold Hoppe †.

Während der Drucklegung dieses Heftes verschied nach nur kurzer Krankheit im vierundachtzigsten Lebensjahre am 7. Juni 1900 Professor Dr. Reinhold Hoppe, Redacteur des Archivs der Mathematik und Physik seit 1873, wo er der Nachfolger des Gründers desselben J. A. Grunert wurde. Das universelle mathematische, philosophische und sprachliche Wissen, das den Verstorbenen vor den meisten seiner Fachgenossen auszeichnete, hat er in den 27 Jahren, während deren ihm die Leitung des Archivs oblag, voll und ganz in den Dienst dieser Thätigkeit gestellt, die den Hauptinhalt der letzten Periode seines Lebens bildete. Eine ausführliche Schilderung seines Lebensganges und seiner Persönlichkeit, sowie eine Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen soll den nächsten Band des Archivs eröffnen.

Der gegenwärtige Band schliesst die zweite Reihe des Archivs. Mit dem ersten Bande der dritten Reihe geht das Archiv in den Verlag von B. G. Teubner in Leipzig über. Die Redactionsgeschäfte werden künftig die Herren Geheimer Regierungsrat Professor Dr. Lampe in Berlin, Professor Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr. und Oberlehrer Dr. E. Jahnke in Berlin gemeinschaftlich führen.



XXXIII.

Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique.

Par

V. Sickstel.

(Arch. d. Math. u. Phys. 2. Reihe. T. XV.)

(Fin.)

Théorème 33. L'aire du triangle sphérique est égale au produit de $\frac{1}{4}$ de la surface sphérique par le rapport de l'excès de la somme de ses angles sur $2d$ à $2d$ (fig. 30).

Nous citons avec quelque supplément la démonstration connue dans la science.

Définissons d'abord l'aire d'un triangle isocèle dont l'angle au sommet est moindre que $2d$.

Soit $\triangle\, ABC$ isocèle et $AB = AC$; soit en outre $\triangle\, ABC$ moinder que $\frac{1}{8}$ de la surface sphérique. En prolongeant tous les côtés de ce triangle jusqu' à la seconde intersection (Dans les points M, D et P), nous trouverons que la ligne BC dans toute son étendue limite la demi-sphère qui se compose du fuseau $CBMA$, du $\triangle ACP$ et du $\triangle\, AMP$.

Mais $\triangle\, ACP$ = au fuseau $BCPA - \triangle\, ABC$,

$\triangle\, AMP$ = au fuseau $AMDP - \triangle\, DMP$

ou $\triangle\, AMP$ = au fuseau $ABDC - \triangle\, ABC$

car les fuseaux opposés sont égaux entre eux et le $\triangle\, DMP$ et le

$\triangle ABC$ sont égaux, comme triangles isocèles ayant des angles égaux aux sommets (A et D) et deux côtés égaux*) qui comprennent ces angles, ainsi ils sont coïncidents dans le cas de la superposition.

En marquant la surface de la sphère entière par S et les aires des fuseaux déterminées par les angles du triangle donné, par Q_1, Q_2 et Q_3, nous obtiendrons:

$$\tfrac{1}{2}S = Q_1 + Q_2 + Q_3 - 2\triangle ABC$$

d'où

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2 + Q_3 - \tfrac{1}{2}S) \quad \ldots\ldots\ldots (I)$$

D'après le théorème 5 qui se rapporte à la circonference (page 420) il est facile de déduire que l'aire de chaque fuseau est égale au produit de la surface sphérique par le rapport de son angle à $4d$ et par suite l'égalité (I) prendra la forme suivante:

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\left(\frac{SA}{4d} + \frac{SB}{4d} + \frac{SC}{4d} - \tfrac{1}{2}S\right) = \tfrac{1}{4}S\left(\frac{A+B+C}{2d} - 1\right)$$

ou bien

$$\triangle_1 ABC = \tfrac{1}{4}S\left(\frac{A+B+C-2d}{2\partial}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

En marquant par $\triangle$ l'aire du triangle supplémentaire au triangle donné jusqu' à la surface sphérique entière, et par A', B' et C' les angles du triangle $\triangle'$, nous trouverons une formule pareille à la précédente.

$$\triangle' = \tfrac{1}{4}s \cdot \left(\frac{A'+B'+C'-2d}{2d}\right)$$

Pour démontrer le théorème considéré dans le cas où le triangle donné n'est pas isocèle, élevons aux côtés de ce triangle — sur leurs milieux = les perpendiculaires XO et YO (fig. 31 et 32), et, joignant le point de leur intersection aux sommets du triangle donné, nous obtiendrons trois triangles isocèles, dont la somme algébrique est égale au triangle donné.

La considération des figures amènera à la formule (II).

En effet:

$$\triangle ABC = \triangle AOB + \triangle BOC \pm \triangle AOC$$

Sur les deux figures:

---

*) $AB = \tfrac{1}{2} - BD$, $DP = \tfrac{1}{2} - BD$, par conséquent $AB = DP$; de la même manière nous trouverons que AC est aussi $= DM$.

$$\triangle AOB = \tfrac{1}{4}S\left(\frac{a_1+b_1+O_1}{2d}-1\right); \quad \triangle BOC = \tfrac{1}{4}s\left(\frac{b_2+c_1+O_1}{2d}-1\right)$$

Sur la figure 31:

$$\triangle AOC = \tfrac{1}{4}S\left(\frac{a_2+c_2+O_3}{2d_1}-1\right)$$

Sur la figure 32:

$$\triangle AOC = \tfrac{1}{4}S\left(\frac{a_2+c_2+(O_1+O_2)}{2d}-1\right)$$

D'après cela sur la figure 31:

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{4}S\ .\left(\frac{A+B+C+4d}{2d}-3\right)$$

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{4}S\left(\frac{A+B+C-2d}{2d}\right)$$

Sur la figure 32:

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{4}S\left(\frac{(a_1-a_2)+(c_1-c_2)+(b_1+b_2)}{2d}-1\right)$$

ou bien:

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{4}S\left(\frac{A+B+C-2d}{2d}\right)$$

C'est ainsi que trouve sa raison d'être le théorème 33 pour chaque triangle pris dans les conditions ci-dessus.

Prouvons maintenant la vérité du théorème 33 dans les cas où le triangle est plus grand que $\frac{1}{2}$ de la surface sphérique et où l'un de ses angles est plus grand que $2d$.

1) Soit le $\triangle ABMC$ (fig. 33) plus grand que $\frac{1}{2}$ de la surface sphérique. En menant par B et C une ligne géométrique entière nous trouverons:

$$\triangle ABMC = \triangle ABC + \tfrac{1}{2}S = \tfrac{1}{4}S\left(\frac{A+B_1+C_1-2d}{2d}\right)+\tfrac{1}{2}S$$

où B_1 et C_1 sont les angles du $\triangle ABC$.

Ou bien

$$\triangle ABMC = \tfrac{1}{4}S\left[\frac{A+(2d+B_1)+(2d+c_1)-2d}{2d}\right]$$

ou bien

$$\triangle ABMC = \tfrac{1}{4} S\left[\frac{A+B+C-2d}{2d}\right]$$

où A, B et C sont les angles du triangle donné $ABMC$.

2) Prenons $\triangle PNCM$ (fig. 33) qui est moindre que $\frac{1}{2}S$ et dans lequel $\angle P > 2d$.

$\triangle NPM$ est supplémentaire au triangle donné jusqu' à $\frac{1}{2}S$ et de là chacun de ses angles est moindre que $2d$.

Alors

$$\triangle PNCM = \tfrac{1}{2}S - \triangle NPM = \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{4}S\left(\frac{P_1+N_1+M_1-2d}{2d}\right)$$

où les angles P_1, N_1 et M_1 sont les angles des triangle supplémentaire NPM.

Ensuite

$$\triangle PNCM = \tfrac{1}{4}S\left\{\frac{(4d-P_1)+(2d-N_1)+(2d-M_1)-2d}{2d}\right\}$$

ou bien:

$$\triangle PNCM = \tfrac{1}{4}S\left\{\frac{P+N+M-2d}{2d}\right\}$$

où P, N et M — sont les angles du triangle donné.

Ainsi le théorème 33 est vrai pour chaque triangle.

L'excès de la somme des angles du triangle sur $2d$ nous appellerons, comme il est admis, excès sphérique.

La formule II vraie pour chaque triangle, nous amène aux conclusions suivantes.

1) La somme des angles de chaque triangle sphérique est plus grande que $2d$.

2) La somme des angles du triangle sphérique est toujours plus petite que $10d$: en l'admettant égale à $10d$. nous trouverons l'aire du triangle égale à S, ce qui est impossible.

3) La somme des angles du triangle sphérique peut être plus grande ou plus petite que $6d$, mais ne peut pas être égale à $6d$, car, dans le dernier cas, l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}S$, et cela ne peut pas être admis d'après ce qui suit:

En admettant que le $\triangle ABC$ (fig. 31) est équivalent à la $\frac{1}{2}$ de la surface sphérique, nous trouverons au moyen de la superposition

de ces figures que le $\triangle DBC$ est équivalent au fuseau $AB'DC'$. Mais $BD < ABD$, par conséquent: $BD < AB'D$.

Ensuite: ABC est plus petite qu' une ligne géométrique entière et $AD = \frac{1}{2}$, conséquemment: $DC < AD$. C'est pourquoi, prenant

$$DB' = BD \quad \text{et} \quad DC' = DC$$

nous trouverons en joignant les points C' et B' que le $\triangle BDC$ et le $\triangle B'D'C'$ peuvent être amenés à la coïncidence et conséquemment le $\triangle BDC = \triangle B'C'D'$ = au fuseau $AB'DC'$, ce qui est absurde.

4) Les triangles sont équivalents quand les sommes de leurs angles sont égales.

5) En divisant les deux parties de l'égalité (II) par S nous obtiendrons:

$$\frac{\triangle}{S} = \frac{A + B + C - 2d}{8d}$$

où le $\triangle ABC$ est marqué par le signe $\triangle$.

D'ici nous voyons que si l'aire du triangle est infiniment petite, $(A + B + C)$ diffère infiniment peu de $2d$. —

6) L'aire du triangle est directement proportionnelle à l'excès sphérique, et par suite, le rapport des aires de deux triangles est égal au rapport de leurs excès sphériques.

7) Si dans un polygone dont le nombre des côtés est égal à n nous menons toutes les diagonales d'un sommet, le polygone sera divisé en triangles dont le nombre sera $(n - 2)$. En calculant les aires de ces triangles et en faisant la somme des nombres obtenus nous trouverons l'aire du polygone:

$$P = \frac{1}{4} S \left(\frac{\Sigma - 2d(n-2)}{2d} \right)$$

où Σ est la somme des angles du polygone.

8) Prenons un triangle dont chaque angle est moindre que $2d$ et par conséquent chaque côté est moindre que $\frac{1}{2}$, décrivons du sommet de ce triangle les arcs d'un rayon égal à $\frac{1}{4}$. Les arcs formeront en se coupant un triangle qu'il est admis à nommer **triangle polaire** du triangle donné, tandis que les sommets du triangle donné s'appellent pôles des côtés du nouveau triangle dont ils représentaient les centres. Il est évident que les sommets du triangle polaire sont les pôles des côtés du triangle donné; c'est

pourquoi le triangle donné et celui qui lui est polaire s'appellent **réciproquement polaires.**

Nous savons aussi que dans les triangles reciproquement polaires chaque angle de l'un avec un côté de l'autre décrit du sommet de cet angle, donnent la somme de 180°.

En marquant les angles et les côtés du triangle donné par A. B, C, a b, c et les angles et les côtés du triangle qui lui est polaire par A', B', C', a', b', c', nous trouverons:

1) $A'+B'+C'+a+b+c=6d$ et

2) $A+B+C+a'+b'+c'=6d$

En supposant maintenant a, b et c infiniments petits, nous aurons

$$\lim(A'+B'+C')=6\,d$$

En marquant l'aire du triangle polaire du triangle donné par $\triangle'$, nous avons encore:

$$\triangle'=\frac{S}{4}\left(\frac{A'+B'+C'-2d}{2d}\right),\quad \text{d'où}\quad \lim\triangle'=\frac{s}{2}$$

Mais $\frac{1}{2}S$ ne peut être admise que comme l'aire d'un triangle dont chaque angle est égal à $2d$ et la somme des côtés égale à $4d$. C'est pourquoi dans le cas donné

$$a'+b'+c'=4d$$

et par conséquent

$$A+B+C=2d$$

Donc,

si les côtés du triangle sont infiniment petits, la somme de ses angles diffère infiniment peu de $2d$.

Un pareil triangle peut être évidemment pris pour celui d'Euclide.

L'aire de ce triangle est infiniment petite.

En prenant en considération qu' une ligne géometrique d'une longueur infiniment petite peut être complètement définie par deux points quelconques pris sur elles on doit conclure que la géométrie des figures infiniment petites sur la surface sphérique est la géométrie d'Euclide.

Il en suit encore que la trigonométrie rectiligne peut être appliquée avec succès sur la surface sphérique aux figures infiniment petites.

9) Si dans un carré deux côtés opposés sont égaux entre eux et perpendiculaires au troisième qui est infiniment petit, les deux autres angles de ce carré sont égaux entre eux, diffèrent infiniment peu des angles droits, et l'aire du carré est infiniment petite (fig. 35).

Soit dans le carré

$$BMNC - \angle B = \angle C = d, \quad BM = CN \text{ et } BC =$$

l'infinitésime.

En prolongeant les côtés BM et CN jusqu' à l'intersection, nous obtiendrons $\triangle ABC$, dans lequel les angles B et C sont droits et $\angle A =$ l'infiniment petit.

Alors:

$$\triangle ABC = \frac{S}{4} \cdot \frac{A}{2d} = \frac{S}{8d} \cdot A = \text{l'infiniment petit.}$$

D'ici le carré $BMNC =$ l'infiniment petit,

Ensuite: le carré

$$BMNC = \frac{S}{4}\left(\frac{\Sigma - 4d}{2d}\right) = \text{l'infiniment petit.}$$

conséquemment:

$$B + C + M + N - 4d = \text{l'infiniment petit}$$

ou bien:

$$M + N - 2d = \text{l'infiniment petit.}$$

Mais les angles M et N sont égaux entre eux, comme angles supplémentaires jusqu' à $2d$ aux angles à la base dans le $\triangle$ isocèle AMN, et ainsi nous obtenons de la dernière égalité:

$$2M - 2d = 2N - 2d = \text{l'ininfiniment petit}$$

ou bien

$$M - d = N - d = \text{l'infiniment petit.}$$

L'égalité des triangles.

Nous avons déjà eu recours aux deux cas suivants de l'égalité des triangles;

Théorème 34. 1) Les triangles sont égaux, quand ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, un angle égal compris entre ces côtés, et les éléments donnés sont disposés de la même manière dans les deux triangles.

Théorème 35. Les triangles sont égaux quand ils ont un côté égal et deux angles qui lui sont adjacents égaux chacun à chacun, et la disposition des éléments donnés est la même dans les deux triangles.

L'égalité des triangles a été prouvée dans ces cas au moyen de la superposition, en faisant glisser l'un d'eux sur la surface. Nous avons eu recours au premier de ces cas en démontrant, par exemple, le théorème 13 et au second, pour démontrer le théorème 20.

Démontrons encore les deux cas suivants de l'égalité des triangles:

Théorème 36. Les triangles sont égaux lorsque les trois côtés sont égaux chacun à chacun et la disposition des éléments donnés est la même dans les deux triangles. (fig. 36).

Il est donné:

$$\triangle ABC \text{ et } \triangle A'B'C'; \quad AB = A'B'; \quad BC = B'C': \quad AC = A'C'$$

Remarque. Il est évident qu'on ne peut démontrer ce théorème que dans le cas où la somme des aires des triangles donnés est plus grande ou plus petite que la surface sphérique entière.

La démonstration que nous donne Euclide pour les triangles rectilignes dans les mêmes conditions, peut être appliquée avec succès sur la surface sphérique.

Répétons cette démonstration.

En supposant que $\angle A \gtrless \angle A'$ nous trouverons que $\triangle A'B'C'$ tant superposé sur $\triangle ABC$ ne peut prendre qu'une des positions suivantes désavantageuses pour notre but: 1) ABC' et 2) ABC''.

Dans le premier cas:

$$\angle AC'C = \angle ACC' \text{ et } \angle BC'C = \angle BCC'$$

Mais ces égalités ne peuvent pas exister ensemble: la seconde s'obtient de la première en augmentant une partie de la première égalité et en diminuant l'autre; mais comme les égalités existent par suite de la supposition, cette supposition est absurde.

Dans le second cas:

$$\angle AC''C = \angle ACC''$$

et par conséquent

$$\angle MC''C = \angle NCC''$$

mais en outre

$$\angle BC''C = \angle BCC''$$

Les deux dernières égalités ne peuvent non plus exister en même temps, et par conséquent la supposition est de nouveau absurde.

On voit d'après cela que $\angle A$ est nécessairement égal à $\angle A'$, donc les triangles sont égaux (théorème 34.)

Il faut ajouter que $\triangle A'B'C'$ ne peut occuper étant superposé la position AC, B (fig. 37) parce qu'alors il viendrait que les triangles BCC_1 et ACC_1 sont isocèles et par conséquent les lignes géométriques AO et BO qui divisent les bases de ces triangles en deux parties égales et qui partent des sommets opposés aux bases formeraient une ligne géométrique non interrompue, d'où nous conclurions que

$$AOB = AB = \tfrac{1}{2},$$

ce qui est impossible.

Théorème 37. (*Le 4ème cas de l'égalité des triangles*)

Les triangles sont égaux lorsque tous les angles de l'un sont égaux chacun à chacun aux angles de l'autre et la disposition des éléments donnés est la même dans les deux triangles (fig. 38).

Il est donné:

$\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$; $\angle A = \angle A'$; $B = \angle B'$; $\angle C = \angle C'$

En superposant les triangles donnés de manière que les angles égaux, par exemple A et A', coïncident et que $A'B'$ tombe sur AB, nous trouverons, en ne prenant en considération que les suppositions désavantageuses, que $A'B' \gtrless AB$ et en admettant par exemple la dernière, nous devons conclure que $B'C'$ prendra la position MN, c'est à dire coupera le côté BC; car dans le cas contraire $\triangle ABC$ est plus grand que $\triangle A'B'C'$, tandis que d'après le théorème 33, ces triangles sont équivalents. Si donc $B'C'$ a pris la position MN, les angles AMO et ACO extérieurs pour les triangles MOB et NOC sont égaux chacun à chacun aux angles intérieurs ABO et ANO, qui ne leur sont pas adjacents et de là les lignes géométriques OP et OQ qui divisent les angles au sommet O en deux parties égales et qui par conséquent forment une ligne géométrique non interrompue sont égales chacune à $\frac{1}{4}$ (théorème 13). D'ici nous voyons que la ligne

$$POQ = \tfrac{1}{2},$$

par conséquent

$$\angle A = 2d.$$

Cette conclusion ne peut pas être admise et montre que

$$AB = A'B'$$

et par suite, d'après le théorème 35)

$$\triangle ABC = A'B'C'$$

Si les triangles ont des parties égales indiquées dans les conditions des théorèmes 34, 35, 36 et 37, mais la disposition de ces parties dans les triangles n'est pas la même bien que la superposition des triangles soit impossible, il n'est pas difficile de démontrer que les autres parties des triangles sont égales chacune à chacune.

Théorème 38. Si les triangles ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun, mais dont la disposition n'est pas la même les autres éléments des triangles sont égaux chacun à chacun (fig. 39).

Il est donné:

$\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$; $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $\angle B = \angle B'$

Dans le cas donné on peut transporter un triangle à la suite de l'autre comme il est montré sur la figure.

Alors en joignant A à A'', nous trouverons que AA'' est perpendiculaire à BC et se divise par elle en deux parties égales, il en suit donc que

$$AC = A''C = A'C', \quad \angle ACB = \angle A'C'B' \text{ et } \angle A' = \angle A$$

Théorème 39. Si les triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, mais qui ne sont pas semblablement disposés, les parties des triangles sont respectivement égales (fig. 40).

Il est donné:

$\triangle ABC$ et $A'B'C'$; $BC = B'C'$; $\angle B = \angle B'$; $\angle C = \angle C'$,

Dans le cas donné on peut transporter $\triangle A'B'C'$ à la suite du $\triangle ABC$ comme il est montré sur la figure. Joignons le sommet A à A' et supposant que AA'' n'est pas perpendiculaire à BC menons du point A' la perpendiculaire à BC. Cela nous donnera d'après le théorème 18 une absurdité et de là nous devons conclure que AA'' est perpendiculaire à BC. Il en suit que

$$AB = A''B = A'B', \quad AC = A''C = A'C' \text{ et } \angle A = A'' \angle A'.$$

Théorème 40. Dans les triangles, qui ont les angles égaux chacu à chacun bien que ces derniers ne soient pas semblablement disposés les autres éléments soient égaux chacun à chacun (fig. 41).

Il est donné: $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$, $\angle A = A'$, $\angle B = B'$, $\angle C = C'$

En prolongeant AC et BC — côtés du $\triangle ABC$. on peut, dans le cas donné, faire prendre au $\triangle A'B'C'$ la position $A''B''C$, avec cela: $\angle B'' = \angle B'$ $\angle A'' = \angle A'$ et les côtés de l'angle $A''CB''$ sont les prolongements des côtés de l'angle BCA.

Comme les triangles donnés, d'après le théorème 33, ont les aires égales, en menant AA'' et BB'' nous trouverons:

1) $\triangle AA''B''$ est équivalent au $\triangle A''BA$ et 2) $\triangle AB''B$ est équivalent au $\triangle A''BB''$.

Nous bornant â l'une de ces conclusions, par exemple à la première, nous devons bien admettre que $\angle a = \angle a_1$ et par conséquent $AC = A''C = A'C'$. Maintenant, d'après le théorème 39, nous devons conclure que

$$BC = B'C' \quad \text{et} \quad AC = A'C'.$$

De même que dans la géométrie d'Euclide nous déduirons l'égalité des triangles rectangles dans lesquels la disposition des éléments donnés est la même dans les cas suivants:

1) Lorsque les cathètes sont égales chacune à chacune dans les deux triangles.

2) Lorsque la cathète et l'angle qui lui est adjacent sont égaux dans les deux triangles.

3) Lorsque l'hypoténuse et la cathète sont égales chacune à chacune dans les deux triangles.

4) Lorsque l'hypoténuse et un angle aigu sont égaux dans les deux triangles.

5) Si dans les deux triangles l'hypoténuse est plus grande ou plus petite que $\frac{1}{2}$, les triangles sont égaux lorsque une cathète et l'angle opposé à cette cathète sont égaux.

Il est facile aussi de montrer que dans les cinq cas indiqués, les éléments homologues des triangles seront égaux quoique la disposition de ces éléments ne soit pas la même.

Formules fondamentales de la trigonométrie sphérique.

Nous savons que toutes les propriétés des fonctions trigonométriques peuvent être trouvées tout à fait indépendamment de la représentation géométrique de ces fonctions; c'est pourquoi la trigonométrie sphérique n'a pas besoin d'une pareille représentation des fonctions trigonométriques pour prendre naissance et se développer.

En effet prenant x et y — arcs quelconques de grands cercles nous pouvons admettre:

$$\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.5} - \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} \mp \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} \pm \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{x^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)} \mp \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} \pm \ldots \ldots \quad (2)$$

$$y = \sin y + \frac{1}{1.2.3} \cdot \sin^3 y + \frac{(1.3)^2}{1.2.3.4.5} \cdot \sin^5 y + \ldots \quad (3)$$

En supposant dans la dernière formule $\sin y = 1$, nous trouverons le nombre y avec le degré de précision désirable et nous conclurons que la valeur obtenu désigne le nombre des unités mesurant le $\frac{1}{4}$ d'une ligne géomètrique entière au moyen desquelles doit être mesuré tout arc x pour le calcul de ses fonctions trigonométriques d'après les formules (1) et (2).

Comme les formules (1), (2), (3), ainsi que la formule

$$C^x - 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

où C est la base du système des logarithmes de Neper, donnent les moyens de déduire toutes les propriétés des fonctions trigonométriques, nous aurons recours aux dernières propriétés comme à des propriétés prouvées.

Théorème 1. Si l'hypoténuse et la cathète d'un triangle rectangle obtiennent des accroissements infiniment petits et l'angle opposé à cette cathète ne change pas, la lim. du rapport de l'accroissement de la cathète à l'accroissement de l'hypoténuse est toujours égale au cosinus de l'angle compris entre les côtés considérés du triangle. (fig. 42.)

Soit dans le $\triangle BAM \angle M = d$; l'hypotènuse $BM = a$, la cathète $AM = b$.

Attribuons à l'hypoténuse BM l'accroissement MM' — infiniment petit — et menant du point M' la droite $M'D$, perpendiculaire à BA, prenons $DN = AM$. En joignant le point M au point N et en prolongeant AM et DN jusqu' à l'intersection nous obtiendrons le $\triangle MON$, triangle isocèle, où $\angle OMN = \angle ONM$. D'ici nous

concluons que dans le $\triangle\ MNM'$ l'angle N est plus grand que $\angle\ M'MN$ et par conséquent $MN < MM'$. Ensuite nous trouvons que $MM' + M'N > MN$, mais comme MM' est infiniment petite, $M'N$ ainsi que MN doivent être conséquemment aussi infiniment petites.

Supposant maintenant qu' une longueur quelconque AC, qui est une portion de AD, est l'infiniment petit, joignons le point O au point C. Alors MZ = l'infiniment petit, donc en prenant $CK = AM$, nous trouverons que KZ est l'infiniment petit, d'après le raisonnement précédent. En outre, comme maintenant AC est aussi égal à l'infiniment petit, le $\triangle\ MZK$ peut être admis comme triangle rectangle d'Euclide (corollaire 9 du théorème 33) où l'angle K est droit.

Dans ce triangle MZ et ZK sont des accroissements infiniment petits de l'hypoténuse a et de la cathète b, et l'angle Z diffère infiniment peu de l'angle M du triangle donné.

En marquant MZ et ZK par α et β nous aurons évidemment

$$\cos L = \frac{\beta}{\alpha} \text{ et } \cos M = \lim \cos L = \lim \frac{\beta}{\alpha}$$

ce qui prouve que le théorème est vrai.

Théorème 2. Dans un triangle rectangle le rapport de la tg. de la cathète à la tg. de l'hypoténuse est toujours égal au cos de l'angle compris entre ces côtés.

Pour démontrer ce théorème considérons d'abord le rapport

$$\frac{\sin(b+\beta)}{\sin(a+\alpha)}$$

où a et b sont des arcs constants différent de $\frac{1}{4}$ et α et β sont des infiniment petits du même ordre. Alors:

$$\frac{\sin(b+\beta)}{\sin(a+\alpha)} = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \left\{ \frac{\cos\beta + \operatorname{ctg} b \,.\, \sin\beta}{\cos\alpha + \operatorname{ctg} a \,.\, \sin\alpha} \right\}$$

Décomposant ici $\sin\alpha$, $\cos\alpha \sin\beta$, $\cos\beta$ en rangs infinis et en négligeant les infiniment petits du second ordre et d'ordres supérieurs nous trouverons:

$$\frac{\sin(b+\beta)}{\sin(a+\alpha)} = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \left(\frac{1+\beta \operatorname{ctg} b}{1+\alpha \operatorname{ctg} a}\right) = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \left(\frac{1+\beta \operatorname{ctg} b - \alpha \operatorname{ctg} a}{1+\alpha \operatorname{ctg} a}\right)$$

Ensuite finalement nous obtiendrons l'identité:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sin(b+\beta)}{\sin(a+\alpha)}=\frac{\sin b}{\sin a}+E,\quad \text{où}\\ &E=\frac{\sin b}{\sin a}\cdot\left(\frac{\beta\operatorname{ctg} b-\alpha\operatorname{ctg} a}{1+\alpha\operatorname{ctg} a}\right)=\text{l'infiniment petit}\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; (\mathrm{I})$$

Or comme nous savons que dans les conditions données par rapport à a, b, α et β la différence

$$\frac{\sin(b+\beta)}{\sin(a+\alpha)}-\frac{\sin a}{\sin b}$$

est toujours une quantité infiniment petite, il faut conclure que pour le triangle rectangle, (fig. 42), qui a b et a pour cathète et hypoténuse et β et α pour leurs accroissements infiniment petits il existe toujours l'équation:

$$\frac{\sin(b+\beta)}{\sin(a+\alpha)}=\frac{\sin b}{\sin a}+E_1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\mathrm{II})$$

où E_1 est une quantité infiniment petite qui diffère par un multiplicateur quelconque φ de l'infiniment petit E qui entre dans l'identité (I).

Ainsi $E_1=E\,.\,\varphi$ ou la lim. φ diffère nécessairement d'une unité. De l'équation (II) nous trouvons:

$$\frac{2\cos\left(b+\frac{\beta}{2}\right)\,.\,\sin\frac{\beta}{2}-E_1\,.\,\sin a}{2\cos\left(a+\frac{\alpha}{2}\right)\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin b}{\sin a}+E_1$$

ou

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\cos\left(b+\frac{\beta}{2}\right)\,.\,\dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}}-\dfrac{E_1}{\beta}\,.\,\sin a}{\cos\left(a+\frac{\alpha}{2}\right)\,.\,\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\sin b}{\sin a}+E_1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\mathrm{III})$$

Et prenant en considération la signification de E (égalité I) nous obtiendrons:

$$\frac{E_1\,.\,\sin a}{\beta}=\frac{E\varphi}{\beta}\,.\,\sin a=\varphi\,.\,\sin b\,.\,\left(\frac{\operatorname{ctg} b-\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{ctg} a}{1+\alpha\operatorname{ctg} a}\right)$$

ou

$$\frac{E_1}{\beta} \cdot \sin a = \frac{\varphi \cos b - \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{ctg} a \cdot \sin b \cdot \varphi}{1 + \alpha \cdot \operatorname{ctg} a}$$

Par suite l'équation (III) prendra la forme suivante:

$$\frac{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \cos\left(b + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}} - \frac{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \cos b \cdot \varphi - \operatorname{ctg} a \cdot \sin b \cdot \varphi}{1 + \alpha \operatorname{ctg} a}}{\cos\left(a + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{\sin b}{\sin a} + E_1$$

En passant maintenant aux limites et en faisant ensuite la division dans la première partie de cette équation, nous trouverons:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\cos b}{\cos a} - \lim \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\cos b}{\cos a} \cdot \lim \varphi + \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \lim \varphi = \frac{\sin b}{\sin a}$$

ou

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\cos b}{\cos a} \cdot (1 - \lim \varphi) = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot (1 - \lim \varphi)$$

Or, sachant que $\lim \varphi$ diffère d'une unité, nous trouverons:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$$

ou finalement

$$\cos M = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$$

Théorème 3. Dans tout triangle rectangle le rapport de la tg. d'une cathète au sin. de l'autre est égal à la tg. de l'angle opposé à la première cathète (fig. 43.)

Dans la figure 43 nous avons représenté deux dessins:

Sur le premier, dans le $\triangle$ *BAM*, l'hypoténuse (*BM*), ainsi que la cathète (*AM*), sont moindres que $\frac{1}{4}$; et sur le second les mêmes côtés sont plus grands que $\frac{1}{4}$. Complétons sur le premier dessin *BM* et *AM* jusqu' à $\frac{1}{4}$ en les prolongeant ce qui fera

$$BM + MP = BP = \frac{1}{4} \text{ et } AM + MN = AN = \frac{1}{4}$$

Sur le second dessin *MP* et *MN* qui servent de compléments à *BM* et *AM* jusqu' à $\frac{1}{4}$ seront négatives.

En joignant ensuite les points P et N nous obtiendrons dans les deux cas le triangle rectangle $\triangle MPN$, pour lequel

$$\frac{\operatorname{tg} PN}{\operatorname{tg} NM} = \cos MNP = \sin ANB = \sin AB$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg}\{\pm(90^0 - B)\}}{\operatorname{tg}\{\pm(90^0 - AM\}} = \sin AB = \frac{\operatorname{tg} AM}{\operatorname{tg} B}$$

ou bien

$$\frac{\operatorname{tg} b}{\sin m} = \operatorname{tg} B,$$

ce qu'il failait démontrer.

Théorème 4. Dans tout triangle rectangle le produit des cos. des cathètes est égal au cos. de l'hypoténuse (fig. 43).

Du triangle MPN . . . $\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} PN}{\sin PM} = \frac{\operatorname{tg}\{\pm(90^0 - B)\}}{\sin\{\pm(90^0 - BM)\}}$

$$= \frac{\operatorname{ctg} B}{\cos a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Du $\triangle BAM$ . . . $\begin{cases} \operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} m}{\sin b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2) \\ \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3) \end{cases}$

De (1) et de (2) . . $\frac{\operatorname{tg} m}{\sin b} = \frac{\operatorname{ctg} B}{\cos a}$ . . . . (4)

De (3) et de (4) . . . $\frac{\sin m}{\cos m \cdot \cos b} \cdot \frac{1}{\sin m} = \frac{1}{\cos a}$

ou $\cos a = \cos b \cdot \cos m.$

En appliquant la formule trouvée au $\triangle MPN$, nous trouverons

$$\cos MN = \cos MP \cdot \cos NP$$

ou $\cos(90^0 - b) = \cos(90^0 - a) \cdot \cos(90^0 - B)$

ou bien $\sin b = \sin a \sin B$, d'où

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \text{ c'est à dire que:}$$

Théorème 5. Dans tout triangle rectangle le rapport du sin. de la cathète au sin. de l'hypoténuse est égal au sin. de l'angle opposé à la cathète.

Théorème 6. Dans tout triangle les sin. des côtés sont proportionnels aux sin. des angles opposés à ces côtés.

Nous ne citons pas la démonstration parce qu'elle est tout à fait anologique avec celle de la trigonométrie plane pour la déduction du théorème: les côtés du triangle sont proportionuels aux sin. des angles exposés.

Enfin déduisons encore une formule qui montre le rapport entre les côtés de tout triangle avec un de ses angles.

Théorème 7. Dans tout $\triangle ABM$:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos m + \sin b \,.\, \sin m \,.\, \cos A \quad \text{(fig. 44)}$$

Du $\triangle BOM$ . . . $\cos m_1 \,.\, \cos h = \cos a$ en supposant que MO égale à h est perpendiculaire à AB et divise cette dernière en portions: $BO = m_1$ et $AO = m_2$.

Du $\triangle AOM$ . . . $\cos h = \cos b : \cos m_2$,

donc $\cos a = \cos m_1 \,.\, \dfrac{\cos b}{\cos m_2}$

ou

$$\cos a = \cos (m - m_2) \,.\, \frac{\cos b}{\cos m_2} = \cos b \,.\, \cos m + \sin m \,.\, \frac{\sin m_2}{\cos m_2} \cdot \cos b,$$

ou bien

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos m + \sin m \,.\, \operatorname{tg} m_2 : \cos b;$$

mais, d'après le théorème 2)

$$\operatorname{tg} m_2 = \operatorname{tg} b \,.\, \cos A,$$

par conséquent:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos m + \sin b \,.\, \sin m \,.\, \cos A.$$

Le 12 mars 1899. Orenbourg.

XXXIV.

Allgemein-pythagoreische Zahlen.

Von

Prof. Dr. **Züge** in Wilhelmshaven.

Sämtliche pythagoreischen Zahlentripel, d. h. je 3 ganze, rationale Zahlen, die der Gleichung

$$z^2 = x^2 + y^2$$

genügen, sind bekanntlich enthalten in der identischen Gleichung

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

wenn für m und n beliebige ganze Zahlen gesetzt werden.

Hier soll für ein schiefwinkliges Dreieck mit den Seiten z, y, x und dem der Seite z gegenüber liegenden Winkel α, für welches der allgemeine pythagoreische Lehrsatz, also die Gleichung gilt:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha \qquad (1)$$

eine allgemeine Formel gesucht werden, aus der sämtliche ganzzahligen Tripel abgeleitet werden können, sofern nur $\cos\alpha$ eine rationale Zahl ist *).

---

*) In Zeitschriften und Programmen habe ich eine allgemeine Lösung der Gleichung nicht gefunden.

Erwähnt seien die Aufsätze von Worpitzky: Ueber pythagoreische oder rationale Dreiecke, Hoffmann'sche Zeitschrift Jahrgang 1886; und von Schlömilch: Ueber rationale Dreiecke und Vierecke, Hoffmann'sche Zeitschrift Jahrgang 1893. Beide Aufsätze behandeln die Zusammensetzung schiefwinkliger Dreiecke bzhw. Vierecke mit rationalen Seiten aus rechtwinkligen Dreiecken.

I.

Die Gleichung (1)

kann umgeformt werden in folgende:

$$z^2 = (x - y\cos\alpha)^2 + y^2\sin^2\alpha \tag{2}$$

wie auch leicht eine geometrische Betrachtung lehrt.

Es kommt also auf die Lösung einer Gleichung an von der Form

$$z^2 = u^2 + \varrho v^2 \tag{3}$$

mit der wir uns zunächst beschäftigen wollen.

Wir setzen voraus, dass in dieser Gleichung ϱ eine ganze positive Zahl ist, und formen sie in folgender Weise um:

$$\frac{(z+u)(z-u)}{\varrho} = v^2$$

Sind z, u und v ganze Zahlen, welche der Gleichung genügen, so muss offenbar, wenn ϱ als Product zweier ganzen Zahlen ϱ_1 und ϱ_2 angesehen wird, von denen die eine auch 1 sein kann, ein Factor in $z+u$, der andere in $z-u$ aufgehen. Man kann daher schreiben:

$$\frac{z+u}{\varrho_1} \cdot \frac{z-u}{\varrho_2} = v^2$$

Nun muss ferner, damit die Gleichung erfüllt wird, jeder der beiden Factoren der linken Seite aus einer Quadratzahl und einem auch dem anderen Factor zukommenden Multiplicator λ bestehen, wobei wiederum nicht ausgeschlossen ist, dass λ oder eine Quadratzahl gleich 1 ist.

Wir setzen daher

$$\frac{z+u}{\varrho_1} = \lambda \cdot m^2$$

$$\frac{z-u}{\varrho_2} = \lambda \cdot n^2$$

Nachtrag. Nach Beendigung dieser Arbeit fand ich eine allgemeine Lösung der Gleichung in der Programmarbeit von Schwering: Geometrische Aufgaben mit rationaler Lösung (Gymnasium zu Düren 1898). Mein Verfahren ist von dem Schwerings wesentlich verschieden, auch die Endformeln treten in anderer Gestalt auf.

wobei m und n ganze Zahlen bedeuten, und erhalten hieraus

$$z = \frac{\lambda(\varrho_1 m^2 + \varrho_2 n^2)}{2}$$

$$u = \frac{\lambda(\varrho_1 m^2 - \varrho_2 n^2)}{2}$$

$$v = \lambda \, . \, m \, . \, n$$

Da aus einem Zahlentripel, welches der Gleichung (3) genügt, ein anderes abgeleitet werden kann durch Multiplication oder Division des ganzen Tripels mit derselben Zahl, so ergeben sich aus obigen Werten, wenn man durch λ dividirt, mit 2 multiplicirt, folgende:

$$\left.\begin{aligned} z &= \varrho_1 m^2 + \varrho_2 n^2 \\ u &= \varrho_1 m^2 - \varrho_2 n^2 \\ v &= 2mn \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wobei also m und n zwei beliebige ganze Zahlen, ϱ_1 und ϱ_2 zwei beliebige Factoren sind, in welche ϱ sich zerlegen lässt, so dass $\varrho = \varrho_1 \varrho_2$. In der That ist

$$(\varrho_1 m^2 + \varrho_2 n^2)^2 = (\varrho^2 m^2 - \varrho_2 n^2)^2 + \varrho_1 \varrho_2 (2mn)^2 \quad (5)$$

eine identische Gleichung, die der Gleichung (3) entspricht, und zwar giebt es kein Tripel, das nicht aus (4) bzw. (5) hervorginge.

Ob die Formeln (4) unmittelbar ursprüngliche Tripel liefern, d. h. solche, bei denen die 3 Zahlen keinen gemeinsamen Teiler haben, hängt von der Beschaffenheit der Zahlen m, n, ϱ_1, ϱ_2 ab.

Im übrigen ist klar, dass Gleichung (5) auch für beliebige Werte der Buchstabengrössen erfüllt wird und daher als ganz allgemeine Lösung der Gleichung (3) angesehen werden kann.

II.

Wir kehren nun zur Gleichung (2) zurück. Setzt man dort

$$x - y \cos \alpha = u$$

$$y = v$$

$$\sin^2 \alpha = \varrho$$

so folgt aus den Formeln (4)

$$\left.\begin{aligned} z &= \varrho_1 m^2 + \varrho_2 n^2 \\ x &= \varrho_1 m^2 - \varrho_2 n^2 + 2mn\cos\alpha \\ y &= 2mn \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

wobei ϱ_1 und ϱ_2 zwei Factoren sind, in die sich $\sin^2\alpha$ zorlegen läset, z. B.

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \sin\alpha$$

Die identische Gleichung, welche der Gleichung (1) entspricht, lautet daher:

$$(\varrho_1 m^2 + \varrho_2 n^2)^2 = (\varrho_1' m^2 - \varrho_2 n^2 + 2mn\cos\alpha)^2 + (2mn)^2$$
$$- 4mn\cos\alpha(\varrho_1 m^2 - \varrho_2 n^2 + 2mn\cos\alpha)$$

Die Formeln (6) geben uns also eine ganz allgemeine Lösung der Gleichung (1).

Um jedoch zu ganzzahligen Werten zu gelangen, nehmen wir an, dass

$$\cos\alpha = \pm\frac{p}{q}$$

sei, wobei $\frac{p}{q}$ ein echter Bruch in einfachster Form ist. Dann ist

$$\sin^2\alpha = \frac{q^2 - p^2}{q^2}$$

Es seien σ_1 und σ_2 zwei ganze Zahlen, so dass

$$\sigma_1\sigma_2 = q^2 - p^2 \text{ ist, also}$$

$$\varrho_1 = \frac{\sigma_1}{q}, \quad \varrho_2 = \frac{\sigma_2}{q}$$

Setzen wir diese Werte in (6) ein und bilden durch Multiplication mit q ein neues System von Formeln, so folgt

$$\left.\begin{aligned} z &= \sigma_1 m^2 + \sigma_2 n^2 \\ x &= \sigma_1 m^2 - \sigma_2 n^2 \pm 2mnp \\ y &= 2mnq \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

welches uns sämtliche allgemein-pythagoreischen Zahlen liefert.

Beispiel:

$$\cos\alpha = \frac{p}{q} = \frac{3}{4}; \quad q^2 - p^2 = 7 \cdot 1$$

also $\sigma_1 = 7$, $\sigma_2 = 1$. Wählt man $m = 2$, $n = 1$, so folgt

und es ist

$$z = 29 \qquad x = 39 \qquad y = 16$$

$$29^2 = 39^2 + 16^2 - 2 \,.\, 39 \,.\, 16 \,.\, \tfrac{3}{4};$$

$$841 = 1521 + 256 - 936.$$

III.

Wenn ausser $\cos\alpha$ auch $\sin\alpha$ rational ist, so kann auch die Höhe $h = y\sin\alpha$ rational bestimmt werden, somit auch der Inhalt des Dreiecks

$$J = \frac{xh}{2}$$

Wir kommen somit auf die heronischen Zahlentripel, die bekanntlich Masszahlen für die Seiten eines Dreiecks sind, deren Inhalt durch die Formel

$$\sqrt{s(s-x)(e-y)(s-z)},$$

wobei

$$s = \frac{x+y+z}{2} \text{ ist,}$$

auf eine rationale Zahl führt. Die heronischen Dreiecke lassen sich, wie von verschiedenen Mathematikern gezeigt ist, aus rationalen rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzen. Unsere Formeln ermöglichen eine directe Berechnung.

Die Bedingung ist also, dass

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{p^2}{q^2}} = \frac{1}{q}\sqrt{q^2-p^2}$$

eine rationale Zahl ist; es muss also

$$q^2 - p^2 = \mu^2 \quad \text{oder} \quad q^2 = p^2 + \mu^2$$

sein, d. h. p und q müssen zwei Zahlen eines pythagoreischen Tripels sein, von denen q dem Hypotenusenwerte, p dem einen Kathetenwerte entspricht. Die Seiten sind nach den Formeln (7) zu berechnen.

Beispiel: Es sei

$$\cos\alpha = \frac{p}{q} = \frac{5}{13}$$

Dann ist

$$\sin\alpha = \frac{1}{q}\sqrt{q^2-p^2} = \frac{12}{5}$$

Da $q^2 - p^2 = 144$ ist, können wir wählen

ferner nehmen wir

$$\sigma_1 = 24, \quad \sigma_2 = 6;$$
$$m = 1, \quad n = 1.$$

Dann ergiebt sich aus (7)

$$\left.\begin{array}{l} z = 30 \\ x = 28 \\ y = 26 \end{array}\right\} \text{gekürzt} \quad \begin{array}{r} 15 \\ 14 \\ 13 \\ \hline 2s = 42 \end{array} \quad \begin{array}{r} s = 21 \\ s-x = 7 \\ s-y = 8 \\ s-z = 6 \end{array}$$

$$J = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6} = \sqrt{7^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84.$$

IV.

Wir behandeln noch die besonderen Fälle, in denen

$$\alpha = 60^0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 120^0$$

ist, für welche also die Gleichung gilt:

$$z^2 = x^2 + y^2 \mp xy.$$

Es ist dann

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{2}$$

also

$$p = \pm 1, \quad q = 2, \quad q^2 - p^2 = 3$$

so dass für σ nur die Zerlegung in die Factoren 3 . 1 erfolgen kann und entweder

$$\sigma_1 = 3, \quad \sigma_2 = 1 \quad \text{oder} \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 3$$

zu setzen ist. Wenn man jedoch in System (7) die Werte von σ_1 und σ_2 mit einander vertauscht, so erhält man auch bei vertauschten m und n genau dieselben Werte für z wieder. Es ist daher nur nötig, eine Zerlegung zu benutzen, um alle möglichen Tripel zu erhalten.

Ferner ist Folgendes zu beachten:

In der Gleichung

$$z^2 = x^2 + y^2 - xy$$

gehören zu einem bestimmten z je 2 Werte von y und x. Da y und x vertauschbar sind, ohne dass die Gleichung sich ändert, so muss ein Wert von y einem Werte von x gleich sein; die übrigen sind verschieden. Sind $z_1\, y_1\, x_1$ drei zusammengehörende Werte für $\alpha = 60^0$, wobei $x_1 > y_1$ sein soll, so sind, wie man sich leicht überzeugen kann, die drei verschiedenen Tripel

$$z_1 \quad y_1 \quad x_1 \qquad \alpha = 60^0$$
$$z_1 \quad y_1 \quad x_1 - y_1 \qquad \alpha = 120^0$$
$$z_1 \quad x_1 \quad x_1 - y_1 \qquad \alpha = 60^0$$

Für jeden möglichen Wert von z erhält man daher drei von einander verschiedene identische Gleichungen, z. B.

$$13^2 = 15^2 + 8^2 - 15 . 8$$
$$13^2 = 15^2 + 7^2 - 15 . 7$$
$$13^2 = 8^2 + 7^2 + 8 . 7$$

Wir untersuchen nun die aus (7) sich ergebenden Relationen

$$\left.\begin{aligned} z &= 3m^2 + n^2 = 2(m^2 + n^2) + m^2 - n^2 \\ x &= 3m^2 - n^2 + 2mn = 2(m^2 - n^2) + (m + n)^2 \\ y &= 4mn \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

auf die Bildung ursprünglicher Tripel.

y ist nur teilbar durch einen Factor von 4, m und n. Sollen z und x solche Factoren nicht enthalten, so dürfen

1) m und n keinen gemeinsamen Factor enthalten, sie dürfen also nicht beide gerade sein.

2) m und n dürfen nicht beide ungerade sein, sonst wären, wie leicht zu sehen, alle Grössen durch 2 teilbar. Sie müssen also beide ungleichartig sein, was besagen soll, dass die eine Zahl gerade, die andere ungerade ist. Ist dies aber der Fall, so sind z und x auch nicht durch 2 teilbar, weil $m^2 - n^2$ und $(m+n)^2$ ungerade sind.

3) n darf den Factor 3 nicht enthalten.

Es sind also in den Formeln (9) für m und n zwei ganze, ungleichartige, positive Zahlen zu setzen, von denen die zweite den Factor 3 nicht enthalten darf, dann die demselben Werte von z zugehörenden Wertepaare für x und y zu bestimmen.

Um zu ermitteln, wie viele ein- und zweizifferige, ursprüngliche Tripel es giebt, bestimmen wir die Grenzen für m und n.

Es muss sein

$$z = 3m^2 + n^2 < 100$$

Setzt man $m = 1$, so folgt

$$n < \sqrt{97}, \quad \text{also} \quad n < 10$$

Da die Zahl 9, weil sie den Factor 3 enthält, ausgeschlossen bleibt, so ist 8 der grösste Wert, den n annehmen kann. Ferner muss sein

$$m < \sqrt{\frac{100-n^2}{3}}$$

Ist	n	so folgt	m
	1	„	< 6
	2	„	„
	4	„	„
	5	„	< 5
	7	„	„
	8	„	< 4

Schliesslich muss

$$y = 4mn < 100,$$

so $m\ n < 25$ sein.

Es sind daher nur folgende Zusammenstellungen möglich:

n	m
1	2,4
2	1, 3, 5
4	1, 3, 5
5	2, 4
7	2
8	1, 3

Im ganzen erhält man 13 Gruppen, die in folgender Tabelle zusammengestellt sind:

m	n	$z=3m^2+n^2$	y	$\alpha=60^0$ x	$\alpha=120^0$ x
2	1	13	8	15	
		13	8		7
		13	15	7	
4	1	49	16	55	
		49	16		39
		49	55	39	
1	2	7	8	3	
		7	8	5	
		7	3		5
3	2	31	24	35	
		31	24		11
		31	35	11	
5	2	79	40	91	
		79	40		51
		79	91	51	
1	4	19	16	21	
		19	16		5
		19	21	5	
3	4	43	48	35	
		43	48	13	
		43	35		13
5	4	91	80	99	
		91	80		19
		91	99	19	
2	5	37	40	7	
		37	40	33	
		37	7		33
4	5	73	80	63	
		73	80	17	
		73	63		17
2	7	61	56	65	
		61	56		9
		61	65	9	
1	8	67	32	77	
		67	32		45
		67	77	45	
3	8	91	96	11	
		91	96	85	
		91	11		85

Wilhelmshaven, Februar 1899.

XXXV.

Ableitung von Formeln für die mathematische Wahrscheinlichkeit beim Würfelspiel nebst einigen Anwendungen.

Von

Johannes Gomoll, Berlin.

Die nachstehende Untersuchung beschäftigt sich mit der Aufgabe, ein allgemeines, praktisch brauchbares Verfahren zur Berechnung der mathematischen Wahrscheinlichkeit beim Würfelspiel aufzufinden und womöglich dieselbe als Function der Augen- und Würfelanzahl darzustellen.

Bekanntlich versteht man unter der mathematischen Wahrscheinlichkeit $w_{n,p}$, eine gewisse Augenanzahl n mit p Würfeln zu werfen, den Quotienten aus der Anzahl $i_{n,p}$ der dem Eintreten des gewünschten Ereignisses günstigen Fälle und der Anzahl v aller überhaupt möglichen Fälle, d. h. es ist:

$$w_{n,p} = \frac{i_{n,p}}{v} \tag{1}$$

Will man beispielsweise die Augenanzahl $n = 5$ mit $p = 3$ Würfeln erzielen, so kann jeder der 3 Würfel, wie aus Tabelle 1 ersichtlich

No.	Würfel I	Würfel II	Würfel III	Augenanzahl
1	1	1	3	5
2	1	2	2	5
3	1	3	1	5
4	2	1	2	5
5	2	2	1	5
6	3	1	1	5

Tabelle 1.

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich auch in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{matrix} i_{n,2}^{(1)} \\ i_{n,2}^{(2)} \end{matrix}\right\} = 6 \pm (n-7) \qquad (15)$$

und zwar gilt das plus-Zeichen für die 1. Gruppe, das minus-Zeichen für die 2te. Diese Schreibweise hat auf den ersten Blick etwas Verlockendes an sich. Da sich aber später herausstellen wird, dass bei den Formeln für eine grössere Anzahl von Würfeln keine Analogie mit dieser Form der Gleichung vorhanden ist, so werden der weiteren Untersuchung die ursprünglich erhaltenen Gleichungen (13) und (14) zu Grunde gelegt werden, zumal da sich bei Benutzung der letzteren die Rechnung viel einfacher gestaltet.

Uebrigens hätte man Gleichung (14) viel schneller mit Hilfe der Gleichung (6) aus (13) entwickeln können. Ist nämlich

$$12 \geqq n \geqq 7,$$

so ist andrerseits

$$7 \geqq 14 - n \geqq 2.$$

Man kann daher schreiben:

$$i_{n,2}^{(2)} = i_{14-n,2}^{(1)}$$

$$i_{n,2}^{(2)} = \binom{13-n}{1} = 13 - n,$$

Dieser Weg ist oben deshalb nicht benutzt worden, um die Notwendigkeit der Einteilung der Werte von n in Gruppen und die charakteristischen Unterschiede derselben schärfer hervortreten zu lassen.

In wissenschaftlicher Hinsicht wäre es noch interessant, die lästige Unterscheidung zwischen den einzelnen Gruppen entbehrlich zu machen und $i_{n,2}$ als einheitliche, explicite Function von n darzustellen, die für sämtliche möglichen Werte von n richtige Werte von i liefert. Zum Zweck der Lösung dieser Aufgabe setze man:

$$i_{n,2} = k_1 (n-1) + k_2 (13-n)$$

Gelingt es nun k_1 und k_2 so zu bestimmen, dass für alle Zahlen der 1. Gruppe, also für den Bereich von von $n = 2$ bis $n = 7$ gleichzeitig $k_1 = 1$ und $k_2 = 0$ wird, während andrerseits für alle Zahlen der 2. Gruppe, also für den Bereich von $n = 8$ bis $n = 12$ gleichzeitig $k_1 = 0$ und $k_2 = 1$ wird, so ist das Ziel erreicht. Diese Forderungen sind leicht zu erfüllen, wenn man die Beziehungen

$$a^0 = 1 \quad \text{und}$$
$$0^\alpha = 0$$

benutzt, die für einen beliebigen endlichen Wert von a und einen beliebigen positiven endlichen Wert von α gelten. Dann gelangt man zu folgenden Ausdrücken:

$$k_1 = \binom{n-8}{5}^{\binom{n-2}{6}} \quad \text{und}$$

$$k_2 = \binom{n-2}{6}^{\binom{n-8}{5}^2}$$

Demnach gilt allgemein:

$$i_{n,2} = (n-1)\binom{n-8}{5}^{\binom{n-2}{6}} + (13-n)\binom{n-2}{6}^{\binom{n-8}{5}^2},$$

und (16)

$$w_{n.2} = \frac{1}{6^2}\left[(n-1)\binom{n-8}{5}^{\binom{n-2}{6}} + (13-n)\binom{n-2}{6}^{\binom{n-8}{5}^2}\right] \quad (17)$$

In nachstehender Tabelle sind für sämtliche Werte von n die zugehörigen i und w ausgerechnet. Die Nenner der gemeinen Brüche, durch die w ausgedrückt ist, sind immer auf ganze Zahlen abgerundet.

n	$i_{n,2}$	$w_{n,2}$	n
2	1	$^1/_{36}$	12
3	2	$^1/_{18}$	11
4	3	$^1/_{12}$	10
5	4	$^1/_9$	9
6	5	$^1/_7$	8
7	6	$^1/_6$	7

Tabelle 4.

In Figur 1. ist der Verlauf der Function $i_{n,2} = f(n)$ graphisch dargestellt.

3. Fall: $p = 3$. In derselben Weise wie der 2. Fall aus dem

1sten wird auch der 3. Fall aus dem 2ten abgeleitet werden. Jetzt hat man 3 Gruppen zu unterscheiden. Die 1. Gruppe umfasst alle diejenigen Zahlen n, die sich derartig würfeln lassen, dass die Summe der Augen zweier Würfel stets nur Zahlen ergeben kann, die zu der 1. Gruppe bei 2 Würfeln gehören. Ein Beispiel liefert die Zahl 5, für die die möglichen Variationen in Tabelle 5. aufgestellt sind. Die Summe der beiden letzten Posten beträgt der Reihe nach 4, 3, 2, lauter Zahlen, die zu der Gruppe 1 bei 2 Würfeln gehören. Die untere Grenze der Gruppe 1 bei 3 Würfeln bildet natürlich die Zahl $n = 3$. Die obere Grenze bestimmt sich aus der Forderung, dass das Maximum der Summe der beiden letzten Posten gerade noch unter Gruppe 1 bei 2 Würfeln fällt, d. h.

$$\begin{aligned} 5 &= 1+(1+3) \\ &= 1+(2+2) \\ &= 1+(3+1) \end{aligned} \Bigg\} (4)$$
$$\begin{aligned} &= 2+(1+2) \\ &= 2+(2+1) \end{aligned} \Big\} (3)$$
$$= 3+(1+1) \mid (2)$$

Tabelle 5.

$$n - 1 \leqq 7$$

$$n \leqq 8.$$

Man denke sich die Variationen der 3. Classe zur Summe n gebildet:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mit } 1 \\ \text{,, } 2 \\ \dots \\ \text{,, } n-2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{können soviele} \\ \text{Variationen an-} \\ \text{fangen, als} \\ \text{sich die Zahl} \end{array} \left\{\begin{array}{c} n-1 \\ n-2 \\ \dots \\ 2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{mit 2 Würfeln} \\ \text{werfen lässt,} \\ \text{d. h. nach} \\ \text{Gl. (13)} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \binom{n-2}{1} \\ \binom{n-3}{1} \\ \dots \\ \binom{1}{1} \end{array}\right.$$

Man erhält also:

$$i_{n,3}^{(1)} = \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{1} + \dots + \binom{1}{1}$$

$$i_{n,3}^{(1)} = \binom{n-1}{2}$$

Der 2. Gruppe gehören alle diejenigen Zahlen n an, die sich derartig würfeln lassen, dass die Summe der Augen zweier Würfel Zahlen ergeben kann, die teilweise unter Gruppe 2, teilweise unter Gruppe 1 bei 2 Würfeln fallen. In Tabelle 6. ist die Zerlegung für die zu dieser Gruppe gehörige Zahl 9 angedeutet.

Tabelle 6.

$$\left.\begin{aligned} 9 &= 1+(2+6) \\ &= 1+(3+5) \\ &\ldots\ldots \\ &= 1+(6+2) \end{aligned}\right\}(8) \quad \left.\begin{aligned} 9 &= 2+(1+6) \\ &= 2+(2+5) \\ &\ldots\ldots \\ &= 2+(6+1) \end{aligned}\right\}(7) \quad \left.\begin{aligned} 9 &= 3+(1+5) \\ &= 3+(2+4) \\ &\ldots\ldots \\ &= 3+(5+1) \end{aligned}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{aligned} 9 &= 4+(1+4) \\ &= 4+(2+3) \\ &\ldots\ldots \\ &= 4+(4+1) \end{aligned}\right\}(5) \quad \left.\begin{aligned} 9 &= 5+(1+3) \\ &= 5+(2+2) \\ &= 5+(3+1) \end{aligned}\right\}(4) \quad \left.\begin{aligned} 9 &= 6+(1+2) \\ &= 6+(2+1) \end{aligned}\right\}(3)$$

Die Summen der beiden letzten Elemente jeder Variation ergeben der Reihe nach 8, 7, 6, 5, 4, 3, lauter Zahlen, die teilweise wie 8 und 7 der Gruppe 2,, teilweise wie 7, 6, 5, 4, 3 der Gruppe 1 bei 2 Würfeln angehören. Die Grenzen der Gruppe 2 bei 3 Würfeln bestimmen sich aus den Forderungen, dass einerseits die Summe der beiden letzten Elemente im Maximum schon unter Gruppe 2 bei 2 Würfeln fällt, und dass andrerseits das Minimum jener Summe gerade noch der Gruppe 1 bei 2 Würfeln angehört, d. h. bzgl.

$$12 \geqq n-1 \geqq 7 \quad \text{und}$$

$$7 \geqq n-6 \geqq 2\text{; beiden Bedingungen wird genügt, wenn:}$$

$$13 \geqq n \geqq 8.$$

Man denke sich die Variationen der 3. Classe zur Summe n gebildet.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Mit } 1 \\ \text{„ } 2 \\ \ldots \\ \text{„ } n-8 \\ n-7 \\ n-6 \\ \ldots \\ 6 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{können so viele} \\ \text{Variationen} \\ \text{anfangen, als} \\ \text{sich die Zahl} \end{array} \left\{\begin{array}{c} n-1 \\ n-2 \\ \ldots \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ \ldots \\ n-6 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{mit 2 Würfeln} \\ \text{werfen lässt,} \\ \text{d. h.} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \binom{14-n}{1} \\ \binom{15-n}{1} \\ \ldots \\ \binom{5}{1} \\ \binom{6}{1} \\ \binom{5}{1} \\ \ldots \\ \binom{n-7}{1}. \end{array}\right.$$

Man erhält also:

$$i_{n,3}^{(2)} = \binom{14-n}{1} + \binom{15-n}{1} + \cdots + \binom{5}{1} + \binom{6}{1} + \binom{5}{1} + \cdots + \binom{n-7}{1}$$

$$= \sum_{x=0}^{x=n-8} (14-n+x) + \binom{6}{2} - \binom{n-7}{2}$$

$$= (14-n)(n-7) + \sum_{x=0}^{x=n-8} (x) + \binom{6}{2} - \binom{n-7}{2}$$

$$= (14-n)(n-7) + \frac{(n-7)(n-8)}{2} + \binom{6}{2} - \frac{(n-7)(n-8)}{2}$$

$$= (14-n)(n-7) + (n-7)(n-8) + \binom{6}{2} - (n-7)(n-8)$$

$$i_{n,3}^{(2)} = 6(n-7) - 2\binom{n-7}{2} + \binom{6}{2} \qquad (18)$$

$$i_{n,3}^{(2)} = (14-n)(n-7) + 15.$$

Zur 3. Gruppe endlich gehören diejenigen Zahlen n, bei denen die Summe der Augen zweier Würfel nur Zahlen ergeben kann, die ausschliesslich unter die Gruppe 2 bei 2 Würfeln fallen. In Tabelle 7. ist für die dieser Gruppe angehörige Zahl 16 die Zerlegung durchgeführt. Die Summe der beiden letzten Posten beträgt der Reihe nach 12, 11, 10, lauter Zahlen, die der Gruppe 2 bei 2 Würfeln allein angehören. Die obere Grenze dieser Gruppe ist natürlich 18, die untere ergiebt sich aus der Forderung, dass das Minimum jener Summe gerade noch in die 2. Gruppe bei 2 Würfeln hineinfalle, d.h.

$$\begin{aligned} 16 &= 4+(6+6) \quad (12) \\ &= 5+(5+6) \\ &= 5+(6+5) \end{aligned} \Big\} \; (11)$$

$$\left.\begin{aligned} &= 6+(4+6) \\ &= 6+(5+5) \\ &= 6+(6+4) \end{aligned}\right\} (10)$$

Tabelle 7

$$n - 6 \geqq 7$$

$$n \geqq 13.$$

Man denke sich wieder die Variationen der 3. Classe zur Summe n gebildet.

Mit $(n-12)$	können soviele	12	mit 2 Würfeln	$\binom{1}{1}$
„ $(n-11)$	Variationen	11	werfen lässt,	$\binom{2}{1}$
. . . . .	anfangen, als	. . .	d. h. nach	. . . .
„ 6	sich	$n-6$	Gl. (15)	$\binom{19-n}{1}$

Demnach ist

$$i_{n,3}^{(1)} = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{19-n}{1}$$

$$i_{n,3}^{(2)} = \binom{20-n}{2}$$

Das vorläufige Ergebniss für 3 Würfel ist also folgendes:

$$i_{n,3}^{(1)} = \binom{n-1}{2}; \quad 8 \geqq n \geqq 3 \tag{19}$$

$$i_{n,3}^{(2)} = (n-7)(14-n)+15; \quad 13 \geqq n \geqq 8 \tag{20}$$

$$i_{n,3}^{(3)} = \binom{20-n}{2}; \quad 18 \geqq n \geqq 13. \tag{21}$$

Uebrigens hätte man die Formel (21) wieder unmittelbar aus Gleichung (19) ableiten können, indem man dort n mit $7p - n = 21 - n$ vertauscht hätte (vgl. Gl. (6)).

Vom wissenschaftlichen Standpunkte ist es wieder interessant, eine ganz allgemeine, einheitliche Formel für $i_{n,3}$ aufzufinden, die die Unterscheidung einzelner Gruppen überflüssig macht.

Das Verfahren entspricht genau demjenigen bei 2 Würfeln. Die Formel lautet:

$$i_{n,3} = k_1 \binom{n-1}{2} + k_2[(n-7)(14-n)+15] + k_3\binom{20-n}{2}, \tag{22}$$

worin:

$$k_1 = \left[\binom{n-9}{4}\binom{n-13}{6}\right]^{\binom{n-3}{6}}$$

$$k_2 = \left[\binom{n-3}{6}\binom{n-13}{6}\right]^{\binom{n-9}{4}}$$

$$k_3 = \left[\binom{n-3}{6}\binom{n-9}{4}\right]^{\binom{n-13}{6}}$$

In Tabelle 8 sind für sämtliche n die zugehörigen Werte von $i_{n,3}$ und $w_{n,3}$ ausgerechnet. Die Nenner der gemeinen Brüche, durch die $w_{n,3}$ darin ausgedrückt ist, sind immer auf ganze Zahlen abgerundet. In Figur 2. ist der Verlauf der Function $i_{n,3} = f(n)$ graphisch dargestellt.

n	$i_{n,3}$	$w_{n,3}$	n
3	1	$^1/_{216}$	18
4	3	$^1/_{72}$	17
5	6	$^1/_{36}$	16
6	10	$^1/_{22}$	15
7	15	$^1/_{14}$	14
8	21	$^1/_{10}$	13
9	25	$^1/_{9}$	12
10	27	$^1/_{8}$	11

Tabelle 8.

Die bisher behandelten speciellen Fälle genügen bereits, umd teilweise das allgemeine Gesetz erkennen zu lassen. Zunächst kann man folgende Behauptung aufstellen:

Es giebt für die Anzahl $i_{\nu,p}$ der Möglichkeiten, eine Zahl n mit p Würfeln zu werfen, p verschiedene Formeln, deren jede nur inner halb eines bestimmten Bereichs von n gilt. Eine einheitliche Formell aufzustellen ist zwar möglich (vgl. Formel 16 und 22), doch erscheint dieselbe stets im Gewande einer sehr gekünstelten transcendenten Funktion. Die 1. von den p Einzelformeln für i_{np} gilt nur für den Bereich von $n = p$ bis $n = (p + 1 \,.\, 5)$, die 2. für den Bereich von $n = (p + 1 \,.\, 5)$ bis $n = (p + 2 \,.\, 5)$ u. s. w., die $k$te für den Bereich von $n = [p + (k - 1) \,.\, 5]$ bis $n = (p + k \,.\, 5)$, die $p$te und letzte endlich für den Bereich von $n = (6p - 5)$ bis $6p$.

Es mag zunächst, um später störende Unterbrechungen des Gedankenganges zu vermeiden, vorausgeschickt werden, dass unter den Zahlen der 1. Gruppe keine mit Ausnahme der oberen Grenze eine 6 als Summanden enthalten kann. Die kleinste Zahl nämlich, bei der eine 6 vorkommen kann, lautet:

$$(p - 1) \,.\, 1 + 6 = p + 5.$$

Dies ist aber die obere Grenze der 1. Gruppe, folglich können die übrigen darunter gelegenen Zahlen, keine 6 als Summanden enthalten; dagegen wird bei allen Zahlen von $(p + 5)$ an aufwärts eine 6 als Summand auftreten können.

Zum Beweise der oben aufgestellten Behauptung nehme man an, dieselbe sei bereits für $(p - 1)$ Würfel bewiesen, d. h. es gäbe bei

$(p-1)$ Würfeln $(p-1)$ verschiedene Formeln für $i_{n,1-p}$, von denen die 1. nur innerhalb der Grenzen $(p-1)$ und $[(p-1)+5 . 1]$, die zweite innerhalb der Grenzen $[(p-1)+5 . 1]$ und $[(p-1)+5 . 2]$ u. s. w., die $k$te innerhalb der Grenzen $[(p-1)+5(k-1)]$ und $[(p-1)+5k]$, die $(p-1)$ste endlich nur innerhalb der Grenzen $[6(p-1)-5]$ und $6(p-1)$ Giltigkeit habe. Es bedeute q eine der ganzen Zahlen von 1 bis 6. Es können nun unter den Variationen der $p$ten Classe zur Summe n soviele mit q anfangen, als es Variationen der $(p-1)$sten Classe zur Summe $(n-q)$ giebt. Ist nun n so beschaffen, dass $(n-q)$ nur Werte annehmen kann, die innerhalb der 1. Gruppe bei $(p-1)$ Würfeln liegen, so wird sich eine gewisse Formel I für $i_{n,p}$ ergeben. Würde aber $(n-q)$ teilweise in die 2., teilweise in die 1. Gruppe bei $(p-1)$ Würfeln fallen können, so müsste die jetzt abgeleitete Formel für $i_{n,p}$ von der ersten wesentlich verschieden sein, da sie durch Summirung zweier Gruppen ganz verschiedener Ausdrücke entstanden ist. Innerhalb welcher Grenzen muss nun n liegen, wenn $(n-q)$ nur unter die 1. Gruppe bei $(p-1)$ Würfeln fallen soll? Die Antwort liefert uns folgende Ungleichung:

$$(n-q)_{\text{maximum}} \leqq (p-1)+5 . 1$$

$$n-1 \leqq p+4$$

$$n \leqq p+5$$

Die Formel I gilt also innerhalb der Grenzen p und $(p+5)$. Eine andere Formel II erhält man, wenn $(n-q)$ teilweise unter die 2., teilweise unter die 1. Gruppe bei $(p-1)$ Würfeln fällt, d. h. wenn

$$(n-q)_{\text{max.}} \geqq (p-1)+5 . 1$$

$$n-1 \geqq p+4$$

$$n \geqq p+5 \text{ ist und wenn}$$

$$(n-q)_{\text{minimum}} \leqq (p-1)+1 . 5$$

$$n-6 \leqq p+4$$

$$n \leqq p+2 . 5; \text{ u. s. w,}$$

Eine von Formel $(k-1)$ verschiedene Formel k wird sich ergeben, wenn $(n-q)$ teilweise in der $k$ten, teilweise in der $(k-1)$sten Gruppe bei $(p-1)$ Würfeln liegen kann, d. h. wenn

$$(n-q)_{\max.} \geqq (p-1)+5(k-1)$$

$$n-1 \geqq p+5(k-1)-1)$$

$$n \geqq p+5(k-1) \text{ und wenn}$$

$$(n-q)_{\min.} \leqq (p-1)+5(k-1)$$

$$n-6 \leqq p+5k-6$$

$$n \leqq p+5k.$$

Die letzte Formel p endlich erhält man, wenn $n-q$ ausschliesslich in der $(p-1)$sten Gruppe bei $(p-1)$ Würfeln liegt, d. h. wenn

$$(n-q)_{\min.} \geqq 6(p-1)-5$$

$$n-6 \geqq 6p-5-6$$

$$n \geqq 6p-5.$$

Die obere Grenze dieser Gruppe bildet natürlich die Zahl $6p$. Hiermit ist also bewiesen, dass, wenn obiger Satz von der Anzahl der verschiedenen Formeln für $i_{n,p}$ und ihren Geltungsbereichen für $(p-1)$ Würfel gilt, er auch für p Würfel richtig ist. Nun gilt jener Satz aber, wie ein Blick auf die bisher vorgekommenen Grppeneinteilungen lehrt, ausser für $p=2$ auch für $p=3=4-1$, folglich auch für $p=4=5-1$, folglich auch für $p=5=6-1$ u. s. w., d. h. für ein beliebiges p.

Nach Gleichung (6) ist

$$i_{n,p} = i_{7p=n,p}$$

Gesetzt nun, n gehörte zur $k$ten Gruppe; dann müsste es eine der folgenden Zahlen sein:

$$p+5(k-1),\quad p+5(k-1)+1,\quad p+5(k-1)+2, \ldots, p+5k$$

$(7p-n)$ wäre alsdann eine der jetzt folgenden Zahlen:

$6p-5(k-1),\quad 6p-5(k-1)-1,\quad 6p-5(k-1)-2,\ \ldots,\ 6p-5k$
oder
$p+5(p+1-k),\quad p+5(p+1-k)-1,\quad p+5(p+1-k)-2,$
$\ldots\ p+5(p-k)$

d. h. $(7p-n)$ würde der $(p+1-k)$ten Gruppe angehören. Mit Hinzusetzung der Gruppenzeiger lautet also Gleichung (6):

$$i_{n,p}^{(k)} = i_{7p-n,\,p}^{(p+1-k)} \tag{23}$$

Die bisher behandelten Specialfälle legen ferner die Vermutung nahe, dass allgemein

$$i_{n,p}^{(1)} = \binom{n-1}{p-1} \tag{24}$$

Denn die Formeln

$$i_{n,3}^{(1)} = \binom{n-1}{2}$$

$$i_{n,2}^{(1)} = \binom{n-1}{1} \quad \text{und}$$

$$i_{n,1}^{(1)} = \binom{n-1}{0}$$

sind Specialfälle der Gleichung (24). An dieser Stelle wird es auch klar, weshalb für $i_{n,1}$ die Schreibweise der Gleichung (11) gewählt wurde.

Gesetzt, die Richtigkeit der Gleichung (24) wäre bereits für $(p-1)$ Würfel nachgewiesen. Dann wäre

$$i_{n,p-1}^{(1)} = \binom{n-1}{p-2}$$

Man denke sich nun die Variationen der $p$ten Classe zur Summe n gebildet.

Mit 1	fangen soviele	$n-1$	mit $(p-1)$	$\binom{n-2}{p-2}$
Mit 2	Variationen	$n-2$	Würfeln	$\binom{n-3}{p-2}$
. . . . .	an, als sich	. . .	werfen lässt,	. . . .
Mit $n-(p-1)$	die Zahl	$p-1$	d. h.	$\binom{p-2}{p-2}$

Es ergiebt sich also:

$$i_{n,p}^{(1)} = \binom{n-2}{p-2} + \binom{n-3}{p-2} + \cdots + \binom{p-2}{p-2}$$

$$i_{n,p}^{(1)} = \binom{n-1}{p-1}$$

Hiermit ist bewiesen, dass, wenn die Formel (24) für $(p-1)$ Würfel gilt, sie auch für p Würfel richtig ist. Nun gilt die Formel aber ausser für $p = 2$ auch für $p = 3 = 4 - 1$, folglich auch für $p = 4 = 5 - 1$, folglich auch für $p = 5 = 6 - 1$ u. s. w., d, h. allgemein.

Hiermit ist auch zugleich die Formel für die p te Gruppe erledigt, denn nach Gleichung (23) wird

$$i_{n,p}^{(p)} = i_{7p-n,p}^{(1)}$$

$$i_{n,p}^{(p)} = \binom{7p-1-n}{p-1} \tag{25}$$

Die Gleichungen

$$i_{n,1}^{(1)} = \binom{6-n}{0}$$

$$i_{n,2}^{(2)} = \binom{13-n}{1}$$

$$i_{n,3}^{(3)} = \binom{20-n}{2}$$

stellen sich jetzt als Specialfälle der Formel (25) dar.

Es würde jetzt die Ableitung eines allgemeinen Ausdrucks für $i_{n,p}^{(2)}$ zu folgen haben. Da aber die bisher untersuchten Specialfälle noch nicht ausreichen, um das Bildungsgesetz von $i_{n,p}^{(2)}$ erkennen zu lassen, so muss zunächst noch ein neuer Specialfall $p = 4$ behandelt werden.

4. Fall: $p = 4$. Der Fall $p = 4$ lässt sich unter Benutzung der Ergebnisse der voraus gegangenen Untersuchungen sehr schnell erledigen. Demnach hat man 4 Gruppen zu unterscheiden. Die 1. reicht von $p = 4$ bis $(p + 5 . 1) = 9$, die 2. von $(p + 5 . 1) = 9$ bis $(p + 5 . 2) = 14$, die 3. von $(p + 5 . 2) = 14$ bis $(p + 5 . 3) = 19$, die 4. von $(6p - 5) = 19$ bis $6p = 24$.

1. Gruppe: $9 \geqq n \geqq 4$. Durch Anwendung der Gleichung (24) entsteht:

$$i_{n,4}^{(1)} = \binom{n-1}{3} \tag{26}$$

2. Gruppe: $14 \geqq n \geqq 9$. Die Formel für die 2. Gruppe kann noch nicht durch Specialisierung einer allgemeinen Formel erhalten werden, sie wird daher in derselben Weise abgeleitet werden wie die bisher gefundenen Formeln für 1, 2 und 3 Würfel. Man denke sich

die Variationen der p ten Classe zur Summe n gebildet. Bei der Berechnung der Anzahl $i_{n,4}^{(2)}$ derselben werden die Formeln (19) und (18) zur Anwendung kommen, letztere jedoch in folgender Schreibweise:

$$i_{n,3}^{(2)} = 6\binom{n-7}{1} - 2\binom{n-7}{2} + \binom{6}{4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Mit} & 1 \\ ,, & 2 \\ \cdots & \\ ,, & n-8 \\ ,, & n-7 \\ ,, & n-6 \\ \cdots & \\ ,, & 6 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{fangen soviele} \\ \text{Variationen} \\ \text{an, als sich} \\ \text{die Zahl} \end{array} \left\{\begin{array}{c} n-1 \\ n-2 \\ \cdot\ \cdot \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ \cdot\ \cdot \\ n-6 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{c} \text{mit 3 Würfeln} \\ \text{werfen lässt,} \\ \text{d. h.} \end{array} \left\{\begin{array}{l} 6\binom{n-8}{1} - 2\binom{n-8}{2} + \binom{6}{4} \\ 6\binom{n-9}{1} - 2\binom{n-9}{2} + \binom{6}{4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 6\binom{1}{1} \quad - 2\binom{1}{2} + \binom{6}{4} \\ \qquad\qquad \binom{6}{2} \\ \qquad\qquad \binom{5}{2} \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad \binom{n-7}{2} \end{array}\right.$$

Es ergiebt sich also:

$$i_{n,4}^{(2)} = 6\binom{n-7}{2} - 2\binom{n-7}{3} + \binom{6}{4}(n-8) + \binom{7}{3} - \binom{n-7}{3}$$

$$i_{n,4}^{(2)} = 6\binom{n-7}{2} - 3\binom{n-7}{3} + \binom{6}{4}\binom{n-8}{1} + \binom{7}{4}\binom{n-9}{0} \qquad (27)$$

$$= 3(n-7)(n-8) - \tfrac{1}{2}(n-7)(n-8)(n-9) + 15(n-8) + 35$$

$$= (n-7)(n-8)(3 - \tfrac{1}{2}(n-9)) + 15n - 120 + 35$$

$$i_{n,4}^{(2)} = \tfrac{1}{2}(n-7)(n-8)(15-n)+15n-85 \tag{28}$$

3. Gruppe: $19 \geqq n \geqq 14$. Nach Formel (23) wird

$$i_{n,4}^{(3)} = i_{28-n,p}^{(2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}(21-n)(20-n)(n-13)+15(28-n)-85$$

$$i_{n,4}^{(3)} = \tfrac{1}{2}(21-n)(20-n)(n-13)-15n+335 \tag{29}$$

4. Gruppe: $24 \geqq n \geqq 19$. Durch Specialisierung der Gleichung (25) entsteht

$$i_{n,4}^{(4)} = \binom{27-n}{3} \tag{30}$$

In ähnlicher Weise wie bei 2 und 3 Würfeln, lässt sich auch für 4 Würfel eine einheitliche, für sämtliche n giltige Formel aufstellen; sie lautet:

$$i_{n,4} = \begin{cases} k_1\binom{n-1}{3}+ \\ k_2[\tfrac{1}{2}(n-7)(n-8)(15-n)+15n-85]+ \\ k_3[\tfrac{1}{2}(21-n)(20-n)(n-13)-15n+335]+ \\ k_4\binom{27-n}{3} \end{cases} \tag{31}$$

Hierin ist:

$$k_1 = \left[\binom{n-10}{5}\binom{n-15}{4}\binom{n-19}{6}\right]^{\binom{n-4}{6}}$$

$$k_2 = \left[\binom{n-4}{6}\binom{n-15}{4}\binom{n-19}{6}\right]^{\binom{n-10}{5}^2}$$

$$k_3 = \left[\binom{n-4}{6}\binom{n-10}{5}\binom{n-19}{6}\right]^{\binom{n-15}{4}}$$

$$k_4 = \left[\binom{n-4}{6}\binom{n-10}{5}\binom{n-15}{4}\right]^{\binom{n-19}{6}}$$

Doch nehmen wir nach dieser Abschweifung wieder den vorhin unterbrochenen Gedankengang auf! Es handelte sich um die Auffindung eines allgemeinen Ausdrucks für $i_{n,p}^{(2)}$. Schreibt man die Gleichung (18) in der Form

$$i_{n,3}^{(2)} = 6\binom{n-7}{1} - 2\binom{n-7}{2} + \binom{6}{4}\binom{n-8}{0}$$

und vergleicht sie mit Formel (27), so entsteht die Vermutung, dass das allgemeine Bildungsgesetz für $i_{n,p}^{(2)}$ folgendermassen lautet:

$$i_{n,p}^{(2)} = 6\binom{n-7}{p-2} - (p-1)\binom{n-7}{p-1} + \sum_{x=6}^{x=p+3}\binom{x}{4}\binom{n-2-x}{p+3-x}\Big] \tag{32}$$

Zum Beweise dieser Formel nehme man wieder an, dieselbe gelte bereits für $(p-1)$ Würfel, d. h. es sei:

$$i_{n,p-1}^{(2)} = 6\binom{n-7}{p-3} - (p-2)\binom{n-7}{p-2} + \sum_{x=6}^{x=p+2}\left[\binom{x}{4}\binom{n-2-x}{p+2-x}\right]$$

Man denke sich die Variationen der $p$ten Classe zur Summe n gebildet.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Mit} & 1 \\ \text{,,} & 2 \\ \ldots & \ldots \\ \text{,,} & n-(p-1+5\,.\,1) \\ & =n-(p+4) \\ \text{,,} & n-(p+3) \\ \text{,,} & n-(p+2) \\ \ldots & \ldots \\ \text{,,} & 6 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{fangen soviele}\\ \text{Variationen}\\ \text{an, als sich}\\ \text{die Zahl}\end{array} \left\{\begin{array}{c} n-1 \\ n-2 \\ \ldots \\ p+4 \\ p+3 \\ p+2 \\ \ldots \\ n-6 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{c}\text{mit } (p-1)\\ \text{Würfeln}\\ \text{werfen lässt,}\\ \text{d. h.}\end{array} \left\{\begin{array}{l} 6\binom{n-8}{p-3} - (p-2)\binom{n-8}{p-2} + \sum_{x=6}^{x=p+2}\left[\binom{x}{4}\binom{n-3-x}{p+2-x}\right] \\ 6\binom{n-9}{p-3} - (p-2)\binom{n-9}{p-2} + \sum_{x=6}^{x=p+2}\left[\binom{x}{4}\binom{n-4-x}{p+2-x}\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 6\binom{p-3}{p-3} - (p-2)\binom{p-3}{p-2} + \sum_{x=6}^{x=p+2}\left[\binom{x}{4}\binom{p+2-x}{p+2-x}\right] \\ \binom{p+2}{p-2} \\ \binom{p+1}{p-2} \\ \ldots \\ \binom{n-7}{p-2} \end{array}\right.$$

Es wird also:

$$i_{n,p}^{(2)} = 6\binom{n-7}{p-2} - (p-2)\binom{n-7}{p-1} + \left[\binom{p+3}{p-1} - \binom{n-7}{p-1}\right] +$$

$$\sum_{x=6}^{x=p+2}\left[\binom{x}{4}\binom{n-3-x}{p+2-x}\right] + \sum_{x=6}^{x=p+2}\left[\binom{x}{4}\binom{n-4-x}{p+2-x}\right] + \ldots$$

$$\sum_{x=6}^{x=p+2}\left[\binom{x}{4}\binom{p+2-x}{p+2-x}\right]$$

$$= 6\binom{n-7}{p-2} - (p-1)\binom{n-7}{p-1} + \left\{\binom{p+3}{p-1} +\right.$$

$$\sum_{x=6}^{x=p+2}\left[\binom{x}{4}\binom{n-3-x}{p+2-x}\right] + \sum_{x=6}^{x=p+2}\left[\binom{x}{4}\binom{n-4-x}{p+2-x}\right] +$$

$$\left.\sum_{x=6}^{x=p+2}\left[\binom{x}{4}\binom{n-5-x}{p+2-x}\right] + \ldots + \sum_{x=6}^{x=p+2}\left[\binom{x}{4}\binom{p+2-x}{p+2-x}\right]\right\}$$

Der letzte Klammerausdruck lässt sich in folgender Weise umformen:

$$\binom{p+3}{p-1} + \Sigma\Sigma =$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\binom{6}{4}\binom{n-9}{p-4} + \binom{7}{4}\binom{n-10}{p-5} + \ldots + \binom{p+2}{4}\binom{n-p-5}{0} + \\
\binom{6}{4}\binom{n-10}{p-4} + \binom{7}{4}\binom{n-11}{p-5} + \ldots + \binom{p+2}{4}\binom{n-p-6}{0} + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
\binom{6}{4}\binom{p-4}{p-4} + \binom{7}{4}\binom{p-5}{p-5} + \ldots + \binom{p+2}{4}\binom{0}{0} + \\
\qquad + \binom{p+3}{4}
\end{array}\right.$$

$$= \binom{6}{4}\binom{n-8}{p-3} + \binom{7}{4}\binom{n-9}{p-4} + \ldots$$

$$+ \binom{p+2}{4}\binom{n-p-4}{1} + \binom{p+3}{4}\binom{n-p-5}{0}$$

$$= \sum_{x=6}^{x=p+3}\left[\binom{x}{4}\binom{n-2-x}{p+3-x}\right]$$

Nach Einsetzung dieses Wertes in den Gesamtausdruck für $i_{n,p}^{(2)}$ erhält man:

$$i_{n,p}^{(2)} = 6\binom{n-7}{p-2} - (p-1)\binom{n-7}{p-1}$$

$$+ \sum_{x=6}^{x=p+3}\left[\binom{x}{4}\binom{n-2-x}{p+3-x}\right]$$

Hiermit ist bewiesen, dass, wenn Formel (32) für $(p-1)$ Würfel gilt

sie auch für p Würfel richtig ist. Nun gilt sie aber ausser für $p = 2$ auch für $p = 3 = 4 - 1$, folglich auch für $p = 4 = 5 - 1$, folglich auch für $p = 5 = 6 - 1$ u. s. w., d. h. für ein beliebiges p. Man kann Formel (32) auch in folgender Form schreiben:

$$i_{n,p}^{(2)} = 6\binom{n-7}{p-2} - (p-1)\binom{n-7}{p-1} + \sum_{x=6}^{x=p+3}\left[\binom{x}{4}\binom{n-2-x}{n-p-5}\right]. \tag{33}$$

Mit der 2. Gruppe ist auch zugleich die $(p-1)$ste Gruppe erledigt, denn aus Gleichung (23) folgt:

$$\begin{aligned} i_{n,p}^{(p-1)} &= i_{7p-n,p}^{(2)} \\ &= 6\binom{7p-n-7}{p-2} - (p-1)\binom{7p-n-7}{p\ \ 1} + \\ &\sum_{x=6}^{x=p+3}\left[\binom{x}{4}\binom{7p-n-2-x}{6p-n-5}\right]. \end{aligned} \tag{34}$$

Es hätte jetzt die Entwicklung einer Formel für die innerhalb der 3. Gruppe gelegenen, aber noch zur 1. Hälfte gehörigen Augenanzahlen n zu folgen. Man erkennt jedoch, dass die Formeln sich mit jeder Gruppe umfangreicher gestalten und bald die Grenze ihrer praktischen Brauchbarkeit überschreiten werden. Es erscheint daher zwecklos, den bisher verfolgten Weg fortzusetzen, um auch Formeln für die höheren, diesseits der Mitte gelegenen Gruppen abzuleiten. Anstatt dessen mag, um die so entstehende Lücke auszufüllen, ein Verfahren angegeben werden, das zwar keine explicite Formel für $i_{n,p}$ liefert, aber doch verhältnismässig schnell und einfach in allen praktisch vorkommenden Fällen zum Ziele führt. Vorausgesetzt wird bei diesem Verfahren die Kenntniss der bei der Rechnung vorkommenden Werte von i für einige kleinere Würfelanzahlen, etwa für 1, 2 und 3 Würfel; aus den früher aufgestellten Tabellen können jene Werte von i entnommen werden.

Man setze

$$p = r + s,$$

worin r und s Würfelanzahlen bedeuten, für die die zugehörigen i schon bekannt sind. Ferner setze man

$$n = n_r + n_s,$$

worin n_r und n_s Augenanzahlen sind, die mit r bzhw. s Würfeln geworfen werden können. Es mögen endlich i_{nr} und i_{ns} die Anzahl

der Möglichkeiten bedeuten, die Augen n_r und n_s mit r bzhw. s Würfeln zu werfen.

Es ist theoretisch ganz gleichgiltig, ob man sich die Zahl n mit p Würfeln oder gleichzeitig die Zahlen n_r und n_s mit $(r+s)$ Würfeln geworfen denkt. n_r und n_s können eine bestimmte Anzahl u von verschiedenen Wertepaaren bilden. Um ein beliebig herausgegriffenes specielles Wertepaar n_r und n_s zu würfeln, giebt es $i_{nr} \,.\, i_{ns}$ Möglichkeiten. Nimmt man ein anderes Wertepaar, so erhält man ein zweites Product $i_{nr} \,.\, i_{ns}$. Bildet man diese Producte für jede der u möglichen Zusammenstellungen von n_r und n_s und summirt sie dann, so muss offenbar $i_{n,p}$ herauskommen. Symbolisch lässt sich dieses Verfahren darstellen durch die Gleichung

$$i_{n,p} = \Sigma (i_{nr} \,.\, i_{ns}), \tag{35}$$

in der sich die Summation über sämtliche möglichen Werte von n_r und n_s zu erstrecken hat.

Ein Beispiel möge das Vorstehende erläutern. Es soll festgestellt werden, wieviel Möglichkeiten es giebt, mit $p = 5$ Würfeln die Zahl $n = 15$ zu werfen. Man wähle $r = 2$ und $s = 3$. Als bekannt vorausgesetzt sind die in der Rechnung vorkommenden Werte von i für 2 und 3 Würfel. In nachstehender Tabelle (Tabelle 9.) ist die Rechnung durchgeführt, die nach dem Vorausgeschickten ohne weiteres verständlich sein dürfte. Zur Controlle mag $i_{15,5}$ auch noch nach der allgemeinen Formel berechnet werden. 15

No.	n	n_r	n_s	i_{nr}	i_{ns}	$i_{nr} \,.\, i_{ns}$
1	15	2	13	1	21	21
2	15	3	12	2	25	50
3	15	4	11	3	27	81
4	15	5	10	4	27	108
5	15	6	9	5	25	125
6	15	7	8	6	21	126
7	15	8	7	5	15	75
8	15	9	6	4	10	40
9	15	10	5	3	6	18
10	15	11	4	2	3	6
11	15	12	3	1	1	1

$i_{15,5} = \Sigma(i_{nr} \,.\, i_{ns} = 651$

Tabelle 9

gehört gerade noch zur 2. Gruppe, es ist also die Formel für $i_{n,p}^{(2)}$ anzuwenden. Specialisirt für $p = 5$ lautet diese:

$$i_{n,5}^{(2)} = 6\binom{n-7}{3} - 4\binom{n-7}{4} + \binom{6}{4}\binom{n-8}{2} + \binom{7}{4}\binom{n-9}{1} + \binom{8}{4}$$

$$n = 15;$$

$$n - 7 = 8; \quad \binom{n-7}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

$$\binom{n-7}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

$$n - 8 = 7; \quad \binom{n-8}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$$

$$n - 9 = 6; \quad \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15; \quad \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$$

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

$$6\binom{n-7}{3} = 336$$

$$\binom{6}{4}\binom{n-8}{2} = 315$$

$$\binom{7}{4}\binom{n-9}{1} = 210$$

$$\binom{8}{4} = 70$$

$$\overline{\quad 931 \quad}$$

$$4\binom{n-7}{4} = 280$$

$$i_{15,5} = 651, \text{ wie oben.}$$

Dieses Beispiel lässt zugleich erkennen, dass das in Tabelle 9. durchgeführte Verfahren fast ebenso schnell und vielleicht noch bequemer zum Ziele führt als die Anwendung der allgemeinen Formel für $i_{n,p}$. Bei Zahlen, die einer noch höheren Gruppe als der 2. angehören, die also noch umfangreichere und verwickeltere Formeln erfordern würden, dürfte sich dieses Verhältniss noch wesentlich zu Gunsten jenes Verfahrens verschieben, zumal da dasselbe in vielen Fällen noch einer bedeutenden Vereinfachung fähig ist.

Ist nämlich p eine gerade Zahl, so wählt man zweckmässig

$$r = s = \frac{p}{2}.$$

Da alsdann für gleiche Werte von n_r und n_s auch i_{nr} und i_{ns} gleich sind, so genügt es, die Combinationen der 2. Classe mit Wiederholung aus den ganzen Zahlen von r bis $6r$ oder von $\frac{p}{2}$ bis $3p$ als Elementen zur Summe n zu bilden und das zu jeder Complexion gehörige Product $i_{nr} \,.\, i_{ns}$ mit der entsprechenden Permutationszahl P zu multipliciren. Die Summe der Producte $P \,.\, i_{nr} \,.\, i_{ns}$ liefert dann wieder $i_{n,p}$, so dass man symbolisch schreiben kann:

$$i_{n,p} = \Sigma(P . i_{nr} \,.\, i_{ns}). \tag{36}$$

Ein Beispiel möge wieder das Gesagte erläutern. Es soll $i_{11,6}$ berechnet werden. Vorausgesetzt wird die Kenntniss der vorkommenden $i_{n,3}$, denn man nimmt $r = s = 3$. Die Rechnung ist in nachstehender Tabelle (Tabelle 10) durchgeführt. Zur Controlle ist $i_{11,6}$

No:	n	n_r	n_s	i_{nr}	i_{ns}	P	$P . i_{nr} . i_{ns}$
1	11	3	8	1	21	2	42
2	11	4	7	3	15	2	90
3	11	5	6	6	10	2	120

$$i_{11,6} = \Sigma(P . i_{nr} \,.\, i_{ns}) = 252$$

Tabelle 10.

auch nach der allgemeinen Formel berechnet worden. Dann erhält man (vgl. Gl. (24)):

$$i_{11,6} = \binom{10}{5} = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5},$$

$i_{11,6} = 252$, wie oben.

Das Ergebniss der ganzen vorhergehenden Untersuchung lässt sich folgendermassen darstellen:

1) Ist $p + 5 \geqq n \geqq p$, so gelten die Formeln:

$$i_{n,p} = \binom{n-1}{p-1} \quad \text{und}$$

$$w_{n,p} = \frac{1}{6^p}\binom{n-1}{p-1}.$$

2) Ist $\left(\frac{7p}{2} - \frac{1-(-1)^p}{4}\right)$ und gleichzeitig $p+10 \geqq n \geqq p+5$, so kann man nach folgenden Formeln rechnen:

$$i_{n,p} = 6\binom{n-7}{p-2} - (p-1)\binom{n-7}{p-1} + \sum_{x=6}^{x=p+3}\left[\binom{x}{4}\binom{n-2-x}{n-p-5}\right]$$

und

$$w_{n,p} = \frac{1}{6^p}\left\{6\binom{n-7}{p-2} - (p-1)\binom{n-7}{p-1} + \sum_{x=6}^{x=p+3}\left[\binom{x}{4}\binom{n-2-x}{n-p-5}\right]\right\}.$$

Bei etwas höheren Werten von p werden diese Formeln indessen so umfangreich, dass es viel vorteilhafter ist, auch hier schon das durch die Symbole (35) und (36) ausgedrückte Verfahren anzuwenden.

3) Ist $\left(\frac{7p}{2} - \frac{1-(-1)^p}{4}\right) \geqq n \geqq p+10$, so benutze man ausschliesslich das soeben erwähnte Verfahren.

$$i_{n,p} = \begin{cases} \Sigma(i_{ns} \cdot i_{ns}) & \text{oder} \\ \Sigma(P i_{nr} \cdot i_{ns}) \end{cases}$$

$$w_{n,p} = \frac{1}{6^p} \cdot \begin{cases} \Sigma(i_{nr} \cdot i_{ns}) & \text{oder} \\ \Sigma(P i_{nr} \cdot i_{ns}) \end{cases}$$

4) Ist endlich $6p \geqq n > \frac{7p}{2} - \frac{1-(-1)^p}{4}$, so wende man die Beziehung (6) an:

$$i_{n,p} = i_{7p-n,p},$$

$$w_{n,p} = w_{7p-n,p}.$$

Den Schluss mögen einige Aufgaben bilden, in denen das Vorausgehende zur Anwendung gelangt.

1. Aufgabe: Es soll eine Tabelle der Werte von $i_{n,5}$ aufgestellt werden ($p = 5$).

Man hat folgende Gruppen zu unterscheiden:

1. Gruppe: $10 \geqq n \geqq 5$; $\quad i_{n,5} = \binom{n-1}{4}$.

2. Gruppe: $15 \geqq n \geqq 10$; $\quad i_{n,5} = 6\binom{n-7}{3} - 4\binom{n-7}{4} + \binom{6}{4}\binom{n-8}{2} + \binom{7}{4}(n-9) + \binom{8}{4}$.

3. Gruppe: $17 \geqq n \geqq 15$; $\quad i_{n,5} = \Sigma\,(i_{nr} \cdot i_{ns})$.

4. Gruppe: $30 \geqq n \geqq 17$; $\quad i_{n,5} = i_{35-n,5}$.

Es wird hier nur für eine einzige, beliebig gewählte Zahl jeder Gruppe die Rechnung durchgeführt werden.

1. Gruppe: $n = 8$;

$$i_{8,5} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

2. Gruppe: $n = 12$;

$$n-7 = 5; \quad \binom{n-7}{3} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

$$\binom{n-7}{4} = \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5;$$

$$n-8 = 4; \quad \binom{n-8}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \left(\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}\right) = 15$$

$$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35;$$

$$n-9 = 3; \quad \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

$$6\binom{n-7}{3} = 60$$

$$\binom{6}{4}\binom{n-8}{2} = 90$$

$$\binom{7}{4}(n-9) = 105$$

$$\binom{8}{4} = 70$$

$$\text{Summe:}\quad 325$$

$$4\binom{n-7}{4} = 20$$

$$i_{12,5} = 305.$$

3. Gruppe: $n = 17$. Man wähle:

$$r = 2$$
$$s = 3.$$

$$\begin{aligned}
17 &= 2 + 15 \ldots 1 \cdot 10 = 10 \\
&= 3 + 14 \ldots 2 \cdot 15 = 30 \\
&= 4 + 13 \ldots 3 \cdot 21 = 63 \\
&= 5 + 12 \ldots 4 \cdot 25 = 100 \\
&= 6 + 11 \ldots 5 \cdot 27 = 135 \\
&= 7 + 10 \ldots 6 \cdot 27 = 162 \\
&= 8 + 9 \ldots 5 \cdot 25 = 125 \\
&= 9 + 8 \ldots 4 \cdot 21 = 84 \\
&= 10 + 7 \ldots 3 \cdot 15 = 45 \\
&= 11 + 6 \ldots 2 \cdot 10 = 20 \\
&= 12 + 5 \ldots 1 \cdot 6 = 6 \\
\hline
& \qquad\qquad i_{17,0} = 780.
\end{aligned}$$

4. Gruppe: $n = 23$;

$$i_{23,5} = i_{35-23,5} = i_{12,5} = 305.$$

In Tabelle 11. sind für sämtliche möglichen Werte von n die zugehörigen $i_{n,5}$ und $w_{n,5}$ aufgeführt. Die Nenner der gemeinen Brüche, durch die $w_{n,5} = \frac{i_{n,5}}{6^5}$ ausgedrückt ist, sind immer auf ganze Zahlen abgerundet. Als Controlle kann die Beziehung

$$\sum_{n=5}^{n=30} i_{n,5} = 6^5 = 7776$$

benutzt werden.

Tabelle 11.

n	$i_{n,6}$	$w_{n,5}$	n
5	1	$^1/_{7776}$	30
6	5	$^1/_{1555}$	29
7	15	$^1/_{518}$	28
8	35	$^1/_{222}$	27
9	70	$^1/_{111}$	26
10	126	$^1/_{62}$	25
11	205	$^1/_{38}$	24
12	305	$^1/_{25}$	23
13	420	$^1/_{19}$	22
14	540	$^1/_{14}$	21
15	651	$^1/_{12}$	20
16	735	$^1/_{11}$	19
17	780	$^1/_{10}$	18.

2. Aufgabe: Es soll unter Benutzung der Tabelle 11. eine Tabelle der $i_{n,10}$ und $w_{n,10}$ aufgestellt werden.

$$p = 10.$$

1. Gruppe: $15 \geqq n \geqq 10$; $i_{n,10} = \binom{n-1}{9}$.

2. Gruppe: $20 \geqq n \geqq 15$;

$$i_{n,10} = 6\binom{n-7}{8} - 9\binom{n-7}{9} + \binom{6}{4}\binom{n-8}{7} + \binom{7}{4}\binom{n-9}{6}$$
$$+ \binom{8}{4}\binom{n-10}{5} + \binom{9}{4}\binom{n-11}{4} + \binom{10}{4}\binom{n-12}{3}$$
$$+ \binom{11}{4}\binom{n-13}{2} + \binom{12}{4}(n-14) + \binom{13}{4}.$$

Wie man sieht, wird die allgemeine Formel so umständlich, dass man besser das durch Gleichung (36) ausgedrückte Verfahren benutzt.

$$i_{n,10} = \Sigma(Pi_{nr} \cdot i_{ns})$$

3. Gruppe: $35 \geqq n \geqq 20$. Man rechne ebenfalls nach Gleichung (36).

$$i_{n,10} = \Sigma(Pi_{nr} \,.\, i_{ns})$$

4. Gruppe: $60 \geqq n \geqq 35$. Man wende Gleichung (6) an;

$$i_{n,10} = i_{70-n,10}.$$

Die Rechnung ist hier nur für je eine beliebige Zahl der 2. und 3. Gruppe durchgeführt u. zw. für die Zahl der 2. Gruppe auf doppelte Weise, um den Unterschied in der Zahlenrechnung bei Benutzung der allgemeinen Formel und der Gleichung (36) deutlich hervortreten zu lassen.

2. Gruppe: $n = 17$.

1). Anwendung der allgemeinen Formel:

$$n-7 = 10;\quad \binom{n-7}{8} = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10\,.\,9}{1\,.\,2} = 45;$$

$$\binom{n-7}{9} = \binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$$

$$n-8=9;\quad \binom{n-8}{7}=\binom{9}{7}=\binom{9}{2}=\frac{9\,.\,8}{1\,.\,2}=36;$$

$$\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=\frac{6\,.\,5}{1\,.\,2}=15;$$

$$n-9=8;\quad \binom{n-9}{6}=\binom{8}{6}=\binom{8}{2}=\frac{8\,.\,7}{1\,.\,2}=28;$$

$$\binom{7}{4}=\binom{7}{3}=\frac{7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}=35;$$

$$n-10=7;\quad \binom{n-10}{5}=\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=\frac{7\,.\,6}{1\,.\,2}=21;$$

$$\binom{8}{4}=\frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=70;$$

$$n-11=6;\quad \binom{n-11}{4}=\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=\frac{6\,.\,5}{1\,.\,2}=15;$$

$$\binom{9}{4}=\frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=126;$$

$$n-12=5;\quad \binom{n-12}{3}=\binom{5}{3}=\binom{5}{2}=\frac{5\,.\,4}{1\,.\,2}=10;$$

$$\binom{10}{4}=\frac{10\,.\,9\,.\,7\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=210;$$

$$n-13=4;\quad \binom{n-13}{2}=\binom{4}{2}=\frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}=6;$$

$$\binom{11}{4}=\frac{11\,.\,10\,.\,9\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=330;$$

$$n-14=3;\quad \binom{12}{4}=\frac{12\,.\,11\,.\,10\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=495;$$

$$\binom{13}{4}=\frac{13\,.\,12\,.\,11\,.\,10}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=715;$$

$$6\binom{n-7}{8}=270$$

$$\binom{6}{4}\binom{n-8}{7}=540$$

$$\binom{7}{4}\binom{n-9}{6}=980$$

$$\binom{8}{4}\binom{n-10}{5} = 1470$$

$$\binom{9}{4}\binom{n-11}{4} = 1890$$

$$\binom{10}{4}\binom{n-12}{3} = 2100$$

$$\binom{12}{4}(n-14) = 1485$$

$$\binom{13}{4} \qquad = 715.$$

Summe: 11430

$$9\binom{n-7}{6} = \quad 90$$

$$i_{17,10} = 11340.$$

2. Methode: Anwendung der Gleichung

$$i_{n,10} \,.\, \Sigma(Pi_{nr} \,.\, i_{n,s}).$$

Man wähle $r = s = \frac{p}{2} = 5.$

$n = n_r + n_s$	$P \,.\, i_{nr} \,.\, i_{ns}$	
$17 = 5 + 12$	$2 \,.\, 1 \,.\, 305$	$= 610$
$6 + 11$	$2 \,.\, 5 \,.\, 205$	$= 2050$
$7 + 10$	$2 \,.\, 15 \,.\, 126$	$= 3780$
$8 + 9$	$2 \,.\, 35 \,.\, 70$	$= 4900$

$i_{17,10} = 11340$, wie oben.

3. Gruppe: $n = 34$;

$$r = s = \frac{p}{2} = 5.$$

$n = n_r + n_s$	$Pi_{nr} \,.\, i_{ns}$	
$34 = 5 + 29$	$2 \,.\, 1 \,.\, 5 =$	10
$= 6 + 28$	$2 \,.\, 5 \,.\, 15 =$	150
$= 7 + 27$	$2 \,.\, 15 \,.\, 35 =$	1050
$= 8 + 26$	$2 \,.\, 35 \,.\, 70 =$	4900

$= 9+25$	$2 . 70 . 126 =$	17640
$=10+24$	$2 . 126 . 205 =$	51660
$=11+23$	$2 . 205 . 305 =$	125050
$=12+22$	$2 . 305 . 420 =$	256200
$=13+21$	$2 . 420 . 540 =$	453600
$=14+20$	$2 . 540 . 651 =$	703080
$=15+19$	$2 . 651 . 735 =$	956970
$=16+18$	$2 . 735 . 780 =$	1146600
$=17+17$	$1 . 780 . 780 =$	608400
	$i_{34,10} =$	4325310.

Hat man nicht nur ein einzelnes $i_{n,10}$ zu berechnen, sondern eine ganze Tabelle, so wird die Rechnung dadurch sehr erleichtert, dass man eine grosse Anzahl der zu addierenden Produkte bereits aus dem Vorhergehenden entnehmen kann, sie also nicht mehr besonders auszurechnen braucht. Im vorliegenden Fall ($n = 34$) kommen sogar sämtliche Produkte mit Ausnahme des letzten bereits bei vorausgegangenen Zahlen n vor, wovon man sich leicht überzeugen kann.

In Tabelle 12. sind für sämtliche n die zugehörigen $i_{n,10}$ und

10	1	$^1/_{60466176}$	60
11	10	$^1/_{6046618}$	59
12	55	$^1/_{1099385}$	58
13	220	$^1/_{274846}$	57
14	715	$^1/_{84568}$	56
15	2002	$^1/_{30203}$	55
16	4995	$^1/_{12105}$	54
17	11340	$^1/_{5332}$	53
18	23760	$^1/_{2545}$	52
19	46420	$^1/_{1303}$	51
20	85228	$^1/_{709}$	50
21	147940	$^1/_{409}$	49
22	243925	$^1/_{248}$	48
23	383470	$^1/_{158}$	47
24	576565	$^1/_{105}$	46
25	831204	$^1/_{73}$	45
26	1151370	$^1/_{52}$	44

27	1535040	$^1/_{39}$	43
28	1972630	$^1/_{31}$	42
29	2446300	$^1/_{25}$	41
30	2930455	$^1/_{21}$	40
31	3393610	$^1/_{18}$	39
32	3801535	$^1/_{16}$	38
33	4121260	$^1/_{15}$	37
34	4325310	$^1/_{14}$	36
35	4395456	$^1/_{14}$	35

Tabelle 12.

$w_{n,10} = \frac{i_{n,10}}{6^{10}}$ verzeichnet. Die Nenner der gemeinen Brüche, durch $w_{n,10}$ ausgedrückt ist, sind immer auf ganze Zahlen abgerundet. Als Probe kann die Beziehung

$$\sum_{n=10}^{n=60} (i_{n,10}) = 6^{10} = 60466176$$

dienen.

3. Aufgabe: Im Anschluss an die soeben erledigte Aufgabe soll noch eine Art des Würfelspiels näher untersucht werden, die man zuweilen auf Volksfesten vorfindet. Gespielt wird mit 10 Würfeln. Auf 10 Täfelchen sind die möglichen Augenanzahlen verzeichnet u. zw. in folgender Verteilung:

Tafel I. 10, 20, 30, 40, 50, 60;
Tafel II. 11, 21, 31, 41, 51;
Tafel III. 12, 22, 32, 42, 52;
Tafel IV. 13, 23. 33, 43, 53;
Tafel V. 14, 24, 34, 44, 54;
Tafel VI. 15, 25, 35, 45, 55;
Tafel VII. 16, 26, 36, 46, 56;
Tafel VIII. 17, 27, 37, 47, 57;
Tafel IX. 18, 28, 38, 48, 58;
Tafel X. 19, 29, 29, 39, 49, 59;

Gegen einen gewissen Einsatz erhält der Spieler eine dieser Tafeln eingehändigt. Sind alle Tafeln vergeben, so wird ein einziges Mal gewürfelt. Auf jeden Wurf, ist ein bestimmter Gewinn ausgesetzt, der demjenigen Spieler zufällt, dessen Tafel die geworfene Augen-

anzahl enthält. Es soll nun ermittelt werden, wie gross für jede Tafel die Wahrscheinlichkeit ist. $w_{I}, w_{II} \ldots w_{X}$ mögen bezgl. die Werte derselben für Tafel I, II . . . X bezeichnen. Dann ist

$$w_{I} = w_{10,10} + w_{20,10} + w_{30,10} + \ldots + w_{60,10}$$
$$= \frac{1}{6^{10}} (i_{10,10} + i_{20,10} + \ldots + i_{60,10}).$$

Entsprechend ergeben sich:

$$w_{II} = \frac{1}{6^{10}} (i_{11,10} + i_{21,10} + \ldots + i_{51,10})$$

$$w_{III} = \frac{1}{6^{10}} (i_{12,10} + i_{22,10} + \ldots + i_{52,10})$$

u. s. w.

$$w_{X} = \frac{1}{6^{10}} (i_{19,10} + i_{29,10} + \ldots + i_{59,10}).$$

Die Zahlenrechnung liefert:

$$w_{I} = \frac{6031368}{60466176} \infty \frac{1}{10}; \quad w_{II} = \frac{6034280}{60466176} \infty \frac{1}{10};$$

$$w_{III} = \frac{6041905}{60466176} \infty \frac{1}{10}; \quad w_{IV} = \frac{6051330}{60466176} \infty \frac{1}{10};$$

$$w_{V} = \frac{6058955}{60466176} \infty \frac{1}{10}; \quad w_{VI} = \frac{6061868}{60466176} \infty \frac{1}{10};$$

$$w_{VII} = \frac{6058955}{60466176} \infty \frac{1}{10}; \quad w_{VIII} = \frac{6051330}{60466176} \infty \frac{1}{10};$$

$$w_{IX} = \frac{6041905}{60466176} \infty \frac{1}{10}; \quad w_{X} = \frac{6034280}{60466176} \infty \frac{1}{10};$$

Probe: $\sum_{k=I}^{k=X} (w_k) = \frac{60466176}{60466176} = 1.$

Die meisten Aussichten zu gewinnen bietet also, genau genommen, die Tafel VI., indessen sind die Unterschiede der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Tafeln ausserordentlich klein; man kann daher sagen, dass durchschnittlich jeder 10. Wurf ein Treffer sein wird. Im Vergleich mit der gewöhnlichsten Art des Würfelspiels mit 3 Würfeln, bei dem jeder Wurf über 12 gewinnt, sind die Aussichten im vorliegenden Falle ungünstiger, denn dort ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen gleich

$$\frac{1}{6^3}\sum_{n=18}^{n=18}(i_{n,3}) = \frac{56}{216} = \frac{1}{4}.$$

Aufgewogen kann diese Ungleichheit allerdings durch den Wert der Gewinne werden, der im ersten Falle ein bedeutend höherer sein kann wie im zweiten. Es entsteht nun die Frage, wie hoch die Gewinne sein dürfen und wie sie auf die einzelnen Augen verteilt werden müssen, damit ein vorteilhafter Betrieb des Würfelgeschäfts möglich ist. Gesetzt die Gewinne zerfielen in 3 Gruppen. Die Gegenstände der 1. Gruppe mögen die höchsten Werte von je xM besitzen, diejenigen der 2. Gruppe einen mittleren Wert von je yM und die 3. Gruppe den kleinsten Wert von je zM. Die Verteilung der Gewinne über die einzelnen Augenanzahlen wird zweckmässig in der Weise geschehen, dass auf jede Tafel mindestens einer der Hauptgewinne und ein mittlerer Gewinn entfällt. Natürlich wird man die Hauptgewinne auf die am seltensten vorkommenden Zahlen legen. Demnach könnte man etwa folgende Einteilung vornehmen:

1) Gewinne zu xM entfallen auf die Zahlen: 10, 11, 12, 13, 14, 55, 56, 57, 58, 59, 60.

2) Gewinne zu yM entfallen auf die Zahlen: 15, 16, 17, 18, 19, 50, 51, 52, 53, 54.

3) Gewinne zu zM entfallen auf die übrigen Zahlen von 20 bis 49.

Es ist anzunehmen, dass unter 6^{10} Würfen entfallen auf

Tafel I
" II
" II
" IV
" V
" VI
" VII
" VIII
" IX
" X

Gewinne im Werte von

$$\begin{aligned}
&x(i_{10,10}+i_{60,10})+y\cdot i_{50,10}+z(i_{20,10}+i_{30,10}+i_{40,10})\\
&x\cdot i_{11,10}+y\cdot i_{51,10}+z(i_{21,10}+i_{31,10}+i_{41,10})\\
&x\cdot i_{12,10}+y\cdot i_{52,10}+z(i_{22,10}+i_{32,10}+i_{42,10})\\
&x\cdot i_{13,10}+y\cdot i_{53,10}+z(i_{23,10}+i_{33,10}+i_{43,10})\\
&x\cdot i_{14,10}+y\cdot i_{54,10}+z(i_{24,10}+i_{34,10}+i_{44,10})\\
&x\cdot i_{55,10}+y\cdot i_{15,10}+z(i_{25,10}+i_{35,10}+i_{45,10})\\
&x\cdot i_{56,10}+y\cdot i_{16,10}+z(i_{26,10}+i_{36,10}+i_{46,10})\\
&x\cdot i_{57,10}+y\cdot i_{17,10}+z(i_{27,10}+i_{37,10}+i_{47,10})\\
&x\cdot i_{58,10}+y\cdot i_{18,10}+z(i_{28,10}+i_{38,10}+i_{48,10})\\
&x\cdot i_{59,10}+y\cdot i_{19,10}+z(i_{29,10}+i_{39,10}+i_{49,10}).
\end{aligned}$$

Im ganzen hätte also der Besitzer der Würfelbude nach 6^{10} Spielen an Gewinnen auszahlen müssen (in M):

$$A = x\left[\sum_{n=10}^{n=14}(i_{n,10}) + \sum_{n=55}^{n=60}(i_{n,10})\right]$$

$$+ y\left[\sum_{n=50}^{n=54}(i_{n,10}) + \sum_{n=15}^{n=19}(i_{n,10})\right] + z\sum_{n=20}^{n=49}(i_{n,10})$$

$$= 4004\,x + 260\,260\,y + 60\,201\,912\,z$$

Zur Abkürzung führe man ein:

$$a = 4004\,; \quad b = 260\,260; \quad c = 60\,201\,912.$$

Dann ergiebt sich:

$$A = ax + by + c.z$$

Es bezeichne e den für jede Tafel zu entrichtenden Einsatz in M, $E = 10e\,.\,6^{10}$ die Gesamteinnahme bei 6^{10} Würfen, g den Gewinn des Unternehmers bei jedem Spiel in M und $G = g\,.\,6^{10}$ den Gesamtgewinn bei 6^{10} Würfen. Dann besteht die Gleichung:

$$A + G = E \quad \text{oder}$$

$$ax + by + cz + g\,.\,6^{10} = 10e\,.\,6^{10}$$

$$ax + by + cz = 6^{10}(10e - g) = C \tag{37}$$

Der Besitzer der Würfelbude muss, um das Publikum anzulocken, einerseits darauf bedacht sein, die Hauptgewinne möglich gross zu machen, während er andrerseits darauf sehen muss, dass die Gewinne z der 3. Gruppe nicht zu niedrig werden. Man wird daher die Gleichung (37) in der Weise benutzen, dass man z annimmt u. zw. so klein, als gerade noch angemessen erscheint; alsdann kann man zwischen x und y eine Beziehung

$$x = my$$

festsetzen und darauf der Reihe nach x und y berechnen. Man erhält also aus Gleichung (37):

$$y(am + b) + cz = C$$

$$y = \frac{C - cz}{am + b}$$

$$x = \frac{m(C - cz)}{am + b}.$$

Ueber die Grössenverhältnisse, die bei dieser Aufgabe vorkommen können, mag ein Zahlenbeispiel Aufschluss geben.

Es sei:

$$e = 0{,}1\ M$$
$$g = 0{,}3\ M$$
$$z = 0{,}5\ M$$
$$m = 2.$$

Dann wird:

$$C = 42\,326\,323{,}2$$
$$c\,.\,z = 30\,100\,956{,}0$$
$$C - cz = 12\,225\,367{,}2$$
$$ma = 8\,008$$
$$b = 260\,260$$
$$ma + b = 268\,268$$
$$y = 45{,}57\ M$$
$$z = 91{,}14\ M.$$

Also selbst, wenn jeder der 11 Hauptgewinne ca 91 M und jeder der 10 mittleren Gewinne rund 45 M wert wäre, könnte man, falls die Gegenstände der 3. Gruppe einen Wert von nur 50 *pf* besitzen, doch auf einen durchschnittlichen Verdienst von 30 *pf* bei jedem Spiel rechnen. Natürlich wird man jene Werte für x und y nur als obere Grenzen aufzufassen haben, von denen man sich in praxi in angemessener Entfernung zu halten hätte. Denn durchschnittlich zwar würde der Verdienst bei jedem Spiel 30 *pf* betragen, zeitweise aber könnten doch empfindliche Verluste eintreten, die umso bedenklicher wären, als die Zeit, nach der sie sich wieder ausgeglichen haben würden, unter Umständen eine recht ansehnliche Anzahl von Jahren betragen könnte.

Johannes Gomoll.

Aufgabe: Eine Formel für $\sum\limits_{x=k}^{x=n}\left[\binom{x}{k}(a+x)\right]$ abzuleiten.

Man setze: $n = k + p$. (1)

Dann wird:

$$\sum_{x=k}^{x=n}\left[\binom{x}{k}(a+x)\right] = \sum_{x=k}^{x=k+p}\left[\binom{x}{k}(a+x)\right]$$
$$= \binom{k}{k}(a+k) + \binom{k+1}{k}(a+k+1) + \ldots$$
$$+ \binom{k+p-1}{k}(a+k+p-1) + \binom{k+p}{k}(a+k+p).$$

XXXVI.

Anwendung der Simpson'schen Formel auf die Berechnung des Cylinderhufes.

Von

Oberlehrer **Graeber** in Höxter.

I.

Der Cylinderhuf, dessen Grundfläche ein Halbkreis ist.

Figur I. Lege durch die Höhe des Hufes $CD = h$ und durch den Mittelpunkt M des zum ganzen Cylinder gehörigen Grundkreises mit dem Halbmesser r eine Ebene und zu dieser durch A und B gleichlaufende Ebenen, so ergiebt sich nach der Simpsonschen Formel für den Inhalt des Cylinderhufes:

$$v = \left(0 + \frac{4hr}{2} + 0\right)\frac{2r}{6} = \frac{2r^2h}{3}$$

Diese Formel ist hier anwendbar; denn die Formel für jeden zu einer der Endflächen im Abstande von x gleichlaufend gelegten Querschnitt überschreitet den dritten Grad von x nicht.

Es sei $\triangle\, C'D'M'$ der Querschnitt und $C'D' = h'$, $D'M' = \frac{s}{2}$. $M'B = x$. Da $\triangle\, CDM \sim \triangle\, C'D'M'$ ist, so ist

$$h : h' = r : \frac{s}{2} \quad \text{oder} \quad h' = \frac{h\,.\,s}{2\,.\,r};$$

mithin ergiebt sich für den Querschnitt:

$$\frac{h' . s}{4} = \frac{h . s^2}{8r}.$$

Nun ist

$$\frac{s^2}{4} = x(2r - x),$$

also

$$\frac{h's}{4} = \frac{h . x(2r - x)}{2r}:$$

d. h. die Querschnittsformel ist nur vom zweiten Grade, also ist die Simpson'sche Formel anwendbar.

Um den Mantel des Cylinderhufes zu berechnen, zerlege denselben in sehr kleine Dreiecke g_1, g_2, g_3, g_4 . . . und verbinde die Eckpunkte mit dem Mittelpunkte M. Der ganze Körper ist dann in Pyramiden zerlegt, deren Spitzen alle in M liegen und deren Grundflächen zusammen den Mantel ausmachen. Die Höhen aller Pyramiden, wie leicht ersichtlich, ist gleich r. Der Inhalt des Cylinderhufes ist demnach auch:

$$v = (g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \ldots) \frac{r}{3} = M . \frac{r}{3},$$

wo mit M der Mantel des Cylinderhufes bezeichnet ist; mithin ist, da $v = \frac{2r^2 h}{3}$ ist,

$$\frac{Mr}{3} = \frac{2r^2 . h}{3} \quad \text{oder}$$

$$M = 2rh.$$

II.

Der Cylinderhuf, dessen Grundfläche ein Kreissegment ist.

Figur 2. Der zu dem Kreissegment $\widehat{ADB}$ gehörige Cylinderhuf ist $ADBC$. Zeichne im Grundkreise Durchmesser $A'B' \parallel AB$ und lege durch $A'B'$ eine zum Grundkreise senkrechte Schnittebene, welche die Ebene ABC in EE' schneidet, und durch EE' eine mit dem Grundkreise gleichlaufende Schnittebene EFE'. Nun ist der ganze Cylinderhuf in drei Teilkörper zerlegt:

$$v_1 = EE_1FC, \quad v_2 = A'B'DFEE' \quad \text{und} \quad v_3 = ABB'A'E'E,$$

mithin ist

$$v = v_1 + v_2 + v_3$$

v_1 stellt einen Cylinderhuf dar, dessen Grundfläche ein Halbkreis ist; also ist nach I.. $v_1 = \frac{2}{3} r^2(h-h')$, wo $CD = h$ und $FD = h'$ ist.

v_2 ist ein halber Kreiscylinder, also

$$v_2 = \frac{r^2 \pi h'}{2}.$$

Zur Berechnung des Teilkörpers v_3 ergänze den Teilcylinder $ABDFEE'$ zu dem vollen Cylinder, dessen Grundfläche der Grundkreis um M und dessen Höhe h' ist. Es ist dann

$$v_3 = \frac{r^2 \pi h'}{2} - v_4, \quad \text{wo} \quad v_4 = EE'F'D'BA \text{ bedeutet.}$$

Den Körper v_4 teile durch drei Schnittebenen, von denen die zwei durch A und B gelegten senkrecht zur Schnittebene $A'B'E'E$ sind und die dritte mit $A'B'E'E$ gleichlaufend durch Linie AB gelegt ist, in vier Teilkörper; diese sind $v_5 = EHJB$, $v_5 = E'H'J'A$, $v_6 =$ Prisma $HJBH'J'A$, $v_7 =$ Teilcylinder $ABD'F'J'J$; mithin ist

$$v_4 = 2v_5 + v_6 + v_7$$

Der Körper v_5 lässt sich nach der Simpsonschen Formel berechnen; denn die zur Ebene HJB gleichlaufenden Querschnittsflächen überschreiten den dritten Grad nicht, wie oben in I. bewiesen ist. also es ist:

$$v_5 = \left(\frac{HJ \,.\, JB}{2} + \frac{4\, KL \,.\, LN}{2} + 0\right) \frac{EH}{6}$$

oder, wenn für

$$HJ = \frac{s'}{2}, \quad JB = h', \quad KL = \frac{s''}{2}, \quad LN = h'', \quad AB = 2\,HM' = s$$

gesetzt wird:

$$v_5 = \left(\frac{s'h'}{4} + \frac{4s''h''}{4}\right) \frac{r - \frac{s}{2}}{6}. \qquad 1.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke: $ODC \sim HJB \sim KLN$ ergiebt sich:

$$h' : \frac{s'}{2} = h : a; \quad \text{wo} \quad DO = a \quad \text{ist,}$$

$$h'' : \frac{s''}{2} = h : a; \quad \text{hieraus folgt:}$$

$$h' = \frac{s' . h}{2a}$$

$$h'' = \frac{s'' . h}{2a} \;.$$

Setzt man diese Werte für h' und h'' in Gleichung 1. ein, so wird

$$v_5 = \left(\frac{s'^2 h}{8a} + \frac{4 s''^2 h}{8a}\right)\frac{r - \frac{s}{2}}{6} \quad \text{oder} \quad v_5 = \left(\frac{s'^2}{4} + \frac{4 s''^2}{4}\right)\frac{(2r - s)h}{24a} \qquad 2.$$

Es ist:

$$\frac{s'^2}{4} = r^2 - \frac{s^2}{4} = \frac{4r^2 - s^2}{4}$$

$$\frac{s''^2}{4} = \frac{r - \frac{s}{2}}{2} . \left(2r - \frac{r - \frac{s}{2}}{2}\right) = \frac{2r - s}{4} . \frac{6r + s}{4} \quad \text{oder}$$

$$\frac{s''^2}{4} = \frac{12r^2 - 4rs - s^2}{16} \qquad 3.$$

Diese Werte in 2. eingesetzt, giebt:

$$v_5 = \left(\frac{4r^2 - s^2}{4} + \frac{12r^2 - 4rs - s^2}{4}\right)\frac{(2r - s)h}{24a} \quad \text{oder}$$

$$v_5 = (8r^2 - 2rs - s^2)\frac{(2r - s)h}{48a} \quad \text{oder}$$

$$v_5 = 16r^3 - 12r^2 s + s^3)\frac{h}{48a}. \qquad 4.$$

Für das Prisma v_6 erhält man:

$$v_6 = \frac{s' h'}{4} . s \quad \text{oder da} \quad h' = \frac{s' h}{2a} \quad \text{ist,}$$

$$v_6 = \frac{s'^2 s . h}{8a}.$$ Der Wert für $\frac{s'^2}{4}$ aus 3. eingesetzt giebt:

$$v_6 = \frac{4r^2 s - s^3}{8a} h = \frac{12r^2 s - 3s^3}{24a} h$$

Der Teilcylinder v_7 wird berechnet aus der Gleichung:

$$v_7 = \left[\frac{P - b}{2} r - \frac{s(a - r)}{2}\right] . h', \text{ wo } P = 2r\pi \text{ und } b = \widehat{ADB} \text{ ist.}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $ODC \sim OMM'$ folgt

$$h' : a - r = h : a \quad \text{oder}$$

$$h' = \frac{(a-r)h}{a}. \qquad 6.$$

Nun ist

$$v_7 = \left[\frac{2r^2\pi}{2} - \frac{br}{2} - \frac{s(a-r)}{2}\right]\frac{(a-r)h}{a} \quad \text{oder}$$

$$v_7 = [2r^2\pi(a-r) - br(a-r) - (a^2s + r^2s - 2ars)]\frac{(a-r)h}{2a}$$

Mit 12 erweitert:

$$v_7 = [24r^2\pi(a-r) - 12br(a-r) - 12a^2s - 12r^2s + 24ars]\frac{(a-r)h}{24a} \qquad 7.$$

Setzt man in

$$v_4 = 2v_5 + v_6 + v_7$$

die Werte für v_5, v_6 und v_7 aus 4., 5. und 7. ein, so erhält man

$$v_4 = [16r^3 - 12r^2s + 24ars - 2s^3 - 12a^2s + 24r^2\pi(a-r) - 12br \cdot (a-r)]\frac{h}{24a}$$

Es ist

$$\frac{s^2}{4} = a \cdot (2r - a) = 2ar - a^2, \quad \text{oder}$$

$$2ar = \frac{s^2}{4} + a^2; \qquad 8.$$

mithin

$$24ars = 3s^3 + 12a^2s$$

Dieser Wert eingesetzt, ergiebt

$$v_4 = [16r^3 - 12r^2s + s^3 + 24r^2\pi(a-r) - 12br(a-r)]\frac{h}{24a} \qquad 9.$$

Aus

$$v_3 = \frac{r^2\pi h^1}{2} - v_4$$

erhält man mittelst der Gleichungen 6. und 9.

$$v_3 = [-16r^3 + 12r^2s - s^3 - 12r^2\pi(a-r) + 12br(a-r)]\frac{h}{24a} \qquad 10.$$

Setzt man nun die Werte für v_1, v_2 und v_3 ein in

$$v = v_1 + v_2 + v_3,$$

so erhält man

$$v = \tfrac{2}{3} r^2 (h - h') + \frac{r^2 \pi h'}{2}$$

$$+ [-16 r^3 + 12 r^2 s - s^3 - 12 r^2 \pi (a - r) + 12 b r (a - x)] \frac{h}{24a}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke: $ODC \sim M'FC$ ergiebt sich

$$(h - h') : r = h : a \quad \text{oder}$$

$$h - h' = \frac{rh}{a}$$

Dieser Wert und der Wert für h' aus 6. in der Gleichung für v eingesetzt, ergiebt:

$$v = \frac{16 r^3 h}{24 a} + \frac{12 r^2 \pi (a - r) h}{24 a}$$

$$+ [-16 r^3 + 12 r^2 s - s^3 - 12 r^2 \pi (a - r) + 12 b r (a - r)] \frac{h}{24a}$$

oder

$$v = [12 r^2 s - s^3 + 12 b r (a - r)] \frac{h}{14 a}$$

Hieraus ergiebt sich

$$v = \left[s \left(r^2 - \frac{s^2}{12} \right) + b r (a - r) \right] \frac{h}{2a} \qquad 11.$$

Für den Cylinderhuf mit kreisförmiger Grundfläche ist $b = 2 r \pi$, $a = 2r$, $s = 0$ und Gleichung 11. wird

$$v = \tfrac{1}{2} r^2 \pi h$$

Ist $b = r\pi$, $a = r$, $s = 2r$, so erhält man aus 11. die Inhaltsformel für den Cylinderhuf mit halbkreisförmiger Grundfläche wie I, also

$$v = \tfrac{2}{3} r^2 h.$$

Um die Mantelfläche des Cylinderhufes zu berechnen, zerlege dieselbe wieder wie in I. in sehr kleine Dreiecke $g_1, g_2, g_3, g_4, \ldots$ und verbinde die Eckpunkte mit M', dann ist der Cylinderhuf in Pyramiden zerlegt, deren Spitzen alle in M' liegen. Die Höhen aller Pyramiden mit Ausnahme der Kreissegmentpyramide, deren Grundfläche das Segment $\frown{ADB}$ und deren Höhe h' ist, sind gleich r.

Mithin ist auch

$$v = (g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \ldots) \frac{r}{3} + \left[\frac{br}{2} + \frac{s(a-r)}{2}\right] \frac{h'}{3}.$$

Ferner ist

$$v = (12r^2 s - s^3 + 12br(a-r)] \frac{h}{24a}$$

Der Ausdruck $(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \ldots)$ bezeichnet die Mantelfläche M des Cylinderhufes.

$$\frac{Mr}{3} + [br + s(a-r] \frac{4h'}{24} = [12r^2 s - s^3 + 12br(a-r)] \frac{h}{24a}$$

Der Wert für h' aus 6. eingesetzt, ergiebt:

$$\frac{Mr}{3} = [12r^2 s - s^3 + 12br(a-r)] \frac{h}{24a} - [4br(a-r) + 4s(a-r)^2] \frac{h}{24}$$

oder

$$M\frac{r}{3} = [8r^2 s - s^3 + 8br(a-r) - 4a^2 s + 8ars] \frac{h}{24a} \qquad 12.$$

Aus 8. folgt:

$$8ars = s^3 + 4a^2 s$$

Dies in 12. eingesetzt, giebt

$$M\frac{r}{3} = [8r^2 s + 8br(a-r)] \frac{h}{24a} = [rs + b(a-r)] \frac{h}{a} \cdot \frac{r}{3}$$

oder

$$M = [rs + b(a-r)] \frac{h}{a} \qquad 13.$$

Der Mantel des kreisförmigen Cylinderhufes ergiebt sich aus 13. für $a = 2r$, $b = 2r\pi$, $s = 0$; also

$$M = r\pi h$$

Für $a = r$, $b = r\pi$, $s = 2r$ wird 13

$$M = 2rh$$

Dies ist der Mantel eines halbkreisförmigen Cylinderhufes.

III.

In I. ist der Cylinderhuf für den Fall $a = r$ und in II. für den Fall $a > r$ behandelt worden, in III. folgt die Behandlung für den Fall $a < r$.

Figur III. Der Cylinderhuf habe zur Grundfläche das Segment $\widehat{ADB}$ und die Höhe $CD = h$. Ergänze den Cylinderhuf zu einem solchen mit der halbkreisförmigen Basis EFE' und mit der Höhe $CF = h'$ und lege durch Linie AB eine zum Halbkreis EFE' senkrechte Ebene, die den Halbkreis in $A'B'$ schneidet. Bezeichne den Inhalt des zu berechnenden Cylinderhufes mit v, den Cylinderhuf mit halbkreisförmiger Basis mit v_1, den Kreissegment-Cylinder $ADBB'FA'$ mit v_2 und den Teilcylinderhuf $EE'BA'AB$ mit v_3. Es ist dann

$$v = v_1 - (v_2 + v_3)$$

Die Inhaltsformel für v_1 ist

$$v_1 = \tfrac{2}{3} r^2 h'.$$

Die Inhaltsformel für v_2 ist

$$v_2 = \left[\frac{br}{2} - \frac{(r-a)s}{2}\right](h'-h),$$

wo $AB = A'B' = s$, $DO = a$, also

$$MO' = FM - FO' = r - a, \quad \text{und} \quad \widehat{ADB} = b \text{ ist.}$$

Zur Berechnung des Teilcylinderhufes v_3 zerlege denselben durch zwei durch A und B gehende und zur Ebene EFE' senkrechte Schnittebenen in zwei gleiche Körper

$$v_4 = AA'HE = BB'H'E' \quad \text{und}$$

in das gerade Prisma v_5, dessen Grundfläche $AA'H$ und dessen Höhe $A'B' = s$ ist, so dass:

$$v_3 = 2v_4 + v_5$$

Für den Körper v_4, wie leicht aus der Figur III. ersichtlich, gilt die Simpson'sche Regel; mithin erhält man

$$v_4 = \left[\frac{A'H \, . \, AA'}{2} + \frac{4KL \, . \, JL}{2} + 0\right]\frac{EH}{6}$$

Setzt man $A'H = MO' = r - a$, $AA' = h' - h$, $KL = \frac{s''}{2}$, $JL = h''$, $EH = r - \frac{s}{2}$, so ist

$$v_4 = \left[\frac{(r-a)(h'-h)}{2} + \frac{4s'h''}{4}\right]\frac{r-\frac{s}{2}}{6}. \qquad 16.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$OO'M \sim CDO \quad \text{und} \quad JKL \sim COD$$

folgt:

$$(h'-h):(r-a) = h:a \quad \text{oder}$$

$$h'-h = \frac{(r-a)h}{a} \quad \text{und}$$

$$h'':\frac{s''}{2} = h:a \quad \text{oder}$$

$$h'' = \frac{s'h}{2a}.$$

Diese Werte in 16. eingesetzt, giebt

$$v_4 = \left[\frac{(r-a)^2}{2a} + \frac{4s''^2}{8a}\right] \cdot \frac{2r-s}{12} \cdot h$$

Nun ist (siehe II. 3.):

$$\frac{s''^2}{4} = \frac{12r^2-4rs-s^2}{16}; \quad \text{also ist}$$

$$v_4 = \left[\frac{(r-a)^2}{2a} + \frac{12r^2-4rs-s^2}{8a}\right]\frac{2r-s}{12}h, \quad \text{oder}$$

$$v_4 = [16r^2-8ar+4a^2-4rs-s^2]\frac{2r-s}{96 \cdot a}h$$

Mit $(2r-s)$ die Klammer multiplicirt, giebt

$$v_4 = (32r^3-16ar^2+8a^2r-24r^2s+2rs^2+8ars-4a^2s+s^3)\frac{h}{96a}$$

Aus II. 8. folgt

$$8ars = s^3+4a^2s$$

Dies eingesetzt und mit 2 gekürzt, giebt:

$$v_4 = (16r^3-8a^2r+4a^2r-12r^2s+rs^2+s^3)\frac{h}{48a}$$

Nach II. 8.:

$$8ar^2 = rs^2+4a^2r; \quad \text{also}$$

$$v_4 = (16r^3-12r^2s+s^3)\frac{h}{48a} \qquad 17.$$

$$M = [-2r^2 + rs - r\pi(a-r) + b\,.\,(a-r)]\,\frac{h'}{a-r} \quad \text{oder}$$

$$M = [r(s-2r) + (a-r)(b-r\pi)]\,\frac{h'}{a-r}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke: $OMM' \backsim M'FC$ folgt

$$h' : a - r = (h - h') : r \quad \text{oder}$$

$$h' = \frac{(a-r)(h-h')}{r}, \quad \text{mithin}$$

$$M = [r(s-2r) + (a-r)(b-r\pi)]\,\frac{h-h'}{r}$$

Für $a = r,\ s = 2r,\ b = r\,.\,\pi$ ist $M = 0$

Für $a = 2r,\ s = 0,\ \left.\begin{array}{l} h = 2h' \\ b = 2r\pi \end{array}\right\}$ ist

$$M = [-2r^2 + r^2\pi]\,\frac{h'}{r} = (r\pi h' - 2rh')$$

Berechnung der Mantelflächen AEA' und $BE'B'$ des Teilcylinderhufes $v_3 = EE'B'A'AB$. (Siehe Figur III.)

Zerlege die Mantelflächen M in sehr kleine Dreiecke und verbinde die Eckpunkte mit M. Es ist dann

$$v_3 = M\frac{r}{3} + s(h'-h)\,\frac{r-a}{3}, \quad \text{da} \quad h' - h = \frac{(r-a)h}{a}$$

ist, so erhält man

$$v_3 = M\frac{r}{3} + (r-a)^2 s\,\frac{h}{3}.$$

Nach III., 18. ist

$$v_3 = [-16r^3 - 12r^2 s + s^3 + 12(r-a)^2 s]\,\frac{h}{24a}$$

Hieraus folgt:

$$M\frac{r}{3} = [16r^3 - 12r^2 s + s^3 + 4(r-a)^2 s]\,\frac{h}{24a}.$$

$$(r-a)^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}.$$

Dies eingesetzt, giebt:

$$M\frac{r}{3} = (16r^3 - 8r^2 s)\frac{h}{24\,a},$$

mithin ist

$$M = (2r^2 - rs)\frac{h}{a}$$

Setze für $h = \frac{ah'}{r}$:

$$M = (2r^2 - rs)\frac{h'}{r}.$$

Für $a = 0$, ist $s = 0$, also $M = 2rh'$.

Für $a = r$, ist $s = 2r$, also $M = 0$.

V.

Berechnung des Inhaltes des Cylinderhufes, dessen Grundfläche eine halbe Ellipse ist. Figur IV.

Es ist $DD'' = 2a$ die grosse Achse und $AB = 2b$ die kleine Achse einer Ellipse, $CD = h$ die Höhe des Cylinderhufes, $\triangle\, CDM$ die mittlere Querschnittsfigur.

Nach der Simpsonschen Regel ist dann:

$$v = \frac{2abh}{3}.$$

Die Simpson'sche Regel ist hier anwendbar, denn jeder zu $\triangle\, CDM$ parallele Querschnitt überschreitet den dritten Grad nicht.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CDM und $C'D'M'$ folgt

$$h' = \frac{ux}{a}.$$

Dieser Wert für h' wandelt die Flächeninhaltsformel für

$$\triangle\, C'D'M' = \frac{h'x}{2} \text{ um in:}$$

$$\triangle\, C'D'M' = \frac{x^2 h}{2a}.$$

Nun ist die Gleichung einer Ellipse, dessen Coordinatenanfangspunkt A ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(b^2-y)^2}{b^2} = 1; \text{ hieraus folgt}$$

$$x^2 = \frac{a^2 y(2b-y)}{b^2}, \text{ also}$$

$$\triangle C'D'M' = \frac{ay(2b-y)}{b^2};$$

d. h. jeder zu $\triangle$ *CDM* parallele Querschnitt ist vom zweiten Grade inbezug auf die y_2Achse.

Nunmehr lässt sich auch der Inhalt eines aus einem schiefen Cylinder ausgeschnittenen Cylinderhufes mit halbkreisförmiger Grundfläche leicht bestimmen. Figur V.

Man legt durch $AB = 2r$ den Normalschnitt; dieser ist eine halbe Ellipse, deren halbe grosse Achse $MD' = a$ und deren kleine Achse $AB = 2r$ ist. Es ist dann:

Cylinderhuf $ADBC$ = Cylinderhuf $AD'BC$ — Cylinderhuf $AD'BD$.

Es ist:

$$AD'BC = \frac{2arh'}{3} \quad \text{und} \quad AD'BD = \frac{2ar(h'')}{3},$$

also ist Cylinderhuf

$$ADBC = \frac{2arh'}{3} - \frac{2arh''}{3} = \frac{2ar(h'-h'')}{3} \quad \text{oder}$$

$$v = \frac{2arh}{3}, \quad \text{wo} \quad h = h' - h'' \text{ ist.}$$

Bezeichnet man den Neigungswinkel, den die beiden Ebenen ADB und $AD'B$ bilden mit α, dann ist $a = r\cos\alpha$, also

$$v^2 = \frac{2r^2\cos\alpha}{3}h.$$

VI.

Schwerpunktsbestimmungen.

Sieht man den Cylinderhuf als ein einseitig schief abgeschnittenes grades Prisma an, so ergeben sich nach den Sätzen:

1) Der Mantel eines einseitig schief abgeschnittenen graden Prismas ist gleich dem Produkt aus dem Umfange des Mantels und der durch den Schwerpunkt des Umfangs der Grundfläche gehenden

Achse des Prismas. 2) Der Rauminhalt eines einseitig schief abgeschnittenen graden Prismas ist gleich dem Produkt aus der Grundfläche und der durch den Schwerpunkt derselben gehenden Achse, folgende allgemeine Formeln

1) für den Mantel $M = u \,.\, m$

2) für den Rauminhalt $V = f \,.\, m,$

wo u der Umfang des Mantels und f die Grundfläche des Prismas, m die durch den Schwerpunkt des Umfangs des Mantels beziehungsweise der Grundfläche gehende Achse bedeutet.

1. Der Schwerpunkt der Halbkreisfläche. Fig. VI.

Mit Rücksicht auf I. ist für den Cylinderhuf:

$$v = \tfrac{2}{3} r^3 h = f \,.\, m.$$

Aus $h : m = r : x$, wo x die Entfernung des Schwerpunktes der Grundfläche vom Mittelpunkte des Grundkreises ist, ist

$$x = \frac{hx}{r}. \text{ Man erhält:}$$

$$x = \frac{2r^3}{3f}, \text{ oder da } f = \frac{r^2\pi}{2} \text{ ist,}$$

$$x = \frac{4r}{3\pi}.$$

2. Der Schwerpunkt der Halbkreislinie.

Aus I. ist:

$$M = 2rh, \text{ mithin}$$

$$x \,.\, m = 2rh \text{ oder}$$

$$u \,.\, \frac{hx}{r} = 2rh; \text{ also}$$

$$x = \frac{2r^2}{u} = \frac{2r}{\pi}.$$

3. Der Schwerpunkt eines Kreissektors. Figur VII.

Nach III. ist:

$$v_3 = (8r^3 - s^3)\,\frac{h}{12a}.$$

Schneidet man aus diesem Körper die Pyramide, deren Grundfläche $AA'B'B$ und deren Höhe $r-a$ ist, also Pyramide $= \frac{h's(r-a)}{3}$ aus, so erhält man für den übrig bleibenden Körper

$$v = (8r^3 - s^3)\frac{h}{12a} - \frac{h's(r-a)}{3}, \quad \text{oder da} \quad h' = \frac{(r-a)h}{a} \quad \text{ist,}$$

$$v = (8r^3 - s^3)\frac{h}{12a} - \frac{(r-a)^2 h}{3a} \quad \text{oder}$$

$$v = (8r^3 - s^3)\frac{h}{12a} - (4r^2 - s^3)\frac{h}{12a}, \quad \text{mithin}$$

$$v = (8r^3 - 4r^2 s)\frac{h}{12a} = (2r^3 - r^2 s)\frac{h}{3a}.$$

Die Hälfte von v ist ein pyramidenartiger Körper, dessen Grundfläche der Kreissektor und dessen Höhe h' ist. Auch für diesen gilt die Formel $V = f.m$; also es ist

$$f.m = (2r^3 - r^2 s)\frac{h}{6a}.$$

Es ist $h : m = a : x$ oder

$$m = \frac{hx}{a}, \quad \text{mithin}$$

$$x = \frac{r^2(2r-s)}{6f}.$$

Dies ist der Abstand des Schwerpunkts von einem Grenzradius.

Der Schwerpunkt liegt auch auf der Winkelhalbirenden des Kreissektors.

Um den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkt der Kreisfläche zu berechnen, bestimme man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MSP und $B'F'E'$, $PS = x$ aus

$$MS = x', \quad B'E' = s' \quad \text{und} \quad FE' = \frac{2r-s}{2}; \quad \text{es ist}$$

$$x = \frac{2(2r-s)x'}{2 \,.\, s'}.$$

Setzt man die Werte für x einander gleich, also

$$\frac{(2r-s)x'}{2s'} = \frac{r^2(2r-s)}{6f},$$

so ergiebt sich, wenn noch für $f = \frac{br}{2}$ gesetzt wird:

$$x' = \frac{2r \,.\, s'}{3 \,.\, b} = \frac{2}{3} \,.\, \frac{r \,.\, s'}{b}.$$

4. Der Schwerpunkt eines Kreissegments. Fig. VIII.

Der Inhalt eines Cylinderhufes, dessen Grundfläche ein Kreissegment, ist nach II:

$$v = \frac{h}{2a}\left[s\left(r - \frac{s^2}{12}\right) + br(a - r)\right] = f \,.\, m.$$

Bezeichnet x den Schwerpunktsabstand vom Centrum, so erhält man

$$m = \frac{h(x + a - r)}{a}, \text{ also}$$

$$f \,.\, \frac{h(x + a - r)}{a} = \frac{h}{2a}\left[s\left(r - \frac{s^2}{12}\right) + br(a - r)\right]; \text{ hieraus folgt:}$$

$$x = \frac{\frac{1}{2}\left[s\left(r - \frac{s^2}{12}\right) + br(a - r)\right] - (a - r) \,.\, f}{f}$$

Für $f = \frac{br}{2} + \frac{s(a - r)}{2}$ ergiebt sich:

$$x = \frac{\frac{s}{2}\left[r^2 - \frac{s^2}{12} - a^2 + 2ar - r^2)\right]}{f}.$$

Nun ist

$$2ar = \frac{s^2}{4} + a^2; \text{ dies eingesetzt giebt}$$

$$x = \frac{s^3}{12f}$$

5. Der Schwerpunkt eines Kreisbogens.

Die Mantelfläche eines Cylinderhufes ist nach II.:

$$M = \frac{h}{a}[(a - r)b + rs] = U \,.\, m.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn

$$m = \frac{h(x + a - r)}{a} \text{ und } U = b \text{ gesetzt wird:}$$

$$x + (a - r) = [(a - r)b + rs]\frac{1}{b}$$

$$x = \frac{rs}{b}.$$

Dies ist der Schwerpunktsabstand eines Kreisbogens vom Mittelpunkt.

6. Schwerpunktsabstand eines halben Segments vom Halbirungsradius. Fig. IX.

Um diesen zu finden, benutze man aus III. die Gleichung

$$v_4 = (16r^3 - 12r^2s + s^3)\frac{h}{48a}.$$

Ferner mit Rücksicht auf die Verhältnisgleichung:

$$m : x = h : a \quad \text{oder}$$

$$m = \frac{x . h}{a} \quad \text{ergiebt sich aus}$$

$$f . m = (16r^3 - 12r^2s + s^3)\frac{h}{48a}$$

$$x = \frac{16r^3 - 12r^2s + s^3}{48f}.$$

7. Schwerpunktsabstand eines Kreisabschnittes, der vom Durchmesser und einer diesem parallelen Sehne und den zwischen diesen Linien liegenden Kreisbögen begrenzt ist. Fig. IX.

Aus III. ergiebt sich

$$v_3 = f' . m' = (8r^3 - s^3)\frac{h}{12a}.$$

Für $m = \frac{hx'}{a}$ eingesetzt giebt:

$$x' = \frac{8r^3 - s^3}{12f}.$$

8. Schwerpunktsabstand vom Mittelpunkt des in Figur X. ausgezogenen Linienzuges zu bestimmen.

Aus IV. erhält man

$$M = \frac{hr}{a}(2r - s);$$

hierzu addire man das Rechteck $s(h' - h)$, dann ist die volle Mantelfläche: Fig. IX.

$$M' = \frac{hr}{a}(2r - s) + (h' - h)s.$$

$$h' - h = \frac{h(r-a)}{a}.$$

Man erhält:

$$M' = \frac{h}{a}(2r^2 - as);$$ mithin ist, wenn in:

$$Um = \frac{M}{a}(2r^2 - as) \quad \text{für} \quad m = \frac{hx}{a} \text{ gesetzt wird,}$$

$$x = \frac{2r^2 - as}{U}, \quad \text{wo} \quad U = b + s \text{ ist.}$$

9. Schwerpunktsabstand eines Kreisabschnittes, der von zwei parallelen Sehnen und den zwischen ihnen liegenden Kreisbögen begrenzt ist, von einer der Begrenzungssehnen. Fig. XI.

Es muss zunächst derjenige Teil eines Cylinderhufes, der zur Grundfläche den vorgeschriebenen Kreisabschnitt hat, berechnet werden. Man erhält diesen aus dem Cylinderhuf durch einen senkrecht zur Grundfläche ABC und parallel mit AB gelegten Schnitt durch EE'. Zur Ermittelung des Rauminhaltes von $ABE'EA'B'$ legt man durch $A'B'$ eine zur Grundfläche parallele Schnittebene. Nunmehr ist

Teilcylinderhuf $ABE'EA'B'$ = Cylinderhuf $ABCD$ — Cylinderhuf $A'B'C'D$ — Kreissegmentcylinder $EE'CC'A'B'$.

Für $AB = s$, $A'B' = s'$, $CM = a$, $C'M' = a'$, $DC = h$, $DC' = h'$

ergiebt sich aus II. die Gleichung:

$$v = \frac{h}{2a}\left[s\left(r^2 - \frac{s^2}{12}\right) - br(r-a)\right] - \frac{h-h'}{2(a-a')}\left[s'\left(r^2 - \frac{s'^2}{12}\right) - b'r(r-a')\right]$$
$$= \left[\frac{b'r}{2} - \frac{s'(r-a')}{2}\right](h - h').$$

Man setze $h - h' = h''$, $a - a' = d$, dann erhält man nach Berücksichtigung der Verhältnisgleichungen:

$$h : a = h'' : d \quad \text{und} \quad h' : a' = h'' : d,$$

$$v = \frac{h''}{2d}\left[s\left(r^2 - \frac{s^2}{12}\right) - b \,.\, r(r-a) - s'\left(r^2 - \frac{s'^2}{12}\right)\right.$$
$$\left. + b'r(r-a') - b'rd + s'(r-a')d\right]$$

$$r - a' = r + d - a, \quad b - b' = b''.$$

$$v = \frac{h''}{2d}\left[r^2(s-s') - \frac{1}{12}(s^3 - s'^3) - b''r(r-a) + s'(r+d-a)d\right]$$
$$= f \cdot m$$

$$m : h'' = x : d.$$

Aus der Inhaltsgleichung erhält man demnach:

$$x = \frac{r^2(s-s') - \frac{1}{12}(s^3 - s'^3) - b''r(r-a) + s'(r+d-a)d}{2 \cdot f},$$

Dies ist der Schwerpunktsabstand von der Grenzsehne AB.

Man setze

$$x + (r-a) = x' \quad \text{und} \quad f = \frac{b''r}{2} - \frac{s(r-a)}{2} + \frac{s'(r+d-a)}{2}$$

Es ergiebt sich:

$$x' = \frac{r_2(s - s') - \frac{1}{12}(s^3 - s'^3) - b''r(r-a) + s'(r+d-a)d + b''r(r-a) - s(r-a)^2 + s'(r+d-a)(r-a)}{2f}$$

$$x' + \frac{r^2(s-s') - \frac{1}{12}(s^3 - s'^3) - s(r-a)^2 + s'(r-a')^2}{2f}.$$

Dies ist der Schwerpunktsabstand eines Kreissegments mit parallelen Sehnen vom Mittelpunkt des Kreises.

10. Schwerpunktsabstand des in der Figur ausgezogenen Linienzuges zu bestimmen. Fig. XII.

Aus III. ergiebt sich für die Mantelflächen:

$$M = [rs - b(r-a)]\frac{h}{a}, \quad M' = [rs' - b'(r-a')]\frac{h'}{a}, \quad M'' = b'(h-h')$$

Man erhält dann für den Mantel M des Teilcylinderhufes $EABE'B'A'$

$$M = M - M' - M'' + s'(h-h'), \quad \text{also}$$

$$M = [rs - b(r-a)]\frac{h''}{d} - [rs' - b'(r-a')]\frac{h''}{d} - b'd\frac{h''}{d} + s'd \cdot \frac{h''}{d},$$

wo für $\frac{h}{a} = \frac{h''}{d}$ steht.

$$M = \frac{h''}{d}[r(s-s') - b''(r-a) + s'd] = U \cdot m.$$

Da $m = \frac{h''x}{d}$ ist, so ergiebt sich nach Auflösung der Gleichung inbezug auf x:

$$x = \frac{r(s-s') - b''(r-a) + s'd}{U}$$

Dies ist der Schwerpunktsabstand von der Sehne s.

Für den Schwerpunktsabstand vom Mittelpunkt des Kreises ist

$$x' = x + r - a = \frac{r(s-s') + s'(r-a')}{U}$$

11. Schwerpunktsabstand von dem Halbierungsradius eines halben Kreisabschnittes, der von zwei halben parallelen Sehnen und den zwischen ihnen liegenden Kreisbogen begrenzt ist.

Figur XIII. Man berechne nach der Simpson'schen Formel den Teilcylinderhuf $A'A''B''B'C'C''$, bezeichne $A'B' = s'$, $A''B'' = s''$, $A'''B''' = s'''$, $B'C' = h'$, $B''C'' = h''$, $B'''C''' = h'''$, $A'A'' = a$; es ist

$$v = \left[\frac{s'h'}{2} + \frac{4s''' \,.\, h'''}{2} + \frac{s''h''}{2}\right]\frac{a}{6}.$$

Ist h^0 die Höhe des Cylinderhufes und r der Radius der Halbkreisfläche, dann ist

$$h' : s' = h'' : s'' = h''' : s''' = h : r, \quad \text{und}$$

$$m : x = h : r. \quad \text{Man erhält:}$$

$$v = f \,.\, m = \frac{f \,.\, x \,.\, h}{r} = \frac{a \,.\, h}{12\,r}(s'^2 + 4s'''^2 + s''^2). \quad \text{Hieraus ist}$$

$$x = \frac{a(s'^2 + 4s'''^2 + s''^2)}{12f}$$

VII.

Berechnung des Rauminhaltes und der Oberfläche von einigen Rotationskörpern mit Hilfe der Guldinschen Regeln.

Nach der Guldinschen Regel ist der Rauminhalt

$$v = f \,.\, 2x\pi,$$

und die Oberfläche (Mantel)

$$M = u \,.\, 2x\pi,$$

wo f die Fläche, u der Umfang der Fläche und x der Schwerpunktsabstand der Fläche beziehungsweise des Umfanges von der Umdrehungsachse ist.

1. Rauminhalt des Kugelsektors.

Nach VI. (3) ist der Schwerpunktsabstand von einem Grenzradius eines Kreissektors

$$x = \frac{r^2(2r - s)}{6f}; \text{ mithin ist}$$

$$v = \frac{r^2(2r - s)}{3} \pi.$$

Nun ist, wie leicht aus der Figur VII. ersichtlich, $\frac{2r - s}{2} = h$ (Höhe des Kugelsegments), also

$$v = \frac{2r^2\pi}{3} h.$$

2. Rauminhalt eines Kugelsegments. Fig. IX.

Diesen erhält man aus VI. 6.:

$$x = \frac{16r^3 - 12r^2s + s^3}{48f}$$

$$v = \frac{16r^3 - 12r^2s + s^3}{24} \pi.$$

Bezeichnet h die Höhe des Kugelsegments, dann ist $s = 2(r - h)$, mithin

$$s^3 = 8r^3 - 24r^2h + 24rh^2 - 8h^3 \quad \text{und}$$
$$-12r^2s = -24r^3 + 24r^2h.$$

Diese Werte eingesetzt ergeben:

$$v = \frac{24r^2h^2 - 8h^3}{24} \pi = \frac{h^2\pi}{3} (3r - h).$$

3. Rauminhalt eines Kugelringes. Fig. XIV.

Einen Kugelring erhält man durch Rotation eines Kreissegmentes, dessen zugehörige Sehne s mit der Umdrehungsachse einen spitzen Winkel bildet.

Nach VI. (4) ist:

$$x = \frac{s^3}{12f}; \text{ ferner ist:}$$

$$y : x = h : s \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{h \cdot x}{s} = \frac{h \cdot s^2}{12f}$$

wo y der Schwerpunktsabstand des Segments von der Umdrehungsachse ist.

$$v = 2yf \cdot \pi = \frac{h\,s^2}{6}\pi.$$

4. Rauminhalt eines Körpers, der durch Umdrehung eines Kreissegmentes um seine Sehne entsteht. Fig. XV.

Der Schwerpunktsabstand von der Sehne ergiebt sich ebenfalls aus VI. (4), indem man

$$x' = x + a - r \quad \text{setzt. Es ist dann}$$

$$x' = \frac{s\left(r^2 - \frac{s^2}{12}\right) + br(a - r)}{2f}, \quad \text{mithin}$$

$$v = \left[s\left(r^2 - \frac{s^2}{12}\right) + br(a - r)\right]\pi.$$

Durch Drehung eines halben Segments um die halbe Sehne entsteht die Kuppel eines Klostergewölbes, deren Rauminhalt ist:

$$v = \frac{1}{2}\left[s\left(r^2 - \frac{s^2}{12}\right) + br(a - r)\right]\pi.$$

5. Die Mantelfläche der Kuppel eines Klostergewölbes.

Man setze in VI, (5) $x' = x + (a - r)$; es ist

$$M = 2x'b\,\pi = 2[(a - r)b + rs]\,\pi.$$

Die Mantelfläche der Kuppel ist nur die Hälfte, also

$$M' = [(a - r)b + rs]\,\pi.$$

6. Rauminhalt eines Körpers, der durch Drehung eines Kreisabschnitts mit parallelen Grenzsehnen um die grössere derselben entsteht. Fig. XVI.

Man erhält aus VI. (9):

$$v = 2x\pi f = \left[r^2(s-s') - \frac{1}{12}(s^3 - s'^3) - br''(r-a) + s'(r+d-a)d\right]\pi$$

Zieht man hiervon den Cylinder, der durch Drehung des Rechtecks $FF'E'E$ um FF' entsteht, also $s' \cdot d^2 \cdot \pi$ ab, so erhält man

$$v = \left[r^2(s-s') - \frac{1}{12}(s^3 - s'^3) - b''r(r-a) + s'(r-a)d\right]\pi.$$

$\frac{v}{2}$ ist der Rauminhalt eines Körpers, der durch Drehung des Teilsegments AFE um AF entsteht; es ist

$$\frac{v}{2} = \left[r^2(s-s') - \frac{1}{12}(s^3 - s'^3) - b''(r-a) + s'(r-a)d\right]\frac{\pi}{2}$$

die allgemeine Formel für den Rauminhalt der Kuppel eines Klostergewölbes.

7. Allgemeine Formel für die Mantelfläche der Kuppel eines Klostergewölbes.

Diese ergiebt sich aus VI. (10). Es ist:

$$x = \frac{r(s-s') - b''(r-a) + s'd}{u}, \quad \text{mithin}$$

$$M = \frac{2x\pi u}{2} - \frac{2d\pi s'}{2} = \left[r(s-s') - b''(r-a)\right]\pi.$$

8. Rauminhalt des Körpers, der durch die Drehung der Fläche $F\overset{\frown}{ECE'}F'$ um FF' entsteht. Fig. XVII. und Fig. XI.

Dieser lässt sich aus dem Unterschiede der Rauminhalte v aus VII. (4) und VII. (6) ableiten. Es ist

$$v = \left[s\left(r^2 - \frac{s^2}{12}\right) + br(a-r) - r^2(s-s') + \frac{1}{12}(s^3 - s'^3) \right.$$
$$\left. + br''(r-a) - s'(r-a)d\right]\pi$$

$$v = \left[(b-b'')r(a-r) + s'r^2 - \frac{1}{12}s'^3 + s'(a-r)d\right]\pi.$$

Setze $b - b'' = b' = \widehat{EE'}$, man erhält:

$$v = \left[(b'r + s'd)(a - r) + s'\left(r^2 - \frac{s'^2}{12}\right)\right] . \pi$$

$$= \left[s'\left(r^2 - \frac{s'^2}{12}\right) - (b'r + s'd)(r - a)\right] . \pi$$

Diese Formel dürfte sich empfehlen für die Inhaltsberechnung eines Fasses.

9. Berechnung der Kugelschicht. Fig. XIII.

Wenn ein halber Kreisabschnitt mit parallelen Grenzsehnen um den Halbirungsradius rotiert, so entsteht eine Kugelschicht, deren Inhalt nach VI. (11) ist:

$$v = (s'^2 + 4s'''^2 + s''^2)\frac{a\pi}{6}.$$ Setze $A'''E = p$, dann ist

$$s'^2 = \left(p + \frac{a}{2}\right)\left(2r - p - \frac{a}{2}\right), \quad s''^2 = \left(p - \frac{a}{2}\right)\left(2r - p + \frac{a}{2}\right),$$

$$4s'''^2 = 8rp - 4p^2$$

$$s'^2 + 4s'''^2 + s''^2 = 12rp - 6p^2 - \frac{a^2}{2}; \quad s'^2 + s''^2 = 4rp - 2p - \frac{a^2}{2};$$

$$3s'^2 + 3s''^2 + a^2 = 12rp - 6p^2 - \frac{a^2}{2}.$$ Hieraus folgt:

$$v = (3s'^2 + 3s''^2 + a^2)\frac{a\pi}{6},$$ wo a die Höhe der Kugelschicht ist.

XXXVII.

Zwei Zahlenreihen und deren Interpolation.

Von

Heinrich Ruff.

Einleitung.

Die beiden Grundformen der Progressionen sind die arithmetische und die geometrische. Beide zeigen einen einfachen Bau, weil schon durch eine einzige Bildungsgrösse — die Differenz (d) oder den Quotienten (q) — die ganze Reihe aus dem Anfangsgliede (a_1) entsteht.

Complicierter wohl dürfte der Bau einer Zahlenreihe sein, die durch zwei Bildungsgrössen (d und q) aus einem Anfangsgliede (a_1) hervorgegangen ist. Je nach der Art der Zusammensetzung und Aufeinanderfolge der beiden Bildungsgrössen (d und q) wird also ein doppelter Bau der Zahlenreihe zu unterscheiden sein. Entweder wird das zweite Glied der Reihe (a_2) aus dem ersten (a_1) dadurch gebildet, dass zu dem ersten Gliede (a_1) zuerst die Differenz d im algebraischen Sinne addirt, und die so entstandene Summe (a_1+d) sodann mit dem Quotienten (q) multiplicirt wird:

$$a_2 = (a_1 + d)\, q$$

und es geht jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden nach demselben Gesetze hervor

$$a_n = (a_{n-1} + d)\, q$$

oder es entsteht das zweite Glied der Reihe, indem das erste Glied (a_1) mit dem Quotienten (q) multiplicirt und dieses Produkt um die Differenz (d) im algebraischen Sinne vermehrt wird:

$$a_2 = a_1 q + d$$

und allgemein: $$a_n = a_{n-1} q + d.$$

Wir wollen die auf erstangeführte Weise entstandene Progression eine arithmetisch-geometrische, die zweite hingegen eine geometrisch-arithmetische Reihe nennen. Indem wir ferner für die erstgenannte Gattung von Reihen das Symbol $R(a_1, d, q)$, für eine Reihe der zweiten Art das Symbol $R(a_1, q, d)$ einführen, gehen wir daran, den Bau dieser Zahlenreihen zu untersuchen.

I. Capitel.

Die arithmetisch-geometrische Reihe.

$R(a_1, d, q)$.

§ 1.

Für diese findet man:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1, \\
a_2 &= (a_1+d)q = a_1q+dq &&= a_1q+dq, \\
a_3 &= (a_2+d)q = a_1q^2+dq^2+dq &&= a_1q^2+dq(q+1), \\
a_4 &= (a_3+d)q = a_1q^3+dq^3+dq^2+dq &&= a_1q^3+dq(q^2+q+1), \\
a_5 &= (a_4+d)q = a_1q^4+dq^4+dq^3+dq^2+dq &&= a_1q^4+dq(q^3+q^2+q+1), \\
&\ldots \\
a_n &= a_1q^{n-1}+dq(q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots+q^2+q+1).
\end{aligned}$$

$$1) \qquad a_n = a_1q^{n-1}+dq\frac{q^{n-1}-1}{q-1}.$$

Der Schluss vom n^{ten} auf den $(n+1)^{\text{ten}}$ Fall ergiebt:

$$a_{n+1} = (a_n+d)q = a_1q^n+dq^2\frac{q^{n-1}-1}{q-1}+dq = a_1q^n+dq\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Damit ist die Allgemeingültigkeit der Formel 1) für das n^{te} Glied von $R(a_1, d, q)$ erwiesen.

§ 2.

Soll die Summenformel für diese Reihe abgeleitet werden, so ist:

$$\begin{aligned}
S_n = a_1 &+(a_1q+dq)+(a_1q^2+dq^2+dq)+(a_1q^3+dq^3+dq^2+dq) \\
&+(a_1q^4+dq^4+dq^3+\ldots+dq^2+dq)+\ldots \\
&+(a_1q^{n-2}+dq^{n-2}+dq^{n-3}+\ldots+dq^2+dq) \\
&+(a_1q^{n-1}+dq^{n-1}+dq^{n-2}+\ldots+dq^2+dq),
\end{aligned}$$

$$S_n q = a_1 q + (a_1 q^2 + dq^2) + (a_1 q^3 + dq^3 + dq^2) + (a_1 q^4 + dq^4 + dq^3 + dq^2)$$
$$+ (a_1 q^{n-1} + dq^{n-1} + dq^{n-2} + \ldots + dq^2)$$
$$+ (a_1 q^n + dq^n + dq^{n-1} + \ldots + dq^3 + dq^2),$$

$$S_n(q-1) = a_1 q^n + dq^n + dq^{n-1} + \ldots + dq^3 + dq^2 - a_1 - dq(n-1),$$
$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1) + dq(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q + 1) - ndq.$$
$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} + dq \frac{q^n - 1}{(q-1)^2} - \frac{ndq}{(q-1)},$$
$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} + \frac{dq}{(q-1)^2} [(q^n - 1) - n(q-1)].$$

Setzt man der Kürze halber

$$A = [(q^n - 1) - n(q-1)] \quad \text{und} \quad B = (q^n - 1)(q-1),$$

so folgt

$$2) \qquad S_n = \frac{a_1 B + Adq}{(q-1)^2}.$$

Da Formel 1) allgemeingültig ist, so gilt auch 2) ganz allgemein.

Es möge hier noch ein besonderes Beispiel Platz finden. Es sei die Summe der ersten 5 Glieder (S_5) der Progression $R(a_1 = 1, d = 3, q = 2)$ zu bestimmen.

$$A = [(2^5 - 1) - 5] = 26. \quad B = (2^5 - 1) = 31. \quad S_5 = \frac{31 + 26 . 6}{(2-1)^2} = 187.$$

Probe: $R(a_1 = 1, d = 3, q = 2) = 1, 8, 22, 50, 106, \ldots$
$$S_5 = 187.$$

§ 3.

Wie unmittelbar ersichtlich ist, übergeht $R(a_1, d, q)$ in die geometrische Reihe, wenn $d = 0$ gesetzt wird.[1]) Es ist ebenso klar, dass $R(a_1, d, q)$ für $q = 1$ in die arithmetische Reihe übergeht.[2])

1) Demgemäss übergehen auch die Gleichungen 1) und 2) für $d = 0$ in die bekannten Formeln der geometrischen Reihe:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{und} \quad S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

2) Thatsächlich übergehen die Gleichungen 1) und 2) für $q = 1$ in die bekannten Formeln der arithmetischen Progression. In Gleichung 1) erhält nämlich der Bruch $\frac{q^{n-1} - 1}{q-1}$ für $q = 1$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Werden daher Zähler und Nenner dieses Bruches einzeln nach q differentiirt, und setzt

Um die Bedingungen aufzufinden, unter denen $R(a_1, d, q)$ convergirt, gehen wir von der Ueberlegung aus, dass die Glieder einer convergenten Reihe von einer bestimmten Stelle ab immer kleiner und schliesslich unendlich klein werden müssen. Eine notwendige Convergenzbedingung für $R(a_1, d, q)$ ist also: $\lim_{n=\infty} a_n = 0$.

Ist nun $q > 1$, so wird mit dem wachsenden n auch q^{n-1}, und daher a_n selbst beliebig gross.

Ist dagegen q ein echter Bruch, so nähert sich beim unendlichen Wachsen von n, q^{n-1} ohne Ende der Null und a_n selbst dem endlichen Grenzwerte $\frac{dq}{1-q}$. Es frägt sich mithin: wann wird $\lim_{n=\infty} a_n = \frac{dq}{1-q} = 0$? Dies tritt offenbar ein, wenn $d = 0$ ist. Die Convergenzbedingung $\lim_{n=\infty} a_n = 0$ ist in diesem Falle nicht blos notwendig, sondern auch hinreichend; denn für $d = 0$ und $-1 < q < 1$ übergeht $R(a_1, d, q)$ in die convergirende geometrische Reihe, für welche $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ ist.

Nach Gleichung 1) verschwindet a_n aber auch bei endlichem d für $q = 0$. $R(a_1, d, q = 0)$ übergeht in: a_1, 0, 0, 0, 0, . . . Hier ist $S_n = a_1$. Es ist ferner bemerkenswert, dass a_n in $R(a_1, d, q)$ für $q = -1$ oscillirt; denn für $q = -1$ erhält man:

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = -(a_1 + d) = -a_1 - d,$$
$$a_3 = -(a_2 + d) = a_1,$$

man in den Quotienten der Ableitungen $(n-1)q^{n-2}$, $q = 1$, so folgt der wahre Wert dieses Bruches gleich $(n-1)$ und daher $a_n = a_1 + (n-1)d$. Ebenso findet man in 2) n als den wahren Wert des Bruches $\frac{q^n-1}{q-1}$ für $q = 1$. Für dieses q wird ferner in 2) der Bruch $\frac{(q^n-1)-n(q-1)}{(q-1)^2} = \frac{0}{0}$. Differentiirt man Zähler und Nenner dieses Bruches nach q, so erhält man: $\frac{nq^{n-1}-n}{2(q-1)}$, einen Wert, der für $q = 1$ noch immer gleich $\frac{0}{0}$, also unbestimmt ist. Wiederholt man noch einmal diese Differentiation, so übergeht der Bruch in den Ausdruck: $\frac{n(n-1)q^{n-2}}{2}$ oder für $q = 1$ in $\frac{n(n-1)}{2}$. Daher ist

$$S_n = na_1 + d\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)].$$

$$a_4 = -(a_3+d) = -a_1-d,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2n} = -a_1-d,$$

$$a_{2n+1} = -(a_{2n}+d) = a_1,$$

$$a_{2(n+1)} = -(a_{2n+1}+d) = -a_1-d.$$

u. s. w.

Es ist beispielsweise $R(a_1 = 1,\ d = 2,\ q = -1) = 1,\ -3,\ 1,\ -3,\ 1,\ -3,\ 1, \ldots$ a_n nimmt abwechselnd bald den Wert $(-a_1-d)$, bald den Wert a_1 an, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Die Reihe selbst aber wird bald dem Werte a_1, bald der Null zustreben, wenn ausser $q = -1$ noch $d = 0$ ist.

§ 4.

Wollte man zwischen dem k^{ten} und $(k+1)^{ten}$ Gliede etwa r andere Glieder einschalten so zwar, dass die neu hinzugekommenen r Glieder mit dem k^{ten} und $(k+1)^{ten}$ Gliede in arithmetisch-geometrischer Progression stehen, so hat die neu entstandene Reihe ausser den r eingeschalteten Gliedern noch die Glieder a_k und a_{k+1}, also zusammen $(r+2)$ Glieder. Bezeichnet man die Bildungsgrössen der ursprünglichen Zahlenreihe mit d und q, die der interpolirten Glieder mit δ und $\varkappa$, so ist nach Satz 1

$$a_{k+1} = a_k \cdot \varkappa^{r+1} + \delta\varkappa \frac{\varkappa^{r+1}-1}{\varkappa-1}.$$

Wäre nun δ gegeben, so würde man zur Bestimmung von $\varkappa$ eine Gleichung $(r+2)^{ten}$ Grades erhalten, welche für $r > 2$ im allgemeinen mit elementaren Mitteln nicht lösbar ist. Wir nehmen daher ausser $R(a_1, d, q)$ noch $\varkappa$ als gegeben an und erhalten:

$$\delta = (a_{k+1} - a_k \varkappa^{r+1}) \frac{\varkappa-1}{\varkappa(\varkappa^{r+1}-1)} = m(a_{k+1} - a_k \varkappa^{r+1})$$

wenn $\frac{\varkappa-1}{\varkappa(\varkappa^{r+1}-1)} = m$ gesetzt wird. Es folgt ferner:

$$\delta = [(a_k+d)q - a_k \varkappa^{r+1}]\,m$$

und hieraus:

$$\delta = [dq + a_k(q-\varkappa^{r+1})]\,m. \tag{3}$$

In Formel 3) sind die Grössen d, q, $\varkappa$ und daher auch m constant, a_k ist hingegen variabel und ändert sich mit jedem k. Es wäre sohin auch δ variabel und würde nur innerhalb je zweier Grenzzahlen der ursprünglichen Reihe einen unveränderlichen Wert

annnehmen. Soll aber δ für die ganze Reihe constant bleiben, dann müsste der Ausdruck $a_k(q-\varkappa^{r+1})$ in Formel 3) verschwinden. Es muss sohin $(q-\varkappa^{r+1}) = 0$ und $\varkappa = \sqrt[r+1]{q}$ werden, so dass

$$4) \qquad \delta = dqm \qquad \text{ist.}$$

Unschwer dürfte sich auch das Gesetz ermitteln lassen, nach welchem δ bei der fortlaufenden Interpolation sich ändern müsste, wenn $\varkappa$ von $\sqrt[r+1]{q}$ verschieden wäre. Wird für $(q-\varkappa^{r+1}) = p$ gesetzt, so folgt nach 3)

$$\delta_1 = (a_k p + dq)m$$
$$\delta_2 = (a_{k+1} p + dq)m$$

$$\delta_2 - \delta_1 = (a_{k+1} - a_k)pm$$
$$\delta_2 - \delta_1 = [a_k(q-1) + dq]pm.$$

Es wird ferner:

$$\delta_3 - \delta_2 = pm[a_{k+2} - a_{k+1}] = pm[a_{k+1}(q-1) + dq]$$
$$= pmq[(a_k + d)(q-1) + d]$$

$$\delta_3 - \delta_2 = [a_k(q-1) + dq]pmq = q(\delta_2 - \delta_1).$$

Ebenso ist:

$$\delta_4 - \delta_3 = mp(a_{k+3} \quad a_{k+2}) = mp[a_{k+2}(q-1) + dq]$$
$$= mpq[(a_{k+1} + d)(q-1) + d]$$

$$\delta_4 - \delta_3 = pmq[a_{k+1}(q-1) + dq] = pmq^2[(a_k + d)(q-1) + d]$$

$$\delta_4 - \delta_3 = pmq^2[a_k(q-1) + dq] = q(\delta_3 - \delta_2)$$

u. s. w.

Betrachtet man also die aufeinanderfolgenden Differenzen: $\delta_2 - \delta_1$, $\delta_3 - \delta_2$, $\delta_4 - \delta_3$ u. s. w., so ersieht man, dass sie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten q bilden.

Aufgabe. In $R(a_1 = 1,\ d = 1,\ q = 8) = 1, 16, 136, 1096, \ldots$ sollen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern zwei neue Elemente eingeschaltet werden.

$$\varkappa = \sqrt[3]{8} = 2; \quad m = \frac{1}{2(2^3-1)} = \frac{1}{14}; \quad \delta = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

Die interpolirte Reihe lautet mithin:

$$1,\ 3\tfrac{1}{7},\ 7\tfrac{3}{7},\ 16,\ 33\tfrac{1}{7},\ 67\tfrac{3}{7},\ 136,\ 273\tfrac{1}{7},\ 547\tfrac{3}{7},\ 1096, \ldots$$

II. Capitel.

Die geometrisch-arithmetrische Reihe.

$R(a_1, q, d)$.

§ 5.

Für diese findet man:

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = a_1 q + d,$$
$$a_3 = a_2 q + d = a_1 q^2 + d(q+1),$$
$$a_4 = a_3 q + d = a_1 q^3 + d(q^2+q+1),$$
$$a_5 = a_4 q + d = a_1 q^4 + d(q^3+q^2+q+1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = a_1 q^{n-1} + d(q^{n-2}+q^{n-3}+ \ldots +1).$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} + d\frac{q^{n-1}-1}{q-1}. \tag{5}$$

Schluss vom n^{ten} auf den $(n+1)^{\text{ten}}$ Fall:

$$a_{n+1} = a_n q + d = a_1 q^n + d(q^{n-1}+q^{n-2}+ \ldots +1)$$
$$a_{n+1} = a_1 q^n + d\frac{q^n-1}{q-1}$$

womit die Allgemeingültigkeit von 5) erwiesen ist.

§ 6.

Auch die Summenformel von $R(a_1, q, d)$ lässt sich auf ähnliche Weise wie im vorigen Capitel ableiten.

$$\begin{aligned} S_n = {} & a_1 + a_1 q + d + a_1 q^2 + d(q+1) + a_1 q^3 + d(q^2+q+1) + \ldots \\ & + a_1 q^{n-2} + d(q^{n-3}+q^{n-4}+ \ldots +1) \\ & + a_1 q^{n-1} + d(q^{n-2}+q^{n-3}+ \ldots +1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n q = {} & a_1 q + a_1 q^2 + dq + a_1 q^3 + d(q^2+q) + \ldots\ldots \\ & + a_1 q^{n-1} + d(q^{n-2}+q^{n-3}+ \ldots +q) \\ & + a_1 q^n + d(q^{n-1}+q^{n-2}+ \ldots +q), \end{aligned}$$

$$S_n(q-1) = -a_1 - d(n-1) + a_1 q^n + d(q^{n-1}+q^{n-2}+ \ldots +q).$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1} - \frac{d(n-1)}{q-1} + dq\frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2}.$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1} + \frac{d}{(q-1)^2}[q^n - q - (n-1)(q-1)].$$

$$p = q - \varkappa^{r+1} = 0$$

verschwinden und $\varkappa = \sqrt[r+1]{q}$ sein. Es ist sodann

$$8) \qquad \delta = dm\varkappa.$$

Auch die Frage, nach welchem Gesetze sich δ bei der fortlaufenden Interpolation ändern müsste, wenn p von 0 verschieden wäre, lässt sich leicht beantworten. Nach Formel 7) ist:

$$\delta_1 = [a_k p + d] m\varkappa,$$
$$\delta_2 = [a_{k+1} p + d] m\varkappa,$$

woraus:

$$\delta_2 - \delta_1 = mp\varkappa(a_{k+1} - a_k) = mp\varkappa[a_k(q-1) + d].$$
$$\delta_3 = [a_{k+2} p + d] m\varkappa,$$
$$\delta_3 - \delta_2 = mp\varkappa(a_{k+2} - a_{k+1}) = mp\varkappa[a_{k+1}(q-1) + d],$$
$$\delta_3 - \delta_2 = mp\varkappa[(a_k q + d)(q-1) + d] = mp\varkappa[a_k q(q-1) + dq],$$
$$\delta_3 - \delta_2 = mpq\varkappa[a_k(q-1) + d] = q(\delta_2 - \delta_1),$$

u. s. w.

Mithin stehen auch in $R(a_1, q, d)$ die Differenzen $\delta_2 - \delta_1$, $\delta_3 - \delta_2$, u. s. w. in einer geometrischen Progression mit dem Quotienten q.

Aufgabe. In $R(a_1 = 1, q = 16, d = 2)$ sollen zwischen je zwei Gliedern drei neue Elemente eingesetzt werden.

$$R(a_1 = 1, q = 16, d = 2) = 1, 18, 290, 4642, \ldots$$

$$\varkappa = \sqrt[4]{16} = 2; \quad m = \frac{1}{(2^4 - 1)2} = \frac{1}{30}; \quad \delta = \frac{2}{15};$$

daher die interpolirte Reihe:

$$1, 2\tfrac{2}{15}, 4\tfrac{6}{15}, 8\tfrac{14}{15}, 18, 36\tfrac{2}{15}, 72\tfrac{6}{15}, 144\tfrac{14}{15}, 290, 580\tfrac{2}{15},$$
$$1160\tfrac{6}{15}, 2320\tfrac{14}{15}, 4642, \ldots$$

III. Capitel.

Vergleichung beider Reihen.

§ 9.

Fasst man die in Tabelle I übersichtlich zusammengestellten Ergebnisse der §§ 3 und 7 ins Auge, so folgt:

Die beiden unendlichen Reihen mit den gleichen Bildungsgrössen $R(a_1, d, q)$ und $R(a_1, q, d)$ sind — so lange q von 0 verschieden ist — entweder zugleich convergent oder gleichzeitig divergent.

Wenn aber q bei endlichem d zu Null wird, so convergirt $R(a_1, d, q)$ und divergirt $R(a_1, q, d)$.

Diese beiden Reihen sind daher nur bedingt gleichartig, d. h. nur unter der Bedingung $q \gtrless 0$ hat die Convergenz der einen die Convergenz der andern, die Divergenz der einen die Divergenz der andern, das Oscilliren der einen das Oscilliren der andern zur Folge.

Die Gleichartigkeit der beiden Reihen wird jedoch ganz unbedingt, wenn ihnen blos die beiden Bildungsgrössen a_1 und q gemeinsam sind, während die Differenz der geometrisch-arithmetischen Reihe, die wir d_1 nennen wollen, der q-fachen Differenz von $R(a_1, d, q)$ gleicht. Die Erklärung hierfür enthält der folgende

§ 10.

$R(a_1, d, q)$ war charakterisirt durch die beiden Grundformeln 1) und 2)

$$1)\quad a_n = a_1 q^{n-1} + dq \frac{q^{n-1}-1}{q-1}, \qquad 2)\quad S_n = \frac{a_1 B + A dq}{(q-1)^2}.$$

Die geometrisch-arithmetische Reihe hingegen, deren Differenz wir d_1 nennen, ist definirt durch die beiden Grundbeziehungen 5) u. 6)

$$5)\quad a_n = a_1 q^{n-1} + d_1 \frac{q^{n-1}-1}{q-1}, \qquad 6)\quad S_n = \frac{a_1 B + A d_1}{(q-1)^2}.$$

Wie leicht ersichtlich übergeht aber Gleichung 1) in Gleichung 5) und Gleichung 2) in Gleichung 6), wenn $d_1 = dq$ oder $d = \frac{d_1}{q}$ wird. Wir schliessen somit:

Jede arithmetisch-geometrische Reihe mit den Bildungsgrössen a_1, d und q ist zugleich eine geometrisch-arithmetische Reihe mit den Bildungsgrössen a_1, q und $d_1 = dq$.

Bedienen wir uns als eines Beispiels der im § 2 angegebenen Reihe

$R(a_1 = 1,\ d = 3,\ q = 2)$
$= 1, 8, 22, 50, 106, \ldots$

so kann dieselbe zugleich als eine Reihe von der Form

$R(a_1 = 1,\ q = 2,\ d_1 = 6)$

angesehen werden.

Jede geometrisch-arithmetische Reihe mit den Bildungsgrössen a_1, q und d_1 ist zugleich eine arithmetisch-geometrische Reihe mit den Bildungsgrössen a_1, $d = \frac{d_1}{q}$ und q.

So kann die im § 5 angegebene Reihe

$R(a_1 = 1,\ q = 2,\ d_1 = 3)$
$= 1, 5, 13, 29, 61, \ldots$

als eine Reihe von der Form $R(a_1 = 1,\ d = \frac{3}{2},\ q = 2)$ angesehen werden.

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{d}{(q-1)^2}[(q^n - 1) - n(q - 1)].$$

6) $$S_n = \frac{a_1 B + A d}{(q-1)^2}.$$

Da 5) allgemein gültig ist, so gilt auch 6) ganz allgemein.

Aufgabe. Es sei die Summe der ersten 5 Glieder von $R(a_1 = 1, q = 2, d = 3)$ zu bestimmen.

$$A = [(2^5 - 1) - 5] = 26; \quad B = (2^5 - 1) = 31; \quad S_5 = \frac{31 + 78}{(2-1)^2} = 109.$$

Probe: $R(a_1 = 1, q = 2, d = 3) = 1, 5, 13, 29, 61, \ldots$
$S_5 = 109.$

§ 7.

Setzen wir in $R(a_1, q, d)$, $d = 0$, so übergeht diese Reihe in die geometrische; hingegen übergeht $R(a_1, q, d)$ für $q = 1$ in die arithmetische Reihe.[1])

Eine Reihe kann bekanntlich nur dann convergiren, wenn die Werte der einzelnen Glieder nicht blos fortwährend abnehmen, sondern in das Unendliche abnehmen und schliesslich verschwindend klein werden. Das genügt aber noch nicht, um als Bedingung der Convergenz zu gelten. Das schliessliche Verschwinden der Glieder bis zu 0 ist im allgemeinen eine nothwendige, aber keine hinreichende Convergenzbedingung. Es frägt sich also zunächst: Wann wird in $R(a_1, q, d)$, $\lim_{n=\infty} a_n = 0$ und sodann: wird die so ermittelte Convergenzbedingung auch eine hinreichende sein?

Ist $q > 1$, so wird mit dem wachsenden n auch q^{n-1} und daher a_n selbst beliebig gross.

Ist dagegen q ein positiver oder negativer, echter Bruch, so nähert sich beim unendlichen Wachsen von n, q^{n-1} ohne Ende der Null und a_n selbst dem endlichen Grenzwerte $\lim_{n=\infty} a_n = \frac{d}{1-q}$. Dieser Wert wird dann zu Null, wenn $d = 0$ ist.

1) Auch die Ueberführung von 5) und 6) in die Formeln der geometrischen, beziehungsweise der arithmetischen Progression erfolgt in gleicher Weise wie bei $R(a_1, d, q)$.

Die Convergenzbedingung $\lim_{n=\infty} a_n = 0$ ist aber hier nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend; denn für $d=0$ und $-1<q<1$ übergeht $R(a_1, q, d)$ in die convergirende, geometrische Reihe, für welche $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ ist.

Für $q=0$ wird $R(a_1, q, d) = a_1, d, d, d, d, \ldots$

Hier ist $a_n = d$ und $S_n = a_1 + (n-1)d$. Die Reihe divergirt noch immer.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass a_n in $R(a_1, q, d)$ für $=-1$ oscillirt; denn in diesem Falle erhält man:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1, \\
a_2 &= -a_1 + d, \\
a_3 &= -a_2 + d = a_1, \\
a_4 &= -a_3 + d = -a_1 + d, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{2n} &= -a_1 + d, \\
a_{2n+1} &= -a_{2n} + d = a_1, \\
a_{2(n+1)} &= -a_{2n+1} + d = -a_1 + d,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Es ist beispielsweise $R(a_1 = 3, q = -1, d = 2) = 3, -1, 3, -1, 3, -1, \ldots$ a_n nimmt abwechselnd bald den Wert $(-a_1+d)$, bald den Wert $+a_1$ an, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Die Reihe selbst aber wird bald dem Werte a_1, bald der Null zustreben, wenn ausser $q=-1$ noch $d=0$ ist.

§ 8.

Sollen in $R(a_1, q, d)$ zwischen dem k^{ten} und $(k+1)^{\text{ten}}$ Gliede noch r Glieder eingeschaltet werden, welche mit ihren Grenzgliedern selbst in geometrisch-arithmetischer Reihe stehen, so ist, wenn δ und $\varkappa$ die Bildungsgrössen der neuentstandenen Reihe vorstellen, nach Formel 5)

$$a_{k+1} = a_k q + d = a_k \varkappa^{r+1} + \delta \frac{\varkappa^{r+1} - 1}{\varkappa - 1},$$

woraus:

$$\delta = (a_{k+1} - a_k \varkappa^{r+1}) m\varkappa \qquad \text{und}$$

$$\delta = m\varkappa[a_k(q - \varkappa^{r+1}) + d]. \tag{7}$$

Soll nun δ von a_k, dem einzig variabelen Elemente auf der rechten Seite der Gleichung 7) unabhängig sein, so muss

Die arithmetisch-geometrische und die geometrisch-arithmetische Reihe sind daher einander invers, wenn

α) das n^{te} Glied der einen dem ersten Gliede der andern,

β) der Quotient der einen dem reciproken Werte des Quotienten der andern,

und γ die Differenz der einen dem negativen Werte der Differenz der andern gleicht.

Es ist

10) I) $R(a_1, d, q) \stackrel{i}{=} R\left(a_n, \frac{1}{q}, -d\right)$.

Diese Betrachtung liefert uns auch eine Summenformel für die arithmetisch-geometrische Reihe, von welcher a_n, d und q gegeben sind. Wir brauchen blos in 6) für $a_1 \ldots a_n$, für $d \ldots d_1 = -d$ und für $q \ldots q_1 = \frac{1}{q}$ einzusetzen und erhalten schliesslich:

11) $$S_n = \frac{1}{(q-1)^2 q^{n-1}} \times \{a_n(q^n - 1)(q-1) + dq[(q^n - 1) - n(q-1)q^{n-1}]\}.$$

Gleichung 11) hätten wir auch unmittelbar aus 1) und 2) gewinnen können, indem wir den Wert für a_1 aus Formel 1) bestimmt und in Formel 2) eingeführt hätten. Dann könnten wir aber Gleichung 11) in Formel 6) zurückführen, indem wir umgekehrt in 11) a_n durch a_1, d durch $-d$ und q durch $\frac{1}{q}$ ersetzen.

II) $R(a_1, q, d) \stackrel{i}{=} R\left(a_n, -d, \frac{1}{q}\right)$.

Diese Betrachtung liefert uns auch eine Summenformel für die geometrisch-arithmetische Reihe, von welcher a_n, d und q gegeben sind. Wir brauchen blos in 2) für $a_1 \ldots a_n$, für $d \ldots d_1 = -d$ und für $q \ldots q_1 = \frac{1}{q}$ einzusetzen und erhalten schliesslich:

12) $$S_n = \frac{1}{(q-1)^2 q^{n-1}} \times \{a_n(q^n - 1)(q-1) + d[(q^n - 1) - n(q-1)q^{n-1}]\}.$$

Gleichung 12) hätten wir auch unmittelbar aus 5) und 6) gewinnen können, indem wir den Wert von a_1 aus 5) bestimmt und in Formel 6) eingeführt hätten. Dann könnten wir aber Gleichung 12) in Formel 2) zurückführen, indem wir umgekehrt in 12) a_n durch a_1, d durch —d und q durch $\frac{1}{q}$ ersetzen.

Sonstige, auf die Reihen $R(a_1, d, q)$ und $R(a_1, q, d)$ bezügliche Aufgaben und Formeln enthält Tabelle II, in welcher n stets als bekannt vorausgesetzt wird.

Wie leicht ersichtlich, können wir bei der Interpolation der Reihe $R(a_1, d, q)$ von der Formel 8) auch in der Weise Gebrauch machen, dass wir $q_1 = \frac{1}{q}$ und $d_1 = -d$ setzen.

Es sei die Ende des § 4 gestellte Aufgabe nach Formel 8) zu lösen, so wird $d_1 = -d = -1$, $q_1 = \frac{1}{8}$ und $\varkappa = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$; ferner $m = \frac{8}{7}$ und daher $\delta = -\frac{4}{7}$.

Man erhält sodann die in demselben Sinne interpolirte Inversionsreihe:

$$1096,\ 547\tfrac{3}{7},\ 273\tfrac{1}{7},\ 136,\ 67\tfrac{3}{7},\ 33\tfrac{1}{7},\ 16,\ 7\tfrac{3}{7},\ 3\tfrac{1}{7},\ 1.$$

Wie leicht ersichtlich, dürfen wir bei der Interpolation der Reihe $R(a_1, q, d)$ von der Formel 4) auch in der Weise Gebrauch machen, dass wir $q_1 = \frac{1}{q}$ und $d_1 = -d$ setzen.

Es sei die Ende des § 8 gestellte Aufgabe nach Formel 4) zu lösen, so wird $d_1 = -2$, $q_1 = \frac{1}{16}$, $\varkappa = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$, ferner $m = \frac{16}{15}$ und daher $\delta = -\frac{2}{15}$.

Man erhält sodann die in demselben Sinne interpolirte Umkehrungsreihe:

$$4642,\ 2320\tfrac{14}{15},\ 1160\tfrac{6}{15},\ 580\tfrac{2}{15},\ 290,\ 144\tfrac{14}{15},\ 72\tfrac{6}{15},\ 36\tfrac{2}{15},\ 18,\ 8\tfrac{14}{15},\ 4\tfrac{6}{15},\ 2\tfrac{2}{15},\ 1.$$

§ 12.

Aus 9. I)

$$R(a_1, d, q) \cong R(a_1, q, dq)$$

und 10. I)

$$R(a_1, d, q) \stackrel{i}{=} R\left(a_n, \frac{1}{q}, -d\right)$$

folgt:

$$R\left(a_n, \frac{1}{q}, -d\right) \stackrel{i}{=} R(a_1, d, q) \cong R(a_1, q, dq).$$

Nun ist nach 10. II)

$$R(a_1, q, dq) \stackrel{i}{=} R\left(a_n, -dq, \frac{1}{q}\right),$$

und nach 9. I)

$$R\left(a_n, -dq, \frac{1}{q}\right) \cong R\left(a_n, \frac{1}{q}, -d\right).$$

Aus 9. II)

$$R(a_1, q, d) \cong R\left(a_1, \frac{d}{q}, q\right)$$

und 10. II)

$$R(a_1, q, d) \stackrel{i}{=} R\left(a_n, -d, \frac{1}{q}\right)$$

folgt:

$$R\left(a_n, -d, \frac{1}{q}\right) \stackrel{i}{=} R(a_1, q, d) \cong R\left(a_1, \frac{d}{q}, q\right).$$

Nun ist nach 10. I)

$$R\left(a_1, \frac{d}{q}, q\right) \stackrel{i}{=} R\left(a_n, \frac{1}{q}, -\frac{d}{q}\right)$$

und nach 9. II)

$$R\left(a_n, \frac{1}{q}, -\frac{d}{q}\right) \cong R\left(a_n, -d, \frac{1}{q}\right).$$

Zwei Zahlenreihen von gleich grosser Gliederzahl, deren gleichstellige Glieder einander gleich sind, wollen wir als congruent ($\cong$) bezeichnen.

Die $\begin{cases}\text{arithmetisch-geometrische}\\ \text{geometrisch-arithmetische}\end{cases}$ Reihe ist somit der

$\begin{cases}\text{geometrisch-arithmetischen}\\ \text{arithmetisch-geometrischen}\end{cases}$ Reihe congruent, wenn

α) die Anfangsglieder der beiden Reihen einander gleich sind,

β) die Quotienten der beiden Reihen einander gleich sind,

und γ) wenn die Differenz der $\begin{cases}\text{arithmetisch-geometrischen Reihe}\\ \text{geometrisch-arithmetischen Reihe}\end{cases}$

dem q^{ten} Theile der Differenz der geometrisch-arithmetischen Reihe gleicht.

der q-fachen Differenz der arithmetisch-geometrischen Reihe gleicht.

Es ist

$$9)\qquad \text{I)}\quad R(a_1, d, q) \cong R(a_1, q, dq). \quad \text{und}$$

$$\text{II)}\quad R(a_1, q, d) \cong R\left(a_1, \frac{d_1}{q}, q\right).$$

Es folgt daraus ferner, dass wir uns zur Interpolation einer Reihe von der Form $\begin{cases}R(a_1, d, q)\\ R(a_1, q, d)\end{cases}$ auch der Formel $\begin{cases}8)\\ 4)\end{cases}$ bedienen dürfen, wenn wir $\delta = \begin{cases}d_1 m x = dqmx\\ dqm = d_1 m\end{cases}$ setzen.

Es sei die Ende des § 4 gestellte Aufgabe nach dem im § 8 angegebenen Verfahren zu lösen: Sollen in $R(a_1 = 1, d = 1, q = 8) = 1, 16, 136, 1096, \ldots$ zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern je zwei neue Elemente eingeschaltet werden, so erhält man:

$$x = \sqrt[3]{8} = 2;\ m = \tfrac{1}{14};\ \delta = \frac{d_1}{7} = \frac{8}{7}.$$

Die interpolirte Reihe ist daher:

$1, (2+\frac{8}{7}), [(2+\frac{8}{7})2+\frac{8}{7}],$
$\{[(2+\frac{8}{7})2+\frac{8}{7}]2+\frac{8}{7}\}, \ldots$
$= 1, 3\frac{1}{7}, 7\frac{3}{7}, 16, 33\frac{1}{7}, 67\frac{3}{7}, 136,$
$273\frac{1}{7}, 547\frac{3}{7}, 1096, \ldots$

Es sei die Ende des § 8 gestellte Aufgabe nach dem im § 4 angegebenen Verfahren zu lösen: Sollen in $R(a_1 = 1, q = 16, d_1 = 2) = 1, 18, 290, 4642, \ldots$ zwischen je zwei Gliedern drei neue Elemente eingeschaltet werden, so findet man:

$$x = \sqrt[4]{16} = 2;\ m = \tfrac{1}{30};$$
$$\delta = \tfrac{2}{30} = \tfrac{1}{15}.$$

Die interpolirte Reihe lautet mithin:

$1, (1+\frac{1}{15})2, [(1+\frac{1}{15})2+\frac{1}{15}]2,$
$\{[(1+\frac{1}{15})2+\frac{1}{15}]2+\frac{1}{15}\}2, \ldots$
$= 1, 2\frac{2}{15}, 4\frac{6}{15}, 8\frac{14}{15}, 18, 36\frac{2}{15},$
$72\frac{6}{15}, 144\frac{14}{15}, 290, \ldots$

§ 11.

Wird erwogen, dass das n^{te} Glied der Reihe $R(a_1, d, q)$ aus dem $(n-1)^{ten}$ Gliede derselben dadurch hervorgeht, dass das letztere zunächst um d vermehrt und sodann q mal genommen wird,

$$a_n = (a_{n-1} + d)q,$$

so darf umgekehrt geschlossen werden, dass das $(n-1)^{te}$ Glied der betrachteten Progression aus dem n^{ten} Gliede derselben gebildet wird, indem man dieses letztere zunächst durch q dividirt und sodann um d vermindert:

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q} - d.$$

Ebenso würde aus

$$a_{n-1} = (a_{n-2} + d)\, q \text{ auch}$$

$$a_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{q} - d$$

folgen u. s. w. Setzen wir nun

$$-d_1 = +d \text{ und } \frac{1}{q} = q_1,$$

so können wir vom n^{ten} Gliede nach dem Anfangsgliede zurückschreitend die vorgelegte Reihe $R(a_1, d, q)$ auch als eine geometrisch-arithmetische von den Bildungsgrössen d_1 und q_1 auffassen, sofern nur das letzte Glied der ersteren das Anfangsglied der letzteren bildet.

Wird erwogen, dass das n^{te} Glied der Reihe $R(a_1, q, d)$ aus dem $(n-1)^{ten}$ Gliede derselben dadurch hervorgeht, dass das letztere zunächst q mal genommen, sodann um d vermehrt wird,

$$a_n = a_{n-1} q + d,$$

so darf umgekehrt geschlossen werden, dass das $(n-1)^{te}$ Glied der betrachteten Progression aus dem n^{ten} Gliede derselben gebildet wird, indem man dieses letztere zunächst um d vermindert und sodann durch q dividirt:

$$a_{n-1} = (a_n - d)\frac{1}{q}.$$

Ebenso würde aus

$$a_{n-1} = a_{n-2} q + d \text{ auch}$$

$$a_{n-2} = (a_{n-1} - d)\frac{1}{q}$$

folgen u. s. w. Setzen wir daher

$$-d = +d_1 \text{ und } \frac{1}{q} = q_1,$$

so können wir vom n^{ten} Gliede nach dem Anfangsgliede zurückschreitend die vorgelegte Reihe $R(a_1, q, d)$ auch als eine arithmetisch-geometrische Reihe von den Bildungsgrössen d_1 und q_1 auffassen, sofern nur das letzte Glied der ersteren das Anfangsglied der letzteren bildet.

Zwei Reihen von gleicher Gliederanzahl stehen im Verhältnisse der Umkehrung oder Inversion, wenn das n^{te} Glied der einen dem ersten Gliede der andern gleich ist, und wenn die von a_n gleich weit abstehenden Glieder der ersten Reihe den von a_1 gleich weit abstehenden Gliedern der zweiten Reihe gleichen. Zwei Reihen dieser Art seien einander „invers" ($\underline{\underline{i}}$).

II. Ein Rautenviereck wird durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke geteilt, woraus dann folgt, dass Gegenwinkel des Vierecks, sowie Wechselwinkel an den Diagonalen gleich sind.

Zum Beweise sei in Fig. 1. $ABCD$ ein Rautenviereck. Die Dreiecke, worin es durch die Diagonale geteilt wird, haben gleiche Seiten, sind daher congruent, woraus die Gleichheit der gleich bezeichneten Winkel folgt.

III. Die Diagonalen und die Mittellinien eines Rautenvierecks schneiden sich in demselben Punkte und sind in diesem halbirt.

In dem Rautenviereck Fig. 2. ist $AB = CD$, $e = e_1$, $f = f_1$. Mithin sind die Dreiecke T und T_1 congruent, woraus die Halbirung folgt. — In Fig. 3. sei $ABCD$ ein Rautenviereck mit einer Diagonale und einer Mittellinie. In den Dreiecken T und T_1 ist $DE = BF$, $a = a_1$, $c = c_1$. Hieraus folgt die Congruenz der Dreiecke T und T_1 und daraus die gegenseitige Halbirung.

Hiermit ist bewiesen, dass die Halbirungspunkte der Diagonalen und der Mittellinien in einen Punkt zusammenfallen.

IV. An einer Mittellinie sind die Wechselwinkel gleich und zwei innere Gegenwinkel zusammen $= 2R$.

In Fig. 3. sind die Wechselwinkel b und b_1 gleich wegen der Congruenz der Dreiecke T und T_1. Ferner ist dann $b + d = 2R$, weil $b_1 + d = 2R$.

V. In einem Rautenrechteck stehen zwei Gegenseiten auf der sie verbindenden Mittellinie senkrecht.

In Fig. 5. sei $ABCD$ ein Rautenrechteck, FH eine Mittellinie. Dreiecke FAB und HAB sind congruent wegen Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels. Mithin ist $AH = BF$ Jetzt sind die Dreiecke AFH und BFH congruent wegen Gleichheit der drei Seiten. Hieraus folgt die Gleichheit der Winkel p und q und, da sie nach IV. sich zu $2R$ ergänzen, dass jeder ein Rechter ist.

VI. Ein Rautenviereck in ein Rautenrechteck zu verwandeln, so dass Fläche und Winkelsumme unverändert bleiben.

In Fig. 4. sei $ABCD$ ein Rautenviereck, IK dessen eine Mittellinie. Man nehme AF, BH, CG, DE senkrecht zu der Mittellinie IK. Dann sind die Dreiecke T sämmtlich congruent wegen Gleichheit der gleich bezeichneten Winkel und der gleich markirten Seiten. Es entsteht das halbe Rautenrechteck $ABHF$ aus dem halben

Rautenviereck $ABKI$, indem man das Dreieck T_1 wegnimmt und T_2 hinzufügt. Da diese Dreiecke congruent sind, so sind die genannten halben Vierecke gleich. Ebenso ist unterhalb der Mittellinie $EGCD = IKCD$. Ferner sind auch die Linien EG und FH gleich: denn sie sind beide gleich IK: sie entstehen aus IK, indem man zu IK das eine Mal $EI - GK = 0$, das andere Mal $KH - IF = 0$ hinzufügt. Man kann daher $EGCD$ so an $ABHF$ fügen, dass EG sich mit FH deckt. Hierbei vereinigt sich AF mit ED, sowie BH mit GC zu einer geraden Linie, weil die mit r bezeichneten Winkel Rechte sind. Man erhält also ein Rautenrechteck wie Fig. 5., welches dieselbe Fläche hat wie $ABCD$ in Fig. 4.

Es ist noch zu zeigen, dass auch die Winkelsumme dieselbe ist. In Fig. 4. ist die Summe der Winkel an der Linie AB in beiden Vierecken dieselbe; denn die eine entsteht aus der anderen, indem man a_1 wegnimmt und a_2 hinzufügt. Ebenso ist es an der Linie CD. Die beiden Vierecke $ABCD$ in Fig. 4. und 5. haben also auch dieselbe Winkelsumme.

VII. Wenn zwei Rautenrechtecke von ungleicher Fläche in einer Mittellinie übereinstimmen, so bedarf es keines Beweises, dass die andere Mittellinie in dem Rechteck grösser ist, welches die grössere Fläche hat.

VIII. Ebenso ist ohne Weiteres klar, dass wenn zwei Rautenrechtecke von gleicher Fläche in einer Mittellinie übereinstimmen, auch die andere Mittellinie in beiden die gleiche ist, die Rechtecke also congruent sind.

IX. Rautenrechtecke von gleicher Fläche haben gleiche Winkelsumme.

Fig. 6. und 7. seien zwei Rautenrechtecke von gleicher Fläche. Es soll gezeigt werden, dass sie auch gleiche Winkelsumme haben. Zu diesem Zwecke möge das Rautenrechteck Fig. 7. so verwandelt werden, dass es eine Mittellinie $= LR$ in Fig. 6. erhält. Die Verwandlung könnte an Fig. 7. unmittelbar vorgenommen werden. Damit jedoch die Figur weniger verwickelt wird, möge die obere Hälfte $CDHG$ des Rautenrechtecks Fig. 7. nach Fig. 8. übertragen werden, wo es mit denselben Buchstaben bezeichnet ist. In Fig. 8. halbire man CD in K und bestimme in der Linie GH oder deren Verlängerung einen Punkt N so, dass $KN =$ der halben Mittellinie LM in Fig. 6. ist. Man verlängere KN um sich selbst bis O, nehme $a_1 = a$, $OP = OQ = CK$. Dann sind in Fig. 8. CD und PQ Gegenseiten des Rautenvierecks $CDQP$. Dasselbe hat mit dem Rautenrechteck

Tabelle I.

	d	q	a_n		S_n	
			$R(a_1, d, q)$	$R(a_1, q, d)$	$R(a_1, d, q)$	$R(a_1, q, d)$
1)	beliebig.	$q > 1.$	wächst in das Unendliche.		divergirt.	divergirt.
2)	beliebig.	$q = 1.$	wächst in das Unendliche.		divergirt.	divergirt.
3)	$d \gtrless 0.$	$-1 < q < 1.$	bleibt unter einer gewissen Grenze.		divergirt.	divergirt.
4)	$d = 0.$	$-1 < q < 1.$	wird unendlich klein.		convergirt.	convergirt.
5)	endlich.	$q = 0.$	$a_n = 0.$	$a_n = d.$	convergirt.	divergirt.
6)	$d \gtrless 0.$	$q = -1.$	schwankt zwischen a_1 und $(-a_1 - d)$.	schwankt zwischen a_1 und $(-a_1 + d)$.	divergirt.	divergirt.
7)	$d = 0.$	$q = -1.$	schwankt zwischen $(+a_1)$ und $(-a_1)$.		oscillirt zwischen a_1 und 0.	
8)	beliebig.	$q < -1.$	wächst in das Unendliche.		divergirt.	divergirt.

Tabelle II.

	Gegeben	Gesucht	Resultate:	
			$R(a_1, d, q)$	$R(a_1, q, d)$
1)	a_1, d, q.	a_n,	$a_n = \frac{a_1 q^{n-1}(q-1) + dq(q^{n-1}-1)}{(q-1)}$.	$a_n = \frac{a_1 q^{n-1}(q-1) + d(q^{n-1}-1)}{(q-1)}$.
		S_n.	$S_n = \frac{a_1 B + Adq}{(q-1)^2}$.	$S_n = \frac{a_1 B + Ad}{(q-1)^2}$.
2)	a_1, a_n, q.	d,	$d = \frac{(a_n - a_1 q^{n-1})(q-1)}{(q^{n-1}-1)q}$.	$d = \frac{(a_n - a_1 q^{n-1})(q-1)}{(q^{n-1}-1)}$.
		S_n.	$S_n = \frac{a_n A - a_1 D}{C}$.	$S_n = \frac{a_n A - a_1 D}{C}$.
3)	a_1, S_n, q.	a_n,	$a_n = \frac{a_1 D + C S_n}{A}$.	$a_n = \frac{a_1 D + C S_n}{A}$.
		d.	$d = \frac{F(q-1)}{Aq}$.	$d = \frac{F(q-1)}{A}$.
4)	a_n, q, S_n.	a_1,	$a_1 = \frac{a_n A - C S_n}{D}$.	$a_1 = \frac{a_n A - C S_n}{D}$.
		d.	$d = \frac{E(q-1)}{Dq}$.	$d = \frac{E(q-1)}{D}$.
5)	a_n, d, q.	a_1,	$a_1 = \frac{a_n(q-1) - dq(q^{n-1}-1)}{G}$.	$a_1 = \frac{a_n(q-1) - d(q^{n-1}-1)}{G}$.
		S_n.	$S_n = \frac{a_n B + dqD}{G(q-1)}$.	$S_n = \frac{a_n B + dD}{G(q-1)}$.
6)	d, q, S_n.	a_1,	$a_1 = \frac{S_n(q-1)^2 - Adq}{B}$.	$a_1 = \frac{S_n(q-1)^2 - Ad}{B}$.
		a_n.	$a_n = \frac{S_n G - Ddq}{B}$.	$a_n = \frac{S_n G(q-1) - Dd}{B}$.

Abbreviaturen:

$[(q^n-1) - n(q-1)] = A,$

$(q^n-1) \cdot (q-1) = B,$

$(q^{n-1}-1)(q-1) = C,$

$[(q^n-1) - nq^{n-1}(q-1)] = D,$

$[S_n(q-1)q^{n-1} - a_n(q^n-1)] = E,$

$[S_n(q-1) - a_1(q^n-1)] = F,$

$(q-1)q^{n-1} = G.$

Es folgt somit:

$$R(a_n, \tfrac{1}{q}, -d) \stackrel{i}{=} R(a_1, d, q)$$

$$\cong R(a_1, q, dq) \stackrel{i}{=} R(a_n, -dq, \tfrac{1}{q})$$

$$\cong R(a_n, \tfrac{1}{q}, -d).$$

Jede arithmetisch-geometrische Reihe $R(a_1, d, q)$ enthält also vier gesetzmässige Zahlenfolgen u. z.

1) sich selbst: $R(a_1, d, q)$,

2) die inverse arithmetisch-geometrische Reihe:

$$R(a_n, -dq, \tfrac{1}{q}),$$

3) die congruente geometrisch-arithmetische Reihe:

$$R(a_1, q, dq)$$

und

4) die inverse geometrisch arithmetische Reihe:

$$R(a_n, \tfrac{1}{q}, -d).$$

Es folgt somit:

$$R(a_n, -d, \tfrac{1}{q}) \stackrel{i}{=} R(a_1, q, d)$$

$$\cong R(a_1, \tfrac{d}{q}, q) \stackrel{i}{=} R(a_n, \tfrac{1}{q}, -\tfrac{d}{q})$$

$$\cong R(a_n, -d, \tfrac{1}{q}).$$

Jede geometrisch-arithmetische Reihe enthält also vier gesetzmässige Zahlenfolgen u. z.

1) sich selbst: $R(a_1, q, d)$,

2) die inverse geometrisch-arithmetische Reihe:

$$R(a_n, \tfrac{1}{q}, -\tfrac{d}{q}),$$

3) die congruente arithmetisch-geometrische Reihe:

$$R(a_1, \tfrac{d}{q}, q)$$

und

4) die inverse arithmetisch-geometrische Reihe:

$$R(a_n, -d, \tfrac{1}{q}).$$

Als Beispiel mögen die fünf ersten Glieder der im { § 2 / § 6 } aufgestellten Reihe dienen.

$R(a_1, d, q) = 1, 8, 22, 50, 106.$

$R(a_n, -dq, \tfrac{1}{q}) = 106, 50, 22, 8, 1.$

$R(a_1, q, dq) = 1, 8, 22, 50, 106.$

$R(a_n, \tfrac{1}{q}, -d) = 106, 50, 22, 8, 1.$

$R(a_1, q, d) = 1, 5, 13, 29, 61.$

$R(a_n, \tfrac{1}{q}, -\tfrac{d}{q}) = 61, 29, 13, 5, 1.$

$R(a_1, \tfrac{d}{q}, q) = 1, 5, 13, 29, 61.$

$R(a_n, -d, \tfrac{1}{q}) = 61, 29, 13, 5, 1.$

Wien, im August 1900.

XXXVIII.

Geometrische Sätze über die Fläche und die Winkelsumme des Dreiecks und des Vierecks.

Von

Dr. **W. Veltmann** in Poppelsdorf-Bonn.

Diese Sätze werden gewöhnlich als zur nichteuklidischen Geometrie gehörig betrachtet und (nach Bolyai) mit Hülfe der Linien gleichen Abstandes bewiesen. Man kann sie jedoch sehr leicht, ohne das Parallelenaxiom vorauszusetzen, rein Euklidisch beweisen, was vorzuziehen ist, weil man dann sieht, wie weit man mit der Geometrie ohne das Parallelenaxiom kommen kann.

Die Constructionen, welche zur Verwandlung der Vierecke nötig sind, habe ich nicht blos als möglich nachgewiesen, sondern wirklich ausgeführt. Benutzt man die Linien gleichen Abstandes, so operirt man mit Dingen, die möglicher- und sogar wahrscheinlicherweise gar nicht existiren, mindestens im Widerspruch stehen mit der täglichen Erfahrung und man hat dann vielleicht keine volle Sicherheit, dass man nicht durch die vermeintliche Anschauung von Gebilden, die gar keine Realität besitzen, zu Irrthümern verleitet wird.

I. Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüber liegende Seiten gleich sind, will ich ein Rautenviereck nennen. Sind überdies sämmtliche Winkel gleich, so soll es ein Rautenrechteck heissen. Wären endlich ausserdem alle Seiten gleich, so könnte man es ein Rautenquadrat nennen. Die Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten nenne ich eine Mittellinie des Vierecks.

wandeln, so hätte man den Beweis des Satzes, dass die Winkelsumme im Dreieck $= 2R$ ist.

Ich gehe auf diesen Gegenstand hier nicht näher ein, eine ausführliche Behandlung desselben einem Lehrbuch vorbehaltend.

Ich darf wohl auf Zustimmung rechnen, wenn ich es befremdlich nenne, dass man so einfache Sätze und Beweise, wie die hier vorgetragenen, als etwas Absonderliches betrachtet und dieselben einem Gebiete zuweist, welches der gewöhnlichen, elementaren Geometrie nicht zugänglich ist.

Einige allbekannte Aufgaben, die sich aber nur unter der Voraussetzung des Euklidi'schen Axioms allgemein lösen lassen, will ich noch hinzufügen.

XVI. Ein Rautenviereck in ein anderes zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel hat.

Das Constructionsverfahren kann an Fig. 8. gezeigt werden, wo das Rautenrechteck, dessen eine Mittellinie HG und dessen obere Hälfte $CDHG$ ist, die zu verwandelnde Figur sei. Ist der gegebene Winkel kleiner als der Winkel CDH, so ziehe man DQ so, dass der Winkel CDQ die gegebene Grösse erhält. Dann nehme man $BA = HG$ und vervollständige die Construction des Rautenvierecks $CDQP$. Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, dass die Linie DQ die Linie HG oder deren Verlängerung schneidet, was man ohne das Euklid'sche Axiom nicht bei beliebiger Kleinheit des Winkels CDQ behaupten kann. Wäre der gegebene Winkel grösser, als der Winkel $CDH = DCG$, so würde man CP so ziehen, dass Winkel DCP gleich dem gegebenen würde und die weitere Construction wäre dann wesentlich dieselbe, wie vorhin. Voraussetzung wäre hier ebenfalls, dass die Linie CP die Linie GH oder deren Verlängerung schneidet. Dass die Figur, von welcher ich ausgegangen bin, ein Rautenrechteck ist, war offenbar unwesentlich; ein beliebiges Rautenviereck würde man auf gleiche Weise verwandeln können.

XVII. Ein Rautenviereck in ein anderes mit einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Wenn die gegebene Seite nicht kleiner ist, als das Doppelte von CG in Fig. 8., so ist die Construction dieselbe, wie in XVI., nur mit dem Unterschiede, dass die Linie DQ nicht unter einem bestimmten Winkel, sondern so gezogen wird, dass DB gleich der Hälfte der gegebenen Seite wird. Nach Früherem kann nun ein gegebenes Rautenrechteck immer in ein anderes verwandelt werden,

dessen eine Mittellinie beliebig klein ist. Daraus folgt aber nicht, dass auch die zu dieser Mittellinie rechtwinklige Seite beliebig klein wird, so lange man nicht das Euklid'sche Axiom voraussetzt. Ohne das letztere hat man also keine Gewissheit, dass die Construction immer ausführbar ist.

Soll ein Dreieck in ein anderes mit gegebenem Winkel oder gegebener Seite verwandelt werden, so setze man das Dreieck mir einem ihm congruenten zu einem Rautenviereck zusammen. Verwandelt man dann das Viereck, so ist das Dreieck gleichzeitig mit verwandelt.

Fig. 7. gleiche Mittellinie $AB = GH$, sowie nach VI. gleiche Fläche und gleiche Winkelsumme. Die andere Mittellinie KO ist gleich der Mittellinie LR des Rautenrechtecks Fig. 6. Man lege nun Fig. 8 so, dass OK horizontal wird. Dann verwandle man nach VI. dieses Rautenviereck in ein Rautenrechteck, dessen eine Mittellinie $= OK$ ist. Das so erhaltene Rautenrechteck stimmt mit Fig. 6. in der Fläche und einer Mittellinie und daher nach VIII. auch in der anderen Mittellinie überein; d. h. es ist demselben congruent.

Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen. Unter der Voraussetzung, dass die Rautenrechtecke Fig. 6. und 7. gleiche Fläche haben, ist Fig. 7. ohne Aenderung der Fläche und der Winkelsumme so umgewandelt worden, dass es mit Fig. 6. congruent wurde, womit also die Gleichheit der Winkelsummen bewiesen ist.

X. Rautenvierecke von gleicher Fläche haben gleiche Winkelsumme.

Man kann nach VI. zwei solche Rautenvierecke ohne Aenderung der Fläche und der Winkelsumme in Rautenrechtecke verwandeln, welche dann nach IX. gleiche Winkelsumme haben.

XI. Dreiecke von gleicher Fläche haben gleiche Winkelsumme.

Haben zwei Dreiecke gleiche Fläche und setzt man jedes derselben mit einem ihm congruenten zu einem Rautenviereck zusammen, so haben diese Vierecke gleiche Fläche und somit nach IX. gleiche Winkelsumme. Die Winkelsumme der Dreiecke ist aber die Hälfte derjenigen der Vierecke; somit sind die Winkelsummen der Dreiecke ebenfalls gleich.

XII. Die Fläche eines Dreiecks ist proportional dem Ueberschusse von $2R$ über seine Winkelsumme.

Zwei beliebige Dreiecke D_1 und D_2 mögen sich ihrer Fläche nach zu einander verhalten wie zwei ganze Zahlen m_1 und m_2. Die Winkelsummen seien S_1 und S_2, die Ueberschüsse von $2R$ über die Winkelsumme u_1 und u_2. Man zerlege durch Linien von einer Ecke aus das Dreieck D_1 in m_1 Dreiecke, D_2 in m_2 Dreiecke, die alle einander gleich, $= d$ sind. Die nach XI. gleiche Winkelsumme in den Dreiecken $= d$ sei s. Dann ist

1) $S_1 = m_1 s - (m_1 - 1) \,.\, 2R = 2R - m_1(2R - s)$

2) $S_2 = m_2 s - (m_2 - 1) \,.\, 2R = 2R - m_2(2R - s)$

$u_1 = m_1(2R - s)$

$u_2 = m_2(2R - s)$

3) $u_1 : u_2 = m_1 : m_2$.

XIII. Die Winkelsumme ist entweder in allen Dreiecken grösser als $2R$ oder in allen $= 2R$ oder in allen kleiner als $2R$.

Wenn in obigen Gleichungen (1) und (2) $2R - s$ kleiner als O, gleich O oder grösser als O ist, so sind S_1 und S_2 resp. beide grösser als $2R = 2R$, kleiner als $2R$.

Damit ist obige Behauptung bewiesen.

XIV. Die Summe der Winkel eines Dreiecks kann nicht grösser als $2R$ sein.

In Fig. 4. kann man das Rautenviereck $ABCD$, während AB fest bleibt, so verwandeln, dass die Mittellinie IK sich beliebig weit nach links verschiebt. Dadurch wird, wie leicht ersichtlich, der Winkel b, und somit auch der Winkel ADB beliebig klein. Der Winkel ABD wird, wenn auch vielleicht nicht beliebig klein, doch wenigstens beständig kleiner. Legt man das Rautenviereck $ABCD$ so, dass die andere Mittellinie, welche die Mitten von AB und CD verbindet, horizontal wird, so kann man auf gleiche Weise den Winkel ABD beliebig klein machen, während ADB wenigstens kleiner wird. Das Dreieck ABD kann also, ohne seine Winkelsumme zu ändern, so verwandelt werden, dass die Winkelsumme gleich dem Winkel DAB plus einer beliebig kleinen Winkelgrösse wird. Der Winkel DAB wird hierbei nie grösser als $2R$; mithin ist jetzt bewiesen, dass die Winkelsumme des Dreiecks ABD nicht um eine noch so kleine Grösse den Werth $2R$ übertreffen kann.

XV. Wenn man annimmt, dass die Winkelsumme eines Dreiecks kleiner sei als $2R$, so kann die Fläche eines Dreiecks nicht beliebig gross sein.

In obiger Gleichung (3) möge das Dreieck D_1 unverändert, also m_1 und u_1 constant bleiben. Könnte man jetzt m_2 beliebig gross nennen, so müsste auch u_2 beliebig gross werden können, während doch der Ueberschuss von $2R$ über die Winkelsumme nicht grösser als $2R$ werden kann.

XVI. Man würde noch verschiedene hierher gehörige Aufgaben hinzufügen können, z. B. Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes mit einer gegebenen Seite oder einem gegebenen Winkel. Allgemeine Constructionen würde man hierfür haben; man würde jedoch nicht nachweisen können, dass sie immer anwendbar wären. Könnte man ein Dreieck in ein anderes mit einer beliebig kleinen Seite oder einem beliebig wenig von zwei Rechten verschiedenen Winkel ver-

Litterarischer Bericht
LXV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Abhandlung über die Kräfte der Elektricität bei der Muskelbewegung. Von Aloisius Galvani (Comm. Bonon. Sc. et Art. Inst. et Acad. T. 7) (1791). Herausgegeben von A. von J. Oettingen. Mit 21 Figuren auf vier Tafeln. Leipzig 1894. Wilhelm Engelmann. 76 S.

Der Verfasser erklärt die sehr ausgedehnte Reihe von Versuchen, über welche die Abhandlung berichtet, für den Anfang seiner Bemühung zu einer Theorie der Wirkung der Elektricität auf die Muskelbewegung zu gelangen, von welcher er bis zur Zeit der Veröffentlichung noch sehr fern sei. Gleichwol ist schon hier die Variation der eingeführten Fälle isolirter Wirkung nebst den besondern sich ergebenden Schlüssen eine sehr grosse. Der erste Teil des Berichts betrifft ausschliesslich Versuche mit Maschinenelektricität. Es werden verglichen die directen Wirkungen auf die Muskeln und Nerven bei kürzern und längern Zuleitungsdrähten. Namentlich ergab sich, dass die Muskelcontractionen gleichzeitig mit dem Ueberspringen von Funken eintraten. Es folgt eine Reihe von Versuchen mit atmosphärischer Elektricität, welche zu der übereinstimmenden Bemerkung führt, dass nämlich die Muskelcontractionen immer gleichzeitig mit den Blitzen eintreten. Nun folgt die Untersuchung der grössten und schwierigsten Frage nach den Kräften der tierischen Elektricität. Dass das Ziel des ziemlich complicirten experimentellen Verfahrens die Ermittelung der Natur und Entstehung der bei der gewöhnlichen Muskelbewegung tätigen Kraft, sowie der Nachweis

ihrer in der Elektricität der Nerven zu suchenden Quelle ist, lässt sich wol bezweifeln; doch ist der dabei waltende Gedankengang nicht leicht verständlich; auch lassen die Aeusserungen des Verfassers nicht wol mehr als die Hoffnung erkennen, auf dem begonnen Wege später zu einer Entscheidung zu gelangen. Demgemäss schliesst die Abhandlung mit „einigen Vermutungen und Schlussfolgerungen.“

H.

Le speculazioni di Giovanni Benedetti sub moto dei gravi. Nota di Giovanni Vailati. Torino 1898. Carlo Clausen.

Giovanni Benedetti, geboren 1530 in Venedig, gestorben 1590 in Turin, Sohn eines Spaniers, bezeichnet sich selbst in einer Vorrede als Autodidakten und tritt, ohne Unterricht in einem wissenschaftlichen Schulcursus erhalten zu haben, im Alter von 18 Jahren als Philosoph, Musiker und Mathematiker auf. Hiermit steht wol in Verbindung, dass er besonders scharf herrschende Meinungen in der Mechanik bekämpft, namentlich wird ein bitterer Angriff gegen Taisnerius angeführt. Der Hauptgegenstand seiner Forschung war die Bewegung schwerer Körper, jedoch soweit der erste Teil seiner Schrift erkennen lässt, in mehrfacher Beschränkung: erstens ist es nur die Bewegung in der Richtung der Kraft, zweitens wird nach der Beschleunigung überhaupt nicht gefragt, sondern nur nach der Geschwindigkeit als Quotient eines Gesamtwegs durch die Zeit. Diese (mittlere) Geschwindigkeit wird als abhängig vom Gewichte des fallenden Körpers und von der Dichte des Mittels betrachtet. Der Fall durch leeren Raum wird einmal erwähnt, doch ohne den Gedanken zu verfolgen. Der zweite Teil der Schrift schlägt eine ganz neue Richtung ein. Der Einfluss des Mittels auf die Bewegung fällt ausser Beobachtung. Statt dessen bilden die Begriffe der Trägheit und Beharrung den Gegenstand seiner Forschung. Der Körper hat von Natur die Neigung seine Richtung beizubehalten und sich in gerader Linie zu bewegen. Die Dauer der Kraft muss seine Geschwindigkeit beständig vergrössern. H.

Il principio dei lavori virtuali da Aristotele a Erone d' Alessandria. Nota del Dott. Giovanni Vailati. Torino 1897. Carlo Clausen. 25 S.

Der Verfasser zeigt an drei aus dem Altertum erhaltenen Schriften die Anfänge der wissenschaftlichen Forschung, aus der sich die heutige Mechanik entwickelt hat. Es sind 1) die *Μηχανικα Προβλήματα* von Aristoteles, 2) De ponderibus von Jordanus Nemo-

rarius aus dem 13. Jahrhundert, 3) *Βαρούλκος* (Hebewinde) von Heron. Die zweitgenannte ist lateinische Uebersetzung von Fragmenten, als deren Autor Aristoteles angenommen zu sein scheint, obgleich sie einen Unterschied von dessen Auffassung kund gibt.

H.

Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen von N. H. Abel und E. Galois. Deutsch herausgegeben von H. Maser. Berlin 1889. Julius Springer. 155 S.

Abel und Galois haben das Problem der Auflösung der algebraischen Gleichungen höhern als 4. Grades auf die Aufgabe reducirt, die Bedingung zu finden, unter der eine rational gegebene Gleichung nur algebraische Wurzeln hat. Die dahin führenden Abhandlungen Beider erscheinen hier zur Erleichterung des Studiums zusammengestellt; es sind die folgenden Abhandlungen von Niels Henrik Abel: Abhandlung über die algebraischen Gleichungen, in welchen die Unmöglichkeit der Auflösung der allgemeinen Gleichung 5. Grades bewiesen wird. Beweis der Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichungen, welche den 4. Grad übersteigen. Abhandlung über eine besondere Classe algebraisch auflösbarer Gleichungen. Ueber die algebraische Auflösung der Gleichungen. Neue Theorie der algebraischen Auflösung der Gleichungen. — Abhandlungen von Évariste Galois: Beweis eines Satzes über die periodischen Kettenbrüche. Analyse einer Abhandlung über die algebraische Auflösung der Gleichungen. Ueber die Theorie der Zahlen. Brief von Galois an Auguste Chevalier. Abhandlung über die Bedingungen der Auflösbarkeit der Gleichungen durch Wurzelgrössen. Bruchstücke einer Abhandlung: Von den primitiven Gleichungen, welche durch Wurzelgrössen lösbar sind. — Galois ist geboren 1811, gestorben 1832. H.

Robert Mayer und Hermann v. Helmholtz eine kritische Studie von Dr. Th. Gross. Berlin 1898. M. Krayn. 174 S.

Obgleich die Schrift ihrem weit überwiegenden Inhalte nach, welcher der Kritik anheimfällt, eine philosophische Arbeit ist, so können wir sie doch hier nur als litterarische Erscheinung besprechen: die Kritik nämlich erfordert in so vielerlei Punkten Gegenkritik, dass sich diese nicht wol in der nötigen Kürze geben lässt; grösstenteils würde es sich dabei um bekannte Schwächen der formalen Logik handeln. Wörtlich mitgeteilt sind aus den Schriften

ster, dann zweiter Ordnung; die zweite Stufe, Punkt- und Strahlenfelder, von Ab- und Umbildungen erster, dann von Um- und Abbildungen zweiter Ordnung. H.

Lehrbücher.

Dr. Franz Ritter von Močniks Lehrbuch der Arithmetik für Unter-Gymnasien bearbeitet von Anton Neumann, Professor am k. k. akademischen Gymnasium zu Wien. Erste Abteilung für die I. und II. Classe. Fünfunddreissigste, veränderte Auflage. — Zweite Abteilung für die III. und IV. Classe. Sechsundzwangzigste, veränderte Auflage. — Mit hohem k. k. Ministerialerlass allgemein zulässig erklärt. Wien und Prag 1898. F. Tempsky. 124 + 110 S.

Die 1. Abteilung beginnt mit der Einführung in das dekadische Zahlensystem, an welches sich die Anwendung auf Decimalbrüche unmittelbar anschliesst. Hierin, wie in den elementaren Rechnungen ist die äusserste Sorgfalt beim Streben nach Gründlichkeit, Umsicht und correctem Ausdruck in hohem Masse anzuerkennen. Um so mehr ist es auffallend, dass der wertvollste Gewinn des dekadischen Zahlensystems, der Algorithmus, durchweg geringschätzig beiseite geschoben ist, was mit dem übrigen Zuwerkegehen im stärksten Contrast steht. Vom Eingreifen der Addition und Subtraction mehrerer Ziffern gleichen Ranges in den nächst höhern Rang ist nirgends die Rede. Diesen Fall hat der Verfasser, wie man leicht merkt, überall geflissentlich vermieden; denn bei der Erklärung sind die Beispiele stets so gewählt, dass nie die Summe zweier Ziffern zweiziffrig oder ein Subtrahend grösser als der Minuend ist. Bei den Uebungsbeispielen hingegen kommt der Fall häufig vor; hier traut der Verfasser dem Schüler plötzlich zu, dass er sich zu helfen wissen werde, nachdem er ihm noch eben zuvor alle Gelegenheit entzogen hat, den Fall zu beachten, das Verfahren zu erlernen und zur Regel zu machen. — Ausser den 4 Species sind in der 1. Abt. noch die Teilbarkeit der Zahlen, die Rechnung mit gemeinen Brüchen, die Proportionen, die Rechnung mit benannten Zahlen und einige Anwendungen behandelt; in der 2. Abt. Algebra als Buchstabenrechnung, Quadriren, Kubiren, Wurzelausziehen, Gleichungen 1. Grades und einige Anwendungen. Aufgaben sind stets beigefügt. Hoppe.

Močniks geometrische Anschauungslehre für Unter-Gymnasien. Bearbeitet von Johann Spielmann. I. Abteilung (für die I. und II. Classe). Mit 114 Figuren. Fünfundzwanzigste veränderte Auflage. — II. Abteilung (für die III. und IV. Classe.) Mit 91 Figuren. Zwanzigste, veränderte Auflage. — Mit hohem k. k. Ministerial-Erlass allgemein zulässig erklärt. Wien und Prag 1899. F. Tempsky. 82 + 91 S.

Die Geometrie zeigt dieselbe Sorgfalt, Gründlichkeit und Umsicht wie die Arithmetik des gleichen Verfassers. Hier galt das Streben der Orientirung im Raume, die aber nicht in weit umfassendem Sinne (wie von der neuern synthetischen Geometrie), sondern im engsten Gebiete isolirter Elemente (wie von Euklid) in Angriff genommen wird. Den Anfang bietet die Betrachtung des Würfels. Auf Ebene, Gerade folgen weiter Kreis, Winkel, Parallele, Dreieck, Congruenz, Viereck, Vieleck. Der Vortrag bindet sich an kein gleichmässiges Princip: er sorgt vielmehr, nichts nützliches zu übergehen. Sätze, Constructionsaufgaben werden gelegentlich gegeben. — Die II. Abt. behandelt die Flächengleichheit, Ausmessung und Aehnlichkeit, dann die Geraden und Ebenen im Raume, Körper und deren Ausmessung. H.

Dr. Franz Ritter von Močniks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgaben-Sammlung für die obern Classen der Mittelschulen. Bearbeitet von Anton Neumann, Professor am k. k. akademischen Gymnasium in Wien. Mit hohem k. k. Ministerialerlass allgemein zulässig erklärt. Wien und Prag. 1876. F. Tempsky. 306 S.

Die Hauptabschnitte des Buchs sind folgende: Addition und Subtraction. Multiplication und Division. Gleichungen des 1. Grades. Potenziren, Reduciren und Logarithmiren. Gleichungen des 2. Grades. Unbestimmte Gleichungen. Kettenbrüche. Progressionen. Combinationslehre. Einige Themata werden noch in einem Anhang behandelt. Mit dieser Einteilung, die sich an die Rechnungsarten anknüpft, würde indes der immer wachsende Inhalt des Begriffsgebietes wenig kund getan sein; es wird nach Ermessen des Verfassers an bester Stelle entwickelt. Im ganzen ist das Streben nach wissenschaftlich correcter Darlegung sehr anzuerkennen. Die zu den einzelnen Abschnitten gehörigen Uebungen finden sich in deren Reihenfolge am Schlusse des Buchs. H.

Leitfaden der Geometrie für höhere Schulen. Von Dr. Hermann Dobriner, Oberlehrer an der Realschule Philantropin zu

Frankfurt a. M. Mit zum Teil farbigen Figuren. Leipzig 1890. R. Voigtländer.

Es ist dem Ref. nur das Geleitwort und das Inhaltsverzeichniss zugegangen, kann daher das Folgende nur als teilweise Wiedergabe der Charakterisirung von Seiten des Verfassers gelten. Die Worte des Leitfadens sind nicht dafür bestimmt von den Schülern beim Unterricht wiederholt, noch überhaupt im Gedächtniss behalten zu werden, sondern vielmehr dem Zwecke entsprechend gewählt, den systematischen Zusammenhang der Lehren einfach und leichtfasslich darzustellen und eben dadurch die Lehren zum dauernden Eigentum zu machen. Die Beweise sind meist nur angedeutet. Die Ausführung bleibt in allen Beziehungen dem Lehrer überlassen. Die 3 Teile des Buchs enthalten die Pensa für 3 Classen. Der I. Teil, reine Planimetrie, hat die 13 Abschnitte: Grundsätze und Erklärungen, Congruenz; Dreieck; Parallelen; Parallelogramm; ebener Kegel; Kreis; Flächengleichheit; gleiche Rechtecke gebildet aus den Seiten ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke: proportionale Strecken; perspectivische Figuren: goldener Schnitt; Proportionen zwischen Flächen und Strecken: Der II. Teil, rechnende Planimetrie, hat die 5 Abschnitte: Verhältniss zweier commensurabeln Grössen; Masszahlen geradlinig begrenzter Flächen; Berechnung verschiedener Stücke eines Dreiecks aus den Masszahlen seiner Seiten; regelmässige Vielecke und Kreis: Anfangsgründe der Trigonometrie. Der III. Teil, Anfangsgründe der Stereometrie, hat die 4 Abschnitte: Lage von Ebenen und Geraden im Raume; perspectivisches Zeichnen; einfachste Körper mit krummen Oberflächen, einfachste Polyeder. H.

Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrössen-Lehre. Im Auftrage der früheren Königlich Preussischen General-Inspection der Artillerie und mit Zustimmung der jetzigen Königlich-Preussischen General-Inspection der Fuss-Artillerie zum Gebrauche als Leitfaden bei dem mathematischen Unterricht in den Regiments-Schulen der Artillerie, sowie zur Benutzung beim Selbst unterricht, bearbeitet von R. Foth, Feuerwerks-Major a. D. Mit 135 in den Text gedruckten Holzschnitten. Fünfte Auflage. Hannover und Berlin 1899. Carl Meyer (Gustav Prior). 300 S.

Die 3. Auflage ist im 25. litterarischen Bericht S. 1, die 4. Aufl. im 51. l. B. S. 28 besprochen. Die gegenwärtige Auflage unterscheidet sich in nichts wesentlichem von den früheren. H.

Elementarmethodische Behandlung der Logarithmen und ihrer Anwendungen für Seminare, Gymnasien, Realschulen, technische Lehranstalten und zum Selbstunterrichte. Von Richard Herrmann, Seminar-Oberlehrer in Nossen. Gotha 1899. F. F. Thienemann. 63 S.

Diese Schrift bildet das 10. Heft des Werkes: Beiträge zur Lehrerbildung und Lehrerfortbildung. Herausgegeben von K. Muthesius, Seminarlehrer in Weimar. Sie ist ein erweiterter Sonderabdruck der dem 7. Berichte des Königl. Seminars zu Nossen beigegebenen wissenschaftlichen Abhandlung. Die gesonderte Behandlung der Logarithmenlehre, welche doch von Natur einen Teil der Algebra ausmacht, die also um der Vollständigkeit der Principien der Algebra willen beim Unterrichte in derselben nicht fehlen kann, scheint darauf hinzudeuten, dass das Betreiben der Logarithmenlehre ein erst in neuerer Zeit erhobener Anspruch an die Lehrerbildung ist. Dieser neue Lehrgegenstand musste nun pädagogische Fragen und Aufgaben in mehr als einer Gestalt zugleich hervorrufen: es handelt sich einerseits um das Verständniss der Bedeutung des Logarithmus und seiner Theorie innerhalb der Algebra als zweite Inversion der Potenz, andrerseits um seinen Gebrauch zum Instrument der numerischen Rechenkunst. Die letztere Seite der Auffassung bietet dem Unterricht und Studium ein so grosses Feld dar und befindet sich als Quelle neu erlangter Fähigkeit in soviel günstigerer Lage, um das Interesse auf sich zu lenken, dass leicht die erstere in Vergessenheit fällt, das theoretische Verständniss und der geistesbildende Inhalt der Logarithmus-Lehre verloren geht, und dann die Kunst ohne Urteil als reine Fertigkeit geübt wird. Ein solcher Einfluss der gesonderten Behandlung der Logarithmus-Lehre ist nun bei gegenwärtiger Bearbeitung ausgeschlossen, indem die Theorie gleich anfangs zur Hauptsache gemacht, der Logarithmus nicht als hinzukommender Lehrgegenstand eingeführt wird, sondern seine Stelle innerhalb der 7 Grundoperationen einnimmt. Die Anwendungen zur numerischen Rechnung werden getrennt behandelt, nachdem vorher im Anschluss an die Theorie die Einrichtung der Tafeln erläutert und motivirt ist. Nun stellt aber die Logarithmenlehre der Methode manche pädagogische Aufgabe, welche bei den übrigen Grundoperationen nicht vorkommt, in welcher also irgend welche Schwierigkeiten gefunden werden können. Das Verhalten diesen gegenüber entzieht sich der Beurteilung, weil der vorauszusetzende Standpunkt der Lernenden zu verschieden ist. Nur soviel sei als charakteristisch für das Zuwerkegehen bemerkt, dass dasselbe nicht grösstmögliche Einfachheit und Leichtfasslichkeit, sondern erschöpfende Behandlung aller zur Doctrin gehörigen Punkte anstrebt, zum Teil: Punkte, welche

die Anfänger nichts angehen, deren Erörterung daher die Lehre nur complicirt macht. Nur aus diesem Grunde kann man die gegenwärtige Bearbeitung, die sonst hinsichtlich ihrer Gründlichkeit und Sorgfalt für den Lehrer Wert haben mag, nicht für definitiv zum Unterricht geeignet erklären. Hoppe.

Text-book of algebra with exercises for secondary schools and colleges. By George Egbert Fisher, M. A. Ph. D. and Isaac J. Schwatt, Ph. D. Assistent Professors of mathematics in the University of Pensylvania. Part I. Philadelphia 1898. Fisher and Schwatt. 683 S.

Das Lehrbuch ist dafür eingerichtet, bei vorausgesetzter Bekanntschaft mit den elementaren Rechenoperationen mit den geringsten Ansprüchen an mathematische Begabung den Lernenden in langsamen Schritten zum Verständniss der Algebra zu führen. Es werden (nach einleitender Erklärung der allgemeinen, positiven und negativen Zahlen) nach einander behandelt: die 4 Grundoperationen in allgemeinen Zahlen; dieselben an ganzen algebraischen Ausdrücken; ganze algebraische Gleichungen; typische Formen; Klammern; Factoren und Vielfache ganzer algebraischer Ausdrücke; Brüche; gebrochene Gleichungen in 1 Unbekannten; Gleichungen mit allgemeinen Bekannten; Interpolation der Lösungen; simultane lineare Gleichungen; Aufgaben, welche zu solchen führen; Potenzwurzeln; Ungleichungen; Irrationalzahlen; irrationale Potenzwurzeln als Rationalzahlen (surds); imaginäre und complexe Zahlen; quadratische Gleichungen; Gleichungen höheren Grades; irrational gegebene Gleichungen; simultane quadratische und höhere Gleichungen; Verhältniss, Proportion und Veränderung; Exponentialfunctionen; Progressionen; das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten. H.

Das Ganze des Linearzeichnens für Gewerbe- und Realschulen, sowie zum Selbstunterricht Von Professor Heinrich Weishaupt. 4 Abteilungen in 132 Tafeln nebst erläuterndem Text. 2. Abteilung: Geometrische Projectionslehre. 1. Stufe. Mit 30 Tafeln. 4. Auflage, neu bearbeitet von Dr. Max Richter, Oberlehrer an der 1. Realschule zu Leipzig. Leipzig 1896. Hermann Zieger. 91 S. Text.

Nach Einleitung über Darstellungsweisen wird behandelt: Darstellung von Punkten, Linien und Ebenen in Normalprojection; Darstellung von Prisma, Cylinder und Pyramide in Normalprojection;

Uebergang von der Normalprojection zu andern Projectionsmethoden; Durchschnitte kantiger und runder Körper mit Ebenen und Entwickelung ihrer Oberfläche; Darstellung von Rotationsflächen; Durchdringung zweier Körper. H.

Sammlungen.

Uebungsbuch für den Unterricht in der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie. Herausgegeben von F. von Lühmann, Professor am Gymnasium in Königsberg i. d. Neumark. Berlin 1898. Leonhard Simion. 81 S.

Die hier dargebotene, ungemein reiche Sammlung von Aufgaben, welche aus den Formeln der Goniometrie durch verschiedene Fragestellung bei Verschiedenheit der Data hervorgehen, ist zu mannigfaltig, um ihren Umfang in der Kürze vorführen zu können, ihre angegebene Einteilung genügt dazu nicht. Die Aufgaben sind teils algebraisch, teils numerisch. Wo eine algebraische Lösung Suchen erfordert, ist der Weg angegeben. Aus der Praxis sind einige Aufgaben der Landesvermessung aufgenommen.

Aufgaben über Wärme einschliesslich der mechanischen Wärmetheorie und der kinetischen Theorie der Gase. Für Studirende an Mittel- und Gewerbeschulen, zum Selbststudium für angehende Techniker, Physiker u. a. Von Dr. Eduard Maiss, k. k. Professor an der 1. Staats-Oberrealschule des II. Bezirks Wiens. Mit 29 Figuren im Text. Wien 1898. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 118 S.

Diese Aufgaben sind eine Fortsetzung der in demselben Verlage erschienenen und als sehr verdienstlich bereits anerkannten „Aufgaben über Elektricität und Magnetismus." H.

Tabellen.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Leipzig 1898. G J. Göschen, 128 S.

Die Tafeln enthalten die Logarithmen der Ganzen bis 10000, dann die log sin und log tg mit anfangs kleinern, dann grössern Differenzen, dann die Inversen dieser Functionen. Die Interpolation ist nicht tabellarisch, sondern nur Anweisung dazu gegeben. Am Schlusse folgen einige tabellarische Angaben für physikalischen u. a. Gebrauch. H.

Tables for the formation of logarithms and anti-logarithms to twenty four or any less number of places. With explanatory introduction and historial preface. By Peter Gray, F. R. A. S., Honorary Member of the Institute of Actuaries. London 1876. Charles and Edwin Layton. 81 S.

Den Tafeln geht voraus die Entwicklung der vom Verfasser neu erfundenen Methode der Berechnung der Logarithmen nebst Inversen auf grosse Stellenzahl. Das Princip ist die Auflösung der Zahl in Factoren, deren Logarithmen man in den Tafeln findet. Den Logarithmus erhält man durch Summation der Logarithmen der Factoren. Hiermit wird das gesamte Erforderniss an Tafeln für 24stellige Rechnung auf 41 S. reducirt.

Litterarischer Bericht
LXVI.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Leitfaden für den Unterricht in der höheren Mathematik. Von Emanuel v. Budisavlievic, Major des Armeestandes, und Alfred Mikuta, Hauptmann des Div.-Art.-Regts. Nr. 38., Lehrer an der k. und k. technischen Militär-Akademie. — II. Band. Grundzüge der Differential- und Integral-Rechnung. Von Hauptmann Alfred Mikuta. Mit 142 Textfiguren. Wien und Leipzig 1898. Wilhelm Braumüller. 607.

Dieser Band umfasst die höhere Analysis; er gibt zuerst die allgemeinen Principien und Methoden der Differentiation, der Integration der Functionen und der bestimmten Integrale, dann Anwendungen auf Reihen, complexe Grössen, Gleichungen, Maxima und Minima, dann auf Geometrie, Theorie der ebenen, der allgemeinen Curven, der Flächen, insbesondere Quadratur, Rectification, Kubatur und Complanation, dann auf Integration von Differentialgleichungen. Die Abfassung zeichnet sich aus durch ausführliche Berücksichtigung aller Punkte und Fragen, deren Behandlung für das Verständniss von Seiten mehr oder minder begabter Schüler nötig scheinen möchte, ein Gesichtspunkt hinter dem systematische Darstellung und Concinnität zurüktreten musste. Vor allem aber ist als unterscheidend von fast allen früheren Bearbeitungen der höhern Analysis hervorzuheben, dass die gegenwärtige zu den wenigen gehört, welche die Theorie des Unendlichen als selbständigen Lehrgegenstand aller Anwendung desselben vorausgehen lassen. Durch das bisherige Verhalten ist ein vermeintlich dunkler Punkt in der Doctrin geschaffen

worden: Lagrange hoffte ohne das Unendliche auszukommen, Euler wollte sich im erfolgreichen Laufe der Entdeckungen nicht durch die fundamentale Frage aufhalten lassen, Cauchy zog es vor nur sparsame Anwendung vom Unendlichen zu machen. In dieser langen Zeit der Vernachlässigung hat sich nun allerlei verschiedene unklare Auffassung verbreitet, die mit den dadurch veranlassten Irrtümern bis heute fortbesteht; noch immer gilt das Unendliche für eine methodische Schwierigkeit, bloss weil aus Mangel an logisch correctem Unterricht bei zu vielen Schülern das Verständniss mangelhaft bleibt. Die elementare und doch ausreichende Theorie des Unendlichen erfordert keine neue Erfindung, sie ist bekannt genug und leicht zu erlernen, aber nicht ohne Erlernen selbstverständlich. Wo sie jedoch aufgestellt ward, hat man sie, ohne je einen Einwand dagegen auszusprechen, ignorirt und sich (sei es nun um der Popularität willen oder sonst aus einem Motiv) lieber an die von Vorurteilen eingenommene Menge gewandt. Unter diesen Umständen ist es schon eine sehr verdienstliche Tat, dass in einem neuen Lehrbuch der Analysis eine Theorie des Unendlichen als besonderer Lehrgegenstand auftritt. Freilich entspricht die Aufstellung noch nicht dem Ziele der Besserung jener Zustände; dazu müsste die Theorie in ihrer natürlichen Einfachheit dargestellt sein; in solcher Gestalt erscheint sie hier noch nicht, weil nach bereits erwähntem Grundsatz auch mindere Begabung und unklare Auffassung berücksichtigt werden sollte, was vielleicht nötig schien, um dem Schicksal früherer Bearbeitungen zu entgehen, die man ganz beiseite gelassen hat. Ist nun diese Rücksichtsnahme durch die Umstände gerechtfertigt, so kann man jedenfalls berichtigende Belehrung verlangen. Diese ist fast nirgends zu vermissen, aber gerade im wichtigsten Punkte wird im Gegenteil für die vorgefundene Unklarheit sogar Partei genommen. Die verbreitete irrige Meinung ist die, dass zum Denken einer unendlichen Grösse ein unendlicher Denkprocess nötig sei. Sie stammt nicht aus der elementaren Algebra, nicht aus dem gemeinen Denken, sondern ist eine blosse Verirrung der Speculation. Mit einer Variabeln x rechnet man auf Grund ihrer Variabilität, ohne sie je variiren zu lassen; ebenso rechnet man mit unendlichen Grössen, ohne den Lauf allmählicher Approximation je in Betracht zu ziehen. Das einfache Mittel ist ein indirecter Schluss, auf den sich die ganze Begründung der Infinitesimalrechnung reducirt; nur dieser ist exact entscheidend, die Approximation ist als Beweis lückenhaft, weil sie nicht zuende geführt werden kann, ein Umstand der die vermeintliche, dem Begriffe des Unendlichen anhaftende Schwierigkeit sehr erklärlich macht. Auch ist jener indirecte Schluss keine Erfindung der Neuzeit, denn schon Euklid wendet ihn an bei den Proportionen am Dreieck; vielmehr ist die Anwendung der

Approximation ein Misgriff der neuen Lehrmethode, zu welchem die andauernde Abneigung gegen fundamentale Fragen geführt hat. Gegen diesen Misgriff ist der Verfasser nicht belehrend aufgetreten, hat im Gegenteil die irrige Meinung noch unterstützt, indem er (auf S. 48) erstens schreibt $\lim x = \pm\infty$ statt $x = \pm\infty$, also sinnverwirrend dem x eine Grenze zuschreibt um auszudrücken, dass es keine Grenze hat, zweitens durch die Aeusserung: „Die Bezeichnungen unbeschränkt klein, bzhw. unbeschränkt gross werdende Grössen würden bedeutend klarer diesen Process charakterisiren“ — das (erfolglose) Denken einer Approximation ohne Ende schon in den Namen legen will. Hoppe.

Lehrbuch der Algebra. Von Heinrich Weber. Zweite Auflage. Zweiter Band. Braunschweig 1899. Friedrich Vieweg und Sohn. 855 S.

In 1. Auflage ist der 1. Band im 54. litt. Bericht, S. 21, der 2. Band im 59. litt. Ber. S. 34 besprochen. In der 2. Auflage ist die Theorie der algebraischen Zahlen, namentlich durch Berücksichtigung der Arbeiten von Frobenius und Hillert, erweitert worden; dagegen ist die ursprüngliche Grundlage der Theorie der Abel'schen Zahlkörper gegenüber der veränderten von Hilbert beibehalten, und sind nur einige Vereinfachungen eingetreten. H.

Octonions. A development of Clifford's bi-quaternions. By Alex. Mc Aulay, M. A. Professor of mathematics and physics in the University of Tasmania. Cambridge 1898. London, E. J. Clay and sons. Leipzig, F. A. Brockhaus. New York, the Macmillan company. Bombaye, E. Seysaour Hale. 253 S.

Clifford ist der Erfinder der Theorie. Der Verfasser trennt sich aus 3 Gründen von seiner Entwicklung: 1) soll die Theorie ihre Begründung unabhängig von den Quaternionen haben. 2) baut er auf euklidische, Clifford auf nicht-euklidische Geometrie. 3) versteht er Clifford nicht. Er nimmt ausser Clifford noch Bezug auf Grassmann's Ausdehnungslehre und Sir Robert Ball's Theory of screws. H.

Elementar entwickelte Theorie und Praxis der Functionen einer complexen Variabelen in organischer Verbindung mit der Geometrie. Ein Handbuch für Lehrer und Freunde der Mathematik, Von Adalbert Breuer, k. k. Professor an der Staatsoberrealschule

des III. Gemeindebezirks Wiens. Mit 84 Textfiguren. Wien 1898. C. Dawerkow. 205 S.

Im Vorwort wird der heutige Zustand der Lehre von den Functionen Complexer charakterisirt als eine Vielheit verschiedener Ansichten und verschiedener Wege, welche es zur dringenden Aufgabe machten, eine einheitliche Auffassung zur Geltung zu bringen. Aus allem weiter davon Gesagten lässt sich indes nicht entnehmen, was der Verfasser mit der angeblichen Verschiedenheit, mit der Einseitigkeit der verfolgten Wege und mit der gesuchten Einheitlichkeit der Auffassung gemeint hat. Im vorliegenden Buche beansprucht er, Analysis und Geometrie in vielen Punkten zur Deckung gebracht zu haben, behandelt seien vorläufig nur Aufgaben 2. Grades. Das Buch selbst lässt das Ziel des anfangs ausgesprochenen reformatorischen Strebens noch weniger erkennen als das Vorwort. Es trägt die elementare Lehre von den complexen Grössen nach gewöhnlicher Methode vor, geht aber weiterhin sehr ausführlich auf projective Geometrie ein. Auffällig ist, dass die Gebilde von Ebene auf Ebene bei neuer Begrenzung, welche die allgemeine Function einer complexen Variabeln unabhängig von ihrer Reduction auf die Grundform $a+ib$ enthält, daher zur Darstellung des Begriffs verwendbar ist, gar nicht erwähnt werden. H.

Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, tables numériques et applications. Par Lucien Lévy, Examinateur d'admission et Répétiteur d'analyse à l'École polytechnique. Paris 1898. Gauthier-Villars et fils. 237 S.

Das Vorliegende zeigt eine Auswahl von Lehrgegenständen aus der höhern Analysis, unter andern auch der Doctrin der elliptischen Functionen, nach Aussage der Vorrede bearbeitet für Ingenieure, welche die Integralrechnung nicht studiren. Hauptziel ist numerische Anwendung und sind für diesen Zweck 4 Tafeln (im Umfang von 9 Seiten) über K, E, u. a. entlehnt von Legendre und Bertrand beigegeben. H.

Höhere Analysis. Erster Teil. Differentialrechnung. Von Dr. Friedrich Junker. Mit 63 Figuren. Leipzig 1898. G. J. Göschen. 192 S.

Es ist nicht überflüssig zu bemerken, dass dieses Lehrbuch in einem besondern Abschnitt die Lehre vom Unendlichen gibt. Leider

ist diese Lehre nicht geeignet den herrschenden Irrtümern und Unklarheiten abzuhelfen, weil sie sich keiner exacten Rede befleissigt. Die Fehler, um die es sich hier handelt, stammen nicht aus dem gemeinen Denken, sondern sind erst von Gelehrten in die Lehre vom Unendlichen hineingeklügelt worden. In gemeiner Rede sagt man von jemand, der etwas tun kann, nicht, er könne fähig werden, sondern er sei fähig es zu tun. In der Algebra heisst x variabel, wenn es variiren kann, während es vielleicht in der ganzen Rechnung nicht variirt. Statt aber ebenso zu definiren: eine Variable ist unendlich klein, wenn sie (nach abs. W.) beliebig klein werden kann, sagen jene unklaren Didakten: dann kann sie unendlich klein werden, lassen also das Attribut unendlich klein selbst unerklärt, und in der ganzen Infinitesimalrechnung bleibt es unverstanden. Von ähnlichen unlogischen Fassungen der Lehren ist das Buch voll. Hoppe.

Introduction to the theory of analytic functions. By J. Harkness, M A. (Cambridge) Professor of mathematics, Bryn Maurr College, Pennsylvania, and F. Morley, Sc. D. (Cambridge) Professor of pure mathematics, Haverford College, Pennsylvania. London 1898. Macmillan and Co. 336 S.

Das Buch behandelt nach einander: das Ordinalzahlensystem, geometrische Darstellung complexer Zahlen, bilineare Transformation, rationale algebraische Function, Convergenz unendlicher Reihen, einförmige Convergenz reeller Reihen, Potenzreihen, Operationen mit ihnen, Continuation von solchen, analytische Theorie der Exponentialfunctionen und Logarithmen, singulare Punkte analytischer Functionen, Weierstrass' Factor-Theorem, Integration, Laurent's Theorem und die Thetafunctionen, Functionen aus einem Netze, elliptische Functionen, einfache algebraische Functionen auf Riemann'schen Flächen, algebraische Functionen, Cauchy's Theorie und das Potential. Die Lehrweise ist elementar, nur stellt sie an den Leser die nicht leichte Aufgabe, in jedem Satze die nicht ausgesprochenen Gedanken zu erraten. H.

Die Formeln für die Summe der natürlichen Zahlen und ihre ersten Potenzen abgeleitet an Figuren. Von Dr. Karl Bochow, Oberlehrer in Magdeburg. Berlin 1898. Otto Salle. 45 S.

Es werden die mannigfaltigen Relationen zwischen den ein- und mehrfachen Summen der 1, 2, . . . 6ten Potenzen der Zahlen 1.

Aus den mannigfaltigen Beobachtungen, unter denen namentlich der Satz angeführt ist: Zwei concentrische reguläre Dreiecke sind dreifach perspectiv; die Centra und Axen bilden je ein reguläres mit demselben concentrisches Dreieck — resultiren u. a. die Sätze: Bei einer ebenen Curve 3. Ordnung bilden die 4 Dreiecke, deren Seiten die 9 Inflexionspunkte enthalten, eine 6fach perspective Gruppe. Bei 2 dreifach perspectiven Dreiecken kommen die 4 Umstände: a) die 3 Centra liegen in einer Geraden, b) die 3 Axen schneiden sich in einem Punkte, c) die 6 Eckpunkte beider Dreiecke liegen auf einem Kegelschnitte, d) die 6 Seiten beider Dreiecke berühren einen Kegelschnitt, entweder gleichzeitig vor, oder es fehlen alle 4. — Wenn 2 Dreiecke in einer solchen perspectiven Beziehung stehen, dass das Centrum und die Axe Pol und Polgerade in Bezug auf das eine Dreieck sind, so bestehen unter ihnen auch noch 3 weitere perspective Beziehungen. H.

Ueber die bildliche Darstellung geometrischer Raumgebilde in 2 centralen Projectionen oder die Doppelperspective. Von Professor Franz Schiffner. 46. Jahresber. d. k. k. Staats-Oberrealsch. Wien III. Bez. 1896—1897. 24 S.

In Anwendung auf die Construction der stereoskopischen Bilder ist diese Projectionsweise schon öfter behandelt. Hier sind es folgende Themata: Annahmen und Beziehungen, Darstellung des Punktes; Doppelperspective der Geraden und der Punktreihe; Darstellung der Ebene in 2 centralen Projectionen; besondere Lagen von 2 Geraden, 2 Ebenen, 1 Geraden und 1 Ebene; die wahre Grösse einer Strecke und des Winkels zwischen 2 Geraden; die 2 centralen Bilder ebener Figuren; zur Darstellung von Raumcurven in 2 centralen Projectionen, einiges über doppelperspectivische Bilder von Körpern. H.

Analytische Geometrie des Raumes. Von Dr. Max Simon, Strassburg i. E. Mit 28 Abbildungen. Leipzig 1898. G. J. Göschen. 200 S.

Der Inhalt des Buches rechtfertigt nicht im mindesten den Titel: analytische Geometrie. Es enthält vielmehr nur eine Coordinatenlehre mit Anwendung auf Flächen 2. Grades in synthetischer Behandlung; im einzelnen das Dualitätsprincip, die Coordinatentransformation, die Kugel, die Flächen 3. Grades und 2. Classe in allgemeiner Behandlung, Kegel und Cylinder, die eigentlichen centralen

Flächen 2. Grades (Quadriks) in allgemeiner Behandlung, die centralen Kegelflächen in specieller Behandlung, die Paraboloide, Kubatur. Hoppe.

Sur les courbes parallèles à l'ellipse. Par F. Gomes Teixeira, Professeur à l'Académie polytechnique de Porto, ancien Professeur à l'Université de Coîmbre. Bruxelles 1838. Hayez. 39 S.

Diese Curven, bereits untersucht von Cauchy (Compt. R. 1841 p. 1062), Breton de Champ (Nouv. Ann. t. III. 1844), Catalan (N. A. l. c. p. 553), werden hier in vielseitiger Weise behandelt und alle Punkte zur Frage gebracht: ihre Bedeutung als Toroïde, ihre mehrfachen Punkte, ihre 4 Rückkehrpunkte, die Fälle, wo ihr Abstand von der Ellipse dritte Proportionale zu deren Halbaxen ist, ihre Asymptoten, die 12 Rückkehrpunkte und 8 dreifache Punkte der Toroïde, ihre Fusspunkt-Curve und zahlreiche Eigenschaften, die durch Verbindung mit andern Gebilden hervorgehen. H.

M. Juan J. Duran Loriga. Commandant d'Artillerie à la Corogne. Notes de géométrie. — Sur des triples de cercles associées, Association Française. Congrès de Saint-Étienne 1897.

In 2 Noten im Journal von Longchamps (1896 p. 78 und Januar, Februar, März 1897) hat der Verfasser eine elementare Untersuchung publicirt über Kreise, die er radicale und antiradicale Kreise nennt, und dabei die Hoffnung ausgesprochen, dass die systematische Einführung in die Geometrie, besonders in die Geometrie des Dreiecks zu interessanten Ergebnissen führen würde. Um aber unmittelbar die Gleichung der obengenannten Kreise zu erhalten, sei es sehr vorteilhaft nicht allein die Gleichungen in barycentrischen Coordinaten der Kreise, sondern auch der merkwürdigen Punkte als verschwindende Kreise ansehen zu können. Hierauf stützt sich der gegenwärtige Aufsatz über Tripel associirter Kreise. Da die Ergebnisse nur in Rechnungsform, nicht in Worten vorliegen, so ist eine kurze Mitteilung nicht wol möglich. H.

Grundlagen zu einer Geometrie der Kugel nach Grassmann's Ausdehnungslehre. Von Ernst Rudert. Progr. d. III. städtischen Realschule zu Leipzig 1898—1899. 4°. 44 S.

Der Abhandlung wird (weil Grassmann's Ausdehnungslehre zu

Lehrbuch der Mechanik (Cours de mecanique). Von Ch. Sturm. Uebersetzt von Theodor Gross, Privatdocent und Lehrer an der Königl. Festungsbauschule. Erster Band. Berlin 1899. S. Calvary u. Co.

Einige bei der Uebersetzung vorgenommene Aenderungen sind im Vorwort angezeigt, die wir nur gutheissen können. Der 1. Band enthält die Statik und den 1. Teil der Dynamik. Die Statik beginnt mit den Kräften, die auf 1 Punkt wirken. Hier ist im Grunde nur die lineare Zusammensetzung zu erklären und das Parallelogramm der Kräfte zu beweisen. Aus letzterm geht dann hervor die orthogonale Zerlegung der Kräfte, ihre Zusammensetzung und ihre Gleichgewichtsbedingungen, weiter verwendet auf den Fall beschränkt beweglichen Angriffspunkts. Nun hat aber der Verfasser ganz ordnungswidrig einen Satz eingeschoben, der sich nicht auf 1 Angriffspunkt, sondern auf ein starres System als Angriffsobject bezieht, nämlich den Satz (6) von der Verschiebung des Angriffs in der Kraftrichtung. Angewandt wird er in dem bezeichneten Abschnitt nicht! es ist also kein Motiv zu ersehen ihn nicht bis zum folgenden Abschnitt zu versparen, wo er Anwendung findet. Hier in der Tat lässt sich für das Zuwerkegehen ein Motiv entdecken. Denn die Einführung des starren Systems beruht auf einer interimistischen Hypothese der Statik, die hier wie gewöhnlich verschwiegen wird. Soll man nun annehmen, der Verfasser habe, um der logischen Kritik zu entgehen, den Satz so fern und ins Dunkel gestellt? Es folgt nun weiter (für starres Punktsystem) Zusammensetzung und Gleichgewicht paralleler Kräfte; Schwerpunkt; dessen Berechnung; Anziehung; besondere Körper. Die Dynamik behandelt: Beschleunigung; Masse; Bewegung schwerer Körper; bei widerstehendem Mittel: Pendel; Planetenbewegung. In den letzten 9 Lectionen werden sehr mannigfaltige Umstände in Betracht gezogen. Hoppe.

Litterarischer Bericht
LXVII.

M e c h a n i k.

Théorie du potentiel Newtonien, leçons professées à la Sorbonne pendant le premier sémestre 1894—1895. Par Poincaré, Membre de l'Institut. Rédigés par Eduard Le Roy, aucien élève de l'École normale supérieure, Docteur dès sciences, Georges Vincent, Agrégé préparateur à l'École normale supérieure. Paris 1899. Georges Carré et C. Naud. 360 S.

Es werden in einfacher leicht verständlicher analytischer Herleitung nach einander folgende Capitel behandelt: Potential in einem äussern Punkte mit wirkenden Massen, Gleichung von Laplace, Beispiele, Entwickelung in Reihen; — in einem innern Punkte, Formel von Poisson; anziehende Flächen und anziehende Linien; die Function von Green und das Problem von Dirichlet; dessen Lösung im Fall des Kreises und der Kugel; Theorem von Harnack; Doppelschichten; Lösung des Dirichlet'schen Problems, Methode von Belayage; — Methode von Neumann; deren Ausdehnung auf den Fall einfach zusammenhangender Gebiete, die fundamentalen Functionen.

H.

Cinématique et mécanisme potentiel et mécanique des fluides. Cours professé à la Sorbonne. Par H. Poincaré, Membre de l'Institut. Rédigé 'par A. Guillet. Paris 1899. Georges Carré et C. Naud. 385 S.

Es werden folgende Capitel behandelt: Kinematik im allgemeinen, Bewegung eines unveränderlichen ebenen, auf der Ebene glei-

tenden Gebildes; Bewegung eines unveränderlichen starren Körpers; Helikoidalbewegung; relative Bewegung eines Punktes; Mechanismen; Functionen der Kräfte; Theorem von Green und Anwendungen; Anziehung eines Ellipsoids; Mechanik der Flüssigkeiten; Hydrodynamik.

H.

Die Probleme des logarithmischen Potentials für eine von zwei Kreisbogen begrenzte ebene Fläche. Ein Beitrag zur Potentialtheorie. Mit zwei Tafeln. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde der hohen philosophischen Facultät der Universität Leipzig vorgelegt von Wilhelm Dürll, Cand. Prob. und Vicar am Realgymnasium zu Zwickau. Leipzig. 134 S.

Die Probleme sind: Es soll entsprechend einem gegebenen Punkte innerhalb zweier sich schneidenden Kreise ermittelt werden die Green'sche Function, die Green'sche Belegung der Kreisbogen, deren Wert in den Schnittpunkten der Kreise und die Verteilung der Gesamtmasse der Belegung auf die Kreisbogen. Vorbereitend wird die Green'sche Function definirt, die zweckmässigen Coordinaten zur Lösung eingeführt, die angewandten Methoden angegeben, Hülfssätze und Entwickelungen zur Verwendung in der Theorie abgeleitet. Die Behandlung der Probleme selbst ist eine dreifache, die Methode der Spiegelpunkte, die Methode des Fourier'schen Integrals und die Reduction der Resultate der einenMethode auf die der anderen. H.

Cours complémentaire de mécanique rationelle. Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique et applications. Par P. Painlevé, Maître de Conférences à la Faculté des sciences de Paris. Paris 1895. A. Hermann. 4⁰. 291 S.

In 17 Lectionen wird die gesamte Mechanik nebst Anwendungen gegeben. Die ersten behandeln nach einander: Definitionen, Bewegung des Schwerpunkts, Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt, Gleichungen der Bewegung der Systeme mit und ohne Reibung: Gleichungen von Lagrange, Gleichung von D'Alembet, Satz von Lionville (relative Bewegung), Anwendung von Lagrange's Gleichungen zu deren Untersuchung, — Untersuchung der kleinen Bewegungen, Theorie des letzten Multiplicators, Eigenschaften der ersten Integrale. H.

Cours complémentaire de mécanique rationelle. Leçons sur le

frottement. Par Painlevé, Maître de Conférences à la Faculté des sciences à Paris. Paris 1895. A. Hermann. 4⁰. 171 S.

Die Theorie der Reibung wird in folgenden Abschnitten gegeben: Definition der Kräfte der Reibung, Form der Gesetze der Reibung, Besondere Fälle: Bewegung eines Punkts auf einer Curve oder Fläche, allgemeiner Fall. Combination der Verknüpfungen, besonderer, allgemeiner Fall, Fall, wo eine Gruppe von Verknüpfungen ohne Reibung ist. Regel bezüglich auf die Combination beliebiger Verknüpfungen, Bemerkung über den Fall der Reibung in der Ruhe. Ueber die Vereinbarkeit von Verknüpfungen. Ueber die Ueberflüssikeit der Verknüpfungen. Aufzählung der einfachen Verknüpfungen zwischen starren Körpern, Verknüpfungen 1., 2., 3. Classe, deren Combination. Allgemeine Eigenschaften der Gesetze der Reibung. — Es folgen viele Anwendungen. H.

The equations of hydrodynamics in a form suitable for application to problems connected with the movements of carths atmosphere. Prepared at the request of Willis L. Moore, Chief of the bureau. By Joseph Cottier, Columbia University. Published by authority of the Secretary of agriculture. Washington 1887. Weather bureau. 4⁰. 8 S.

Der Verfasser bemerkt, dass die gewöhnliche Aufstellung der hydrodynamischen Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten sich nicht eigne für Vorgänge, die mit der Atmosphäre in Verbindung stehen, wegen der Krümmung der Erdoberfläche, und nimmt daraus Anlass sie auf Polarcoordinaten zu transformiren. H.

Technik.

Essai sur la théorie des machines électriques à influence. Par V. Schaeffers, S. J.. Docteur ès sciences physiques et mathématiques, Professeur au Collège de la compagnie de Jesus à Louvain. Paris 1893. Gauthier Villars et fils. Bruxelles. Polleunis et Ceuterick. 139 S.

Die Gegenstände der Schrift sind folgende: Ursprung der Influenz-Maschinen. Fundamentale Principien. Classificationen der Influenzmaschinen: Maschine von Carré (mit arithmetischem —) Verdoppler von Bennet (mit geometrischem Wachsen). Multiplicator

von Nicholson, Maschinen von Belli, Verler-Maschine von Toepler. — Theorie der heutigen Influenzmaschinen. Maschinen erster Art, nämlich mit einfacher Rotation: erste Maschine von Holtz, Maschine von Schwedoff, von Voss, Replenischers von Lord Kelein. Maschinen 2. Art, nämlich mit inversen Rotationen: zweite Maschine von Holtz. Maschine von Winshurel, von Bonetti, von Pidgeon, mit Wassertropfen. Alternative Maschine: Maschine von Th. Gray, von Winshurel. — Allgemeine Schlüsse: Inductoren und Inducte, Benutzung der Ladungen, praktische Dispositionen. H.

Grundlagen der Lufttechnik. Gemeinverständliche Abhandlungen über eine neue Theorie zur Lösung der Flugfrage und des Problems des lenkbaren Luftschiffes. Von Max Lochner, Ingenieur. Berlin 1899. W. H. Kühl. 33 S.

Es ist ein sehr verbreiteter und trotz alles Mislingens lange Zeit nicht abgetaner Fehler der Forschung, dass sie meistens bewährte und erfolgreiche Methoden von einem Gegenstande auf einen neuen zu übertragen versucht, anstatt die Angriffsweise auf die specifischen Eigenschaften des neuen zu gründen. Demselben Fehler schreibt der Verfasser auch das ganze bisherige Mislingen in Lösung des genannten Problems zu. Man wendet auf Luftfahrt und Lenkung, wie er sagt, nur die in der Wasserschifffahrt erprobten Mittel und Grundsätze an ohne die Eigenschaften der Luft, namentlich die Elasticität zu berücksichtigen. In der Tat waren die ersten als lenkbar gebauten Luftschiffe sämtlich erfolglos. Das erste, welches einen wirklichen Erfolg zu verzeichnen hatte, war 1885 vom Hauptmann Renard und Ingenieur Krebs. Die Schrift geht nun ausführlich auf die vom Verfasser theoretisch geforderte Form des Luft-Propellers ein. Die Flügel desselben, nicht mehr als zwei, sind Ebenen, die durch die Rotationsaxe gehen, auf der dem Luftdruck ausgesetzten Seite steif, auf der andern elastisch. Eine Aeusserung über die Wellen des Wassers, welche die circulirende Bewegung ignorirt, ist auffallend, aber hier bedeutungslos, weil es sich nur um Luftwellen handelt. Es wird ferner erklärt und beschrieben: der Tragschirm, die Flügelhöhlung, der Widerstand, die Steuerung. Zum Schluss sind die Sätze der Theorie zusammengestellt. Eine Tafel mit 7 Figuren ist der Beschreibung hinzugefügt. H.

Bauwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. Lehrbuch und Aufgabensammlung. Verfasst von Dr. Arnold Fuhr-

mann, Geheimer Hofrath, ordentl. Professor an der Königl. technischen Hochschule Dresden. Erste Hälfte mit 73 — Zweite Hälfte mit 135 Holzschnitten. Berlin 1899. Wilhelm Ernst u. Sohn. 180 + 348 S.

Die Anwendungen und Aufgaben, sowie die allgemeinen Untersuchungen beschränken sich nicht auf Architektur, sondern erstrecken sich zum grossen Teil auf Geodäsie und vieles andre. Das Ganze ist nach den angewandten Disciplinen in Capitel geteilt: Differenzen und Differentiale (angewandt auf Beeinflussung der Resultate durch Messungsfehler). Linien und Flächen u. zw. einfach, dann doppelt gekrümmte Linien, Flächen. Vieldeutige Symbole. Maxima und Minima der Functionen einer, dann mehrerer veränderlichen Reihen. H.

Die Lehre vom Schuss und die Schusstafeln. I.—II. Auf dienstliche Veranlassung bearbeitet von Heydenreich, Hauptmann à la suite des Königlich Sächsischen I. Feldartillerie-Regiments Nr. 19, kommandirt als Mitglied der Artillerie-Prüfungskommission. Berlin 1898. Ernst Siegfried Mittler und Sohn. 67 + 109 S.

Die erste Abteilung gibt die Grundbegriffe, nämlich den Vorgang beim Schuss im allgemeinen zur Erklärung der dabei gebräuchlichen Benennungen, dann die Ermittelung derjenigen Grössen beim Schuss, welche zu ihrer Feststellung bestimmter Geräte und Messweisen bedürfen — Gasdrücke, Flugzeiten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Dann werden die Schusstafeln, ihre Einrichtung, Aufstellung und Gültigkeit erklärt. Die 2. Abteilung behandelt die innere, dann die äussere Ballistik. H.

R. scuola di applicazione par gl' ingegneri in Napoli. Pubblicazione deliberata dal Consiglio Direttivo in occasione della Esposizione Nazionale di Torino. Anno 1898. Napoli. Angelo Trani. 4°. 121 S.

Die zur Turiner Ausstellung 1898 ausgegebene Schrift gibt zunächst die Geschichte der genannten technischen Hochschule Sc. d. Appl. Diese ist durch königliches Decret vom 30. Juli 1863 gegründet an Stelle der alten Hochschule für Ingenieure der Gewässer und Strassen. Es folgt dann die Organisation der Schule, das

Namenverzeichniss des Personals, Stundenplan der Lectionen, 17 Programme, Cabinette und wissenschaftliches Material, statistische Angaben u. s. w. H.

Traité de nomographie. Théorie des abaques, Applications pratiques. Par Maurice d' Ocagne, Ingénieur des ponts et chaussées, Professeur de l' École des ponts et chaussées, Répétiteur à l' École polytechnique. Paris 1899. Gauthier Villars. 480 S.

Der hier gegebenen Erklärung zufolge wird unter Nomographie überhaupt die geometrische Construction einer in der Technik vorkommenden Grössenrelation verstanden. Dient eine solche Construction einem vielfach verschiedenem Gebrauche, so heisst sie ein Abacus. Unter den Anwendungen sind folgende genannt und behandelt. Gleichungen zwischen 2 Variabeln, Functionsscalen, Abaken. Gleichungen zwischen 3 Variabeln, Abaken mit Kreuzungen, Anomorphose Gebrauch eines Transparents mit 3 Indices, sechseckige Abaken, oraphike Anamorphose. Allgemeine Abaken mit abgemessenen Punkten, Abaken mit 3, dann mit 2 parallelen, dann mit nicht parallelen Scalen, dann mit 2 geraden parallelen und 1 krummen: dann mit 3 krummen Scalen, Anwendung der Methode der Punkte abgemessen nach den empirischen Gesetzen, Abaken mit doppelter, meist transversaler Abmessung. Systeme von 2 Gleichungen, Allgemeines, Berechnung der Profile von Wall und Graben. Gleichungen zwischen mehr als 3 Variabeln, Elemente zu mehrern Seiten, Gerade, Punkte zu 2 Seiten, Elemente zu *n* Seiten. Bewegliche Systeme. Allgemeine Theorie, analytische Entwickelungen, Untersuchung der Abaken aus den Gesichtspunkten ihrer Structur, Untersuchung der darstellbaren Gleichungen mittelst eines Typus eines gegebenen Abacus, differentielle und functionelle Charaktere, algebraische Theorie der durch 3 lineare Systeme vermessener Punkte darstellbaren Gleichungen, Darstellung der quadratischen Gleichungen mittelst Gerader und sich kreuzender Kreise. H.

Optik, Akustik und Elasticität.

Leçons élémentaires d' acoustique et d' optique. A l'usage des candidates au certificat d' études physiques, chimiques et naturelles. Par Ch. Fabry, Professeur adjoint à la Faculté des sciences de Marseille. Paris 1898. Gauthier Villars et fils. 356 S.

Der Vortrag ist beschreibend ohne Formulirung und Rechnung. Die mechanischen Grundlagen der Theorie des Schalles und des Lichtes bleiben unberührt und unerwähnt. Die Gegenstände sind folgende: vibratorische Bewegungen. In Betreff der Akustik Tonhöhe, Fortpflanzung, transversale und longitudinale Schwingung. Timbre. In Betreff der Optik Fortpflanzung, Reflexion, Brechung, Prismen, Linsen, Systeme optischer Centra, Dispersion, Spectra, Farben der Körper, Achromatismus, optische Instrumente, das Auge Geschwindigkeit des Lichts, Undulation, Interferenz, Diffraction, Doppelbrechung, Polarisation, Photometrie. H.

Im Reiche des Lichtes. Sonnen, Zodiakallichte, Kometen Dämmerungslicht-Pyramiden nach den ältesten ägyptischen Quellen Von Herman Gruson. — Zweite, gänzlich umgearbeitete Auflage. Mit 57 Figuren und 5 Tafeln, zum Teil in farbiger Ausführung. Braunschweig 1895. George Westermann. 263 S.

Das Vorliegende ist kein Lehrcursus, sondern bietet den Unkundigen, welche Freude an Betrachtung der Lichterscheinungen des Himmels und der Erde haben, reichliche Mitteilung aus den Resultaten der Wissenschaft über daran sich knüpfende Fragen nebst der Geschichte des Altertums dar. Die Gegenstände sind folgende: Wärme und Licht, die Himmelskörper, das Tierkreislicht. H.

Zur Theorie der Spiegelung des Regenbogens an einer ruhigen, Wasserfläche. Von Dr. Otto Handel, Realgymnasiallehrer. Abhandlung zum Jahresberichte Ostern 1887. König Wilhelms Schule zu Reichenbach in Schlesien. Mit einer Figurentafel. 4°. 19 S.

Tyndall hatte in seiner Vorlesung über Optik dahin entschieden, dass ein Spiegelbild des Regenbogens nicht gleichzeitig mit dem directen Bilde gesehen werden könne. Eine Reihe angeführter Versuche stimmen hiermit nicht: ein Spiegelbild wird, einen Specialfall ausgenommen, jedesmal gesehen. Der Verfasser berechnet den Vorgang; seine Herleitung ist jedoch nur in sehr abgekürzter Weise mitgeteilt. Seine Resultate sind folgende. Bei horizontaler Richtung der Sonnenstrahlen liegt der Gipfelpunkt des reflectirten Bogens um die doppelte Höhe des Auges über dem Wasser tiefer als der des direct gesehenen Bogens gleicher Farbe; die gleichartigen Enden beider Bogen berühren sich; das Spiegelbild selbst ergänzt den über Wasser sichtbaren Bogen zu einem Vollkreise, dessen Centrum ebenso hoch über dem Wasser liegt als das Auge. Das Areal, welches das

Wasser wenigstens decken muss, wenn das Spiegelbild dem Beobachter vollständig sichtbar sein soll, ist durch 2 coaxiale Hyperbelzweige und die Regenwand begrenzt. Der Gipfelpunkt und der Mittelpunkt des gespiegelten Bogens liegen um die doppelte Höhe des Auges über dem Wasser tiefer als die entsprechenden Punkte des direct sichtbaren Bogens gleicher Farbe; die Ebenen beider Bogen haben parallele Lage. Bei constanter Sonnenhöhe erscheinen die Gipfel des direct sichtbaren und reflectirten Bogens um so näher an einander gerückt, je geringer die Höhen des Auges über dem Wasser im Verhältniss zu der horizontalen Entfernung der die höchsten Punkte des Bogens erzeugenden Tropfen ist. Das Areal, welches das Wasser wenigstens decken muss, wenn der reflectirte Bogen dem Beobachter vollständig sichtbar sein soll, ist von der Regenwand und 2 Hyperbelzweigen begrenzt, deren gemeinsame Hauptaxe in der durch Auge und Sonne bestimmten Verticalebene liegt. Die horizontale Entfernung der Scheitel beider Curvenzweige vom Auge ist ebenso wie der Abstand der Scheitel um so grösser, je höher die Sonne steht; den kleinsten Wert hat jede der 3 Grössen, wenn sich die Sonne im Horizont befindet. Die Begrenzungssehne des reflectirten Bogens ist und erscheint im allgemeinen kürzer als die Sehne des direct gesehenen Bogens gleicher Farbe. Bei irgend einem bestimmten Stande der Sonne findet eine Annäherung oder Entfernung der gleichfarbigen Enden des direct gesehenen und reflectirten Bogens statt, je nachdem der Beobachter seinen Standpunkt erniedrigt oder erhöht, ohne seinen Abstand von der Regenwand zu ändern. Wenn die Sonnenhöhe z abnimmt, so wächst unter sonst gleichen Verhältnissen die Sehne, über welcher der gespiegelte Bogen sich spannt, bis zu ihrem Maximalwerte, welchen sie für $z = 0$ erreicht. Nur im letztern Falle berühren sich die correspondirenden Enden des reflectirten und direct gesehenen Bogens. H.

Les radiations nouvelles. Les Rayons X de la photographie à travers les corps opaques. Par Ch. Ed. Guillaume, Docteur ès sciences, Adjoint au Bureau international des poids et mesures. Deuxième édition. Paris 1896. Gauthier Villars et fils. 141 S.

Im 2. Capitel werden die Röntgen'strahlen beschrieben und hergeleitet, das Spectrum, die Ausstrahlung und Absorption, die anomale Refraction, das ultraviolette Licht, akustische Analogien, Phosphorescenz und Fluorescenz, die Energie und die Vision behandelt. Dann folgt die Elektrolyse, die Entladung in den Gasen, erste, zweite Periode, die Xstrahlen, Versuch einer Theorie, Anwendungen, verschiedene Phänomene. H.

Physik.

Eine Theorie des elektrischen Stromes auf Grund des Energieprincipes. Von Dr. Ch. Ernst. München 1897. Dr. H. Lüneburg. 64 S.

Es wird gezeigt, wie man die Gesetze und die wichtigsten Sätze des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik aus dem Faraday'schen Inductionsgesetze deductiv ableiten kann. Es kommt ein einheitliches Massensystem, das sogenannte praktische in Anwendung. Es wird nach einander behandelt: der elektrische Energiestrom, das Gesetz der producirten Wärmeenergie, das Gesetz der producirten und consumirten chemischen und thermischen Energie, das Gesetz der transportirten elektrischen Energie, das magnetische Feld, magnetische Kraftlinien, Umschlingen und Schneiden von Linien im positiven und negativen Sinne, Zahl der Schnitte, Zahl der Umschlingungen, das Gesetz der producirten und consumirten mechanischen und magnetischen Energie, die fundamentale Gleichung des elektrischen Stromes, Verzweigung eines elektrischen Stromes, ein Stromstück in einem beliebigen constanten Felde, ein Stromelement darin, ein Stromstück im Felde eines Magnetpoles, ein Stromelement darin, endlose gerade Strombahn, kreisförmiges Stromstück, geschlossener Weg eines Poles um ein geschlossenes Stromstück, das magnetische Feld eines Stromstückes, Inductanz einer Curve gegen ein Stromstück, Selbstinductanz eines Stromstückes, Satz über die gegenseitige Inductanz, ein System von Strömen, Veränderung eines solchen bei constanten Lagen, bei constanten Stromstärken, allgemeine Differentialgleichungen eines Systems von Strömen, specielle Fälle, periodischer Wechselstrom, Energieumsätze in Wechselstrom.

H.

Elasticität und Electricität. Von Dr. R. Reiff, Professor am Gymnasium zu Heilbronn. Freiburg i. B, und Leipzig 1893. J. C. B. Mohr. 181 S.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, die Theorie der Elektricität der Theorie der Elasticität analog und Punkt für Punkt entsprechend darzustellen Dazu eigne sich, räumt der Verfasser ein, die gewöhnliche Theorie der Elasticität nicht, wol aber das von W. Thomson aufgestellte quasielastische Medium, bei welchem nicht die Dilatationen, sondern die Drehungscomponenten den magnetischen Kräften zugeordnet werden. Es werden behandelt: die Differentialgleichungen des elastischen und des absorbirenden Mediums, die Analogien zu den Erscheinungen der ruhenden Elektricität, die

Analogien zu den Erscheinungen der stationären Ströme und des ruhenden Magnetismus, die Beziehungen zwischen der Wirbelbewegung und den Geschwindigkeiten, der Elektromagnetismus, die Inductionserscheinungen in absorbirenden und elastischen Körpern, Anwendungen auf die Optik. H.

Elektricität und Licht. Einführung in die messende Elektricitätslehre und Photometrie. Von Dr. O. Lehmann, Grossh. Bad. Hofrath und Professor an der technischen Hochschule zu Karlsruhe. Mit 220 Holzstichen und 3 Tafeln. Braunschweig 1895. Friedrich Vieweg und Sohn. 390 S.

Es wird behandelt: die Polstärke, die Stromstärke, die Elektricitätsmenge, elektrische Schwingungen, elektrische Strahlung, Elektrolyse, elektrische Ladungen, die Lichtstärke. H.

100 einfache Versuche zur Ableitung elektrischer Grundgesetze. Von Prof. Fr. Busch. Mit 18 Figuren. Zweite Auflage. Münster 1897. Aschendorff. 36 S.

Die Schrift unternimmt es zu zeigen, wie man die Grundgesetze der Reibungselektricität an der Hand von ganz einfachen und kostenlos auszuführenden Experimenten ableiten kann; dazu genügen einige Blätter Papier, einige Stangen Siegellack und einige Meter Draht vollständig, um mit Hülfe einiger leicht herzustellenden Vorrichtungen jenen Zweck zu erreichen. In 2. Auflage hat indes der Verfasser zugunsten einiger der letzten Versuche den Gebrauch einer vom Techniker zu liefernden Vorrichtung zugezogen, nämlich das Gabelelektroskops. Es werden nach einander folgende Gebiete der Elektricitätslehre der Beobachtung eröffnet. Allgemeine Eigenschaften der elektrischen Kraft. Leiter und Nichtleiter der Electricität. Das Gabelelektroskop. Positive und negative Elektricität. Das Gesetz der elektrischen Anziehung und Abstossung. Elektrische Verteilung. Wesen der Elektricität. Elektrische Verteilung durch Verteilungselektricität — auf Nichtleitern. Freie und gebundene Elektricität. Der Elektrophon. Die Wirkung der Spitzen. Nach den Versuchen werden die Folgerungen zur Begründung der Theorie gezogen. H.

Cours élémentaire des manipulations de physique. À l'usage des candidats aux écoles et au certifitat des études physiques naturelles.

Par M. Aimé Witz, Docteur ès sciences, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur aux Facultés Catholiques de Lille. Deuxième edition, revue et augmentée. Paris 1895. Gauthier Villars et fils. 118 S.

Auf den vorliegenden elementaren Cursus folgt noch ein höherer Cursus für Candidaten des Licentiats. Manipulationen sind: Operationen des Messens; fundamentale Beobachtungen; Dichten; Wärme (Ausdehnung); Aenderung des Aggregatzustands; Calorimetrie; Elasticität; Optik; Akustik. H.

Cours de physique de l' École polytechnique. Par M. J. Jamin. Premier supplément. Par M. Bouty. Professeur à la Faculté des sciences de Paris. Chaleur, acoustic, optique. Paris 1896. Gauthier Villars et fils. 182 S.

Die Ergänzungen zur Wärmetheorie, Akustik und Optik setzen voraus, dass der Leser mit den Begriffen und elementaren Sätzen der Physik vertraut sei; der grösste Teil enthält Anwendungen. Die Themata sind im einzelnen: Messung der Temperaturen, die Principien der Thermodynamik, Aenderung des Volums und des Aggregatzustandes, Gibbs Theorie der Dissociatiation, osmotischer Druck, kritischer Punkt und Capillarphänomene, Fortpflanzung der vibratorischen Bewegung, insbes. des Schalles, Untersuchung der Vibrationen, Fortpflanzung des Lichtes und Diffraction, Interferenz und ihre Anwendungen. H.

Die physikalischen Erscheinungen und Kräfte, ihre Erkenntniss und Verwertung im praktischen Leben. Von Professor Dr. L. Grunmach. Leipzig 1898. Otto Spamer. 618 S.

Das Werk handelt vom Messen, vom Schall, vom Lichte, von der Wärme, vom Magnetismus, von der Elektricität, vom Galvanismus, von den Wirkungen des galvanischen Stromes. Gleich im Anfang wird als wesentlich charakteristisch hervorgehoben, dass die Naturerkenntniss sich erst dadurch auf ihren jetzigen Stand erhoben hätte, dass sie die bisher nur qualitativ aufgefasste Erscheinung auch quantitativ erforschte. Damit steht aber das Verfahren im ganzen Buche in starkem Widerspruch. Der Verfasser musste doch wissen, dass die Mathematik die Lehre von der Grösse ist, dass also ohne Mathematik quantitative Beziehungen nicht verstanden werden können. Gleichwol hat er allen mathematischen Ausdruck der entdeckten Gesetze verbannt und verschwiegen; die genauen Messungen, denen er die Fortschritte der Wissenschaft zuschreibt, können

nur als ganz mässig bei den Entdeckungen erscheinen, weil mit den Masszahlen doch nirgends gerechnet wird; in die Theorie wird der Leser gar nicht eingeführt, er bekommt nur vom Treiben der Gelehrten etwas von aussen zu beschauen. Demnach sind die Worte des Titels teils überhaupt nicht, teils nur mit einschränkender Deutung zutreffend: die Erscheinungen und Kräfte sind nur von qualitativer Seite dargestellt, und die Erkenntniss, sofern die Theorien nicht mathematisch bestimmt ausgesprochen sind, ist überhaupt dem Leser nicht zu eingehendem Verständniss erforderlich mitgeteilt. Das Verdienstliche des Werks müssen wir daher hauptsächlich in die reichlichen historischen und litterarischen Angaben, unterstützt durch zahlreiche Porträts und Abbildungen setzen.

Hoppe.

Litterarischer Bericht
LXVIII.

Lehrbücher.

Lehrbuch der Stereometrie nebst zahlreichen Uebungen und einem Abschnitt über Krystallographie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie für den Selbstunterricht bearbeitet von Dr. P. Sauerbeck, Professor am Gymnasium in Reutlingen. Mit 222 Abbildungen. Stuttgart 1900. Bergsträsser. (Preis: Mark 5.40.)

Das Buch, welches für die Bedürfnisse der Schüler höherer Lehranstalten geschrieben ist, stellt sich die Aufgabe, die räumliche Anschauung gegenüber der algebraischen Rechnung mehr zu pflegen. Die drei ersten Abschnitte, welche von Punkten, Geraden und Ebenen handeln, schliessen daher mit einem Abriss der darstellenden Geometrie. Der vierte Abschnitt bringt eine Darstellung der Krystallographie, im fünften werden die regulären Polyeder und die Kugel behandelt, im sechsten die Rotationskegel und die schiefen Kegel, die Kegelschnitte und die Rotationsflächen zweiten Grades, ferner die Kugelprojectionen. Der siebente Abschnitt enthält Volumenberechnungen.

Elemente der Geometrie der Lage, für den Schulunterricht bearbeitet von Dr. R. Böger, Professor am Realgymnasium des Johanneums in Hamburg. Mit 33 Figuren. Leipzig 1900. Göschen. (Preis 90 Pf. cartonniert.)

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die Betrachtungsweisen der projectiven Geometrie in den Unterricht am Realgymnasium einzuführen. Nachdem der Schüler mit den metrischen Definitionen

der Kegelschnitte vertraut gemacht ist, soll eine Theorie der Kegelschnitte auf Grund der Geometrie der Lage gelehrt werden. Einen Abriss derselben mit einer reichen Aufgabensammlung (74) enthält das vorliegende Heft.

Elementare Experimentalphysik für höhere Lehranstalten, bearbeitet von Dr. Johannes Russner, Professor an der Königl. Gewerbe-Akademie zu Chemnitz. Erster Teil: Mechanik fester Körper. Mit 164 Abbildungen im Text. Hannover 1900. Jänecke. (Preis gebunden Mark 3.60.)

Das Buch, welches aus der Praxis des Unterrichts hervorgegangen ist, ist hauptsächlich für Schüler an technischen Mittelschulen bestimmt. Es enthält deshalb eine Aufgabensammlung und bei den Beispielen auch die wichtige Angabe der Dimensionen der physikalischen Grössen.

Sammlungen.

Realistische Chrestomathie aus der Litteratur des klassischen Altertums von Max C. P. Schmidt, Gymnasialprofessor in Berlin. In drei Büchern. I. Buch. Mit 56 Figuren. Leipzig 1900. Dürr. (Preis geh. Mark 2.40.)

Die Sammlung enthält eine Reihe von griechischen Texten aus Euclid I und II, aus Ptolemaeus, Nicomachus und Diophant, nebst einer Einleitung, in welcher die Autoren und ihre wissenschaftlichen Leistungen nebst ihrer Bedeutung für die Entwickelung der Mathematik kurz dargestellt sind.

Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Schulausgabe. Bearbeitet von Dr. F. G. Gauss. Halle 1900. Eugen Strien. (Preis gebunden Mark 1.60.)

Ausser den Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen enthält die Tafel Quadratzahlen, die Zahlen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Sehnen, siebenstellige Logarithmen der Zahlen von 1,000 bis 1,120 (zur Rentenrechnung) und eine Reihe Naturkonstanten. Tritt die Zahl 5 an letzter Stelle auf, so ist angegeben, ob nach oben oder nach unten abgerundet ist.

Analysis und Differentialgleichungen.

Synopsis der höheren Mathematik von Johann G. Hagen S. J., Director der Sternwarte des Georgetown College, Washington D. C. Dritter Band (in 5–6 Lieferungen à Mark 5.00). Differential- und Integralrechnung. Berlin 1900. Felix L. Dames.

Die erste Lieferung enthält:

I. Abschnitt: Die Elemente der Differentialrechnung. (Anfänge der Infinitesimalrechnung, der Differentialquotient, das Differentiiren, Vertauschung der Veränderlichen.)

II. Abschnitt: Die Elemente der Integralrechnung (Definitionen des bestimmten Integrals; Umformungen des bestimmten Integrals; das Integrieren der einfachsten algebraischen Funktionen; das Integrieren der einfachsten transcendenten Funktionen; näherungsweise Integration.)

III. Abschnitt: Neuere Rechnungsarten. (Derivation mit allgemeinem Zeiger, Cauchy's Residuenkalkül, Quotial und Instaural, Aufzählung verschiedener Methoden kleineren Umfangs.)

IV. Abschnitt: Transformationsgruppen. (Darstellung der Transformationen und Gruppen durch Gleichungen, Definitionen besonderer Eigenschaften, die einer Gruppe zugehörigen Gruppen, die grundlegenden Sätze der Gruppentheorie, Invariante Funktionen und Gebilde, Bestimmung der Transformationsgruppen in beschränkten Fällen, die projectiven Transformationsgruppen.)

Die kubische Gleichung und ihre Aufklärung für reelle, imaginäre und komplexe Wurzeln. Ein Versuch von Thilo von Trotha. Berlin 1900. Wilhelm Ernst und Sohn. (Preis: Mark 2.50.)

Die Schrift enthält eine elementare Methode zur angenäherten Berechnung der Wurzeln der Gleichungen dritten Grades. Der Verfasser, der mit den Lehrsätzen und Methoden der Algebra, wie man sie z. B. in Webers Lehrbuch findet, wenig vertraut zu sein scheint, führt eine Reihe neuer und seltsamer Bezeichnungen ein.

Die symmetrische Function der Wurzeln $(x_1 x_2 x_3)$:

$$(x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (x_1 - x_3)^2 = s$$

wird als „der kleine Schlüssel", die Function

$$(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)(2x_1 - x_2 - x_3) = S = A \,.\, B \,.\, C$$

als „der grosse Schlüssel" bezeichnet.

Aus dem ganz willkürlichen Ansatz

$$A = s^{\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}}$$

folgt dann

$$S = D \,.\, E$$

wo

$$D = s^{\frac{3}{2}}$$ „der allgemeine Faktor“ und

$$E = \sqrt{(3 - z)^2 z}$$ „der besondere Faktor“ genannt wird.

Durch Interpolation kann man nun mit Hülfe einer Tabelle aus dem bekannten Wert von S und s z bestimmen, daher auch A und hieraus B und C durch Ausziehen von Quadratwurzeln; hieraus endlich erhält man x_1 x_2 und x_3. Für imaginäre Werte von E erleidet die Methode eine Modification.

Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen in vierter Auflage neu barbeitet von Heinrich Weber, Professor der Mathematik an der Universität Strassburg. Erster Band. Mit eingedruckten Abbildungen. Braunschweig 1900. Vieweg.

Aus den Riemann'schen Vorlesungen (in den früheren Auflagen von Hattendorf veröffentlicht) ist ein vollständig neues Werk geworden, von dem hier der erste Band vorliegt. Der Herausgeber hat die Theorie der Electricität und des Magnetismus neu hinzugenommen, wobei nicht nur die Theorie der Electrolyse in einem besonderen Abschnitt behandelt wird, sondern auch die Maxwell'sche Theorie entwickelt wird. Dadurch wird im Sinne Riemanns das Werk weitergeführt, der ja schon eine gemeinsame Quelle für die verschiedenen Naturerscheinungen suchte, wie sie später in der Maxwell'schen Theorie sich ergeben hat. Auch sind Riemanns eigene Untersuchungen (z. B. seine Theorie der Nobilischen Farbenringe) in grösserem Umfang in das Werk aufgenommen als bisher. Dass die Frage nach den Grundsätzen und die modernen Hülfsmittel (Vectorenrechnung) der mathematischen Physik eine eingehende Berücksichtigung gefunden haben, sei noch besonders hervorgehoben.

Dass die Riemann'schen Vorlesungen, die wie kein anderes Werk, mathematische Strenge (z. B. in der Theorie der Fourier'schen Reihen) mit einer Fülle von physikalischen Kenntnissen vereinigen, auch in dieser neuen Gestalt eine grosse Verbreitung finden werden, ist sicher.

Physik.

Die Gravitation der kleinsten Massenteilchen von J. Jos. Gilles, Professor am Königl. Gymnasium in Essen. Essen 1900. G. D. Bädeker. (Preis: Mark 1.20.)

Im Gegensatz zu der in den letzten Jahrzehnten herrschenden Tendenz, die Fernewirkung aus der theoretischen Physik zu verbannen, ist der Verfasser der Ansicht, dass man umgekehrt die Erscheinung des Stosses durch Fernewirkung erklären kann. Stosswirkungen (wie sie Isenkrahe annimmt) können nur qualitativ die Fernewirkung erklären, niemals quantitativ das Gravitationsgesetz ergeben. — Durch Annahme einer geeigneten Anordnung der Atome gelingt es, die Cohäsionserscheinung durch Gravitation zu erklären.

Papers on Mechanical and Physical Subjects by Osborne Reynolds, F. R. S. etc. etc. Reprinted from various transactions and journals. Vol. I. Cambridge 1900. University Press. (Price 15 sh.)

Sammlung der Abhandlungen des Verfassers aus den Jahren 1869—1882, enthält Abhandlungen über Reibung, über den Molecularzustand der Gase und über kosmische Physik (Wirkung des Blitzes, Schallveränderung durch Nebel, Einwirkung des Regens auf die bewegte See, Bildung von Hagel und Regentropfen, Wirkung des Oels auf Wellen u. s. w.) sowie nautische Untersuchungen (Steuerung von Schiffen).

Bei der Redaktion eingegangene Schriften:

Geometrie und Algebra.

Ebene Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Dr. Karl Schwering, Direktor des Kaiser-Wilhelms-Gymnasiums in Trier und Dr. Wilhelm Krimphoff, Oberlehrer am Gymnasium in Paderborn. Dritte Auflage. Mit 151 Figuren. Freiburg im Breisgau 1900. Herder. (Preis Mark 1.60, gebunden Mk. 1.95.)
(Vgl. Litterarischer Bericht 51, p. 31, und 63, p. 25.)

Synthetische Geometrie der Kegelschnitte für die Prima höherer Lehranstalten von Prof. Dr. J. Lange, Direktor des Königstädtischen Realgymnasiums in Berlin. Mit 55 Figuren im Text Zweite verbesserte Auflage. Berlin 1900. H. W. Müller. (Preis: Mark 1.20, gebunden Mark 1.50.)

Geometria rettilinea e curvilinea metodo preeuclideo e cronogoniometria per Enrico Bagnoli. Roma. Löscher.

Trattato delle cor de nel circolo per E. Bagnoli. Roma. Löscher.

Monatshefte für Mathematik und Physik. XI. Jahrgang. 1900. 2. und 3. Vierteljahr. Wien. Verlag des Math. Seminars.

American Journal of Mathematics. Vol. 22, No. 2. April 1900. Baltimore. The Johns Hopkins Press.

Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag van de gewone Vergadering der wis- en natuurkundige Afdeeling. 26. V. 1900. 30. VI. 1900.

Die Schulalgebra als niederste Analysis. Herrn Dr. Felix Klein, o. ö. Professor der Universität Göttingen, in Hochverehrung gewidmet von Aug. Moroff, k. Gymnasiallehrer. Programm des k. alten Gymnasiums zu Bamberg für das Schuljahr 1899/1900.

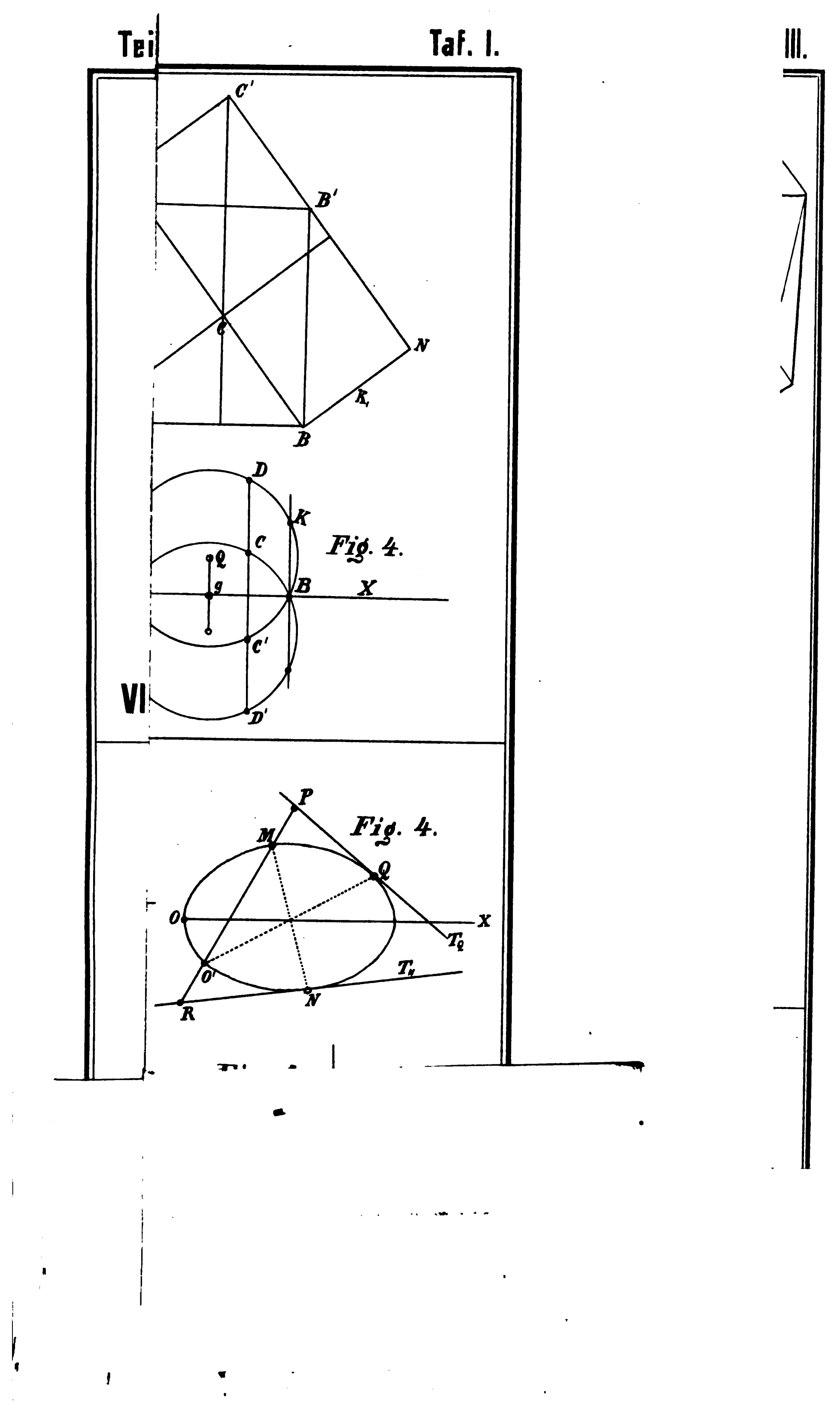
Physik.

Leitfaden für den Unterricht in der Physik an der technischen Militär-Akademie, mit besonderer Berücksichtigung ausgewählter Kapitel, insbesondere der Mechanik, von Albert von Obermayer, K. u. K. Oberst. Mit 709 Abbildungen im Texte. Wien und Leipzig 1900. W. Braumüller. (Preis: 16 Kronen = Mark 13.40.)

Ad. Wernicke's Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung mit Anwendungen und Uebungen aus den Gebieten der Physik und Technik. In zwei Teilen. Erster Teil: Mechanik fester Körper. Von Dr. Alex Wernicke, Director der städtischen Oberrealschule und Professor an der Herzogl. Technischen Hochschule zu Braunschweig. Vierte völlig umgearbeitete Auflage. Erste Abteilung: Einleitung. Phoronomie. Lehre vom materiellen Punkte. Mit eingedruckten Abbildungen. Braunschweig 1900. Vieweg. (Preis geheftet Mark 4.—, gebunden Mark 4.60.)

— Zweiter Teil: Flüssigkeiten und Gase von Richard Vater, Dozent an der Kgl. Technischen Hochschule zu Aachen. Dritte völlig umgearbeitete Auflage. Mit 234 eingedruckten Abbildungen. Braunschweig 1900. Vieweg. (Preis geheftet Mark 5.—, gebunden Mark 5.60.)

Die Photographie im Dienste der Himmelskunde und die Aufgaben der Bergobservatorien. Mit zwölf Gutachten von Fachgelehrten Oesterreichs, Deutschlands und Amerika's über das Projekt der Errichtung einer Sternwarte auf dem Schneeberg. Von Dr. Karl Kostersitz. Mit 23 Illustrationen und 2 Tafeln in Heliogravüre. Wien 1900. Carl Gerold's Sohn. (Preis geh. Mark 1.70.)



Tei
Taf. I.
III.
C'
B'
C
N
K₁
B
D
K
C
Fig. 4.
Q
g
B
X
C'
VI
D'
P
Fig. 4.
M
Q
O
X
T_Q
O'
T_N
N
R

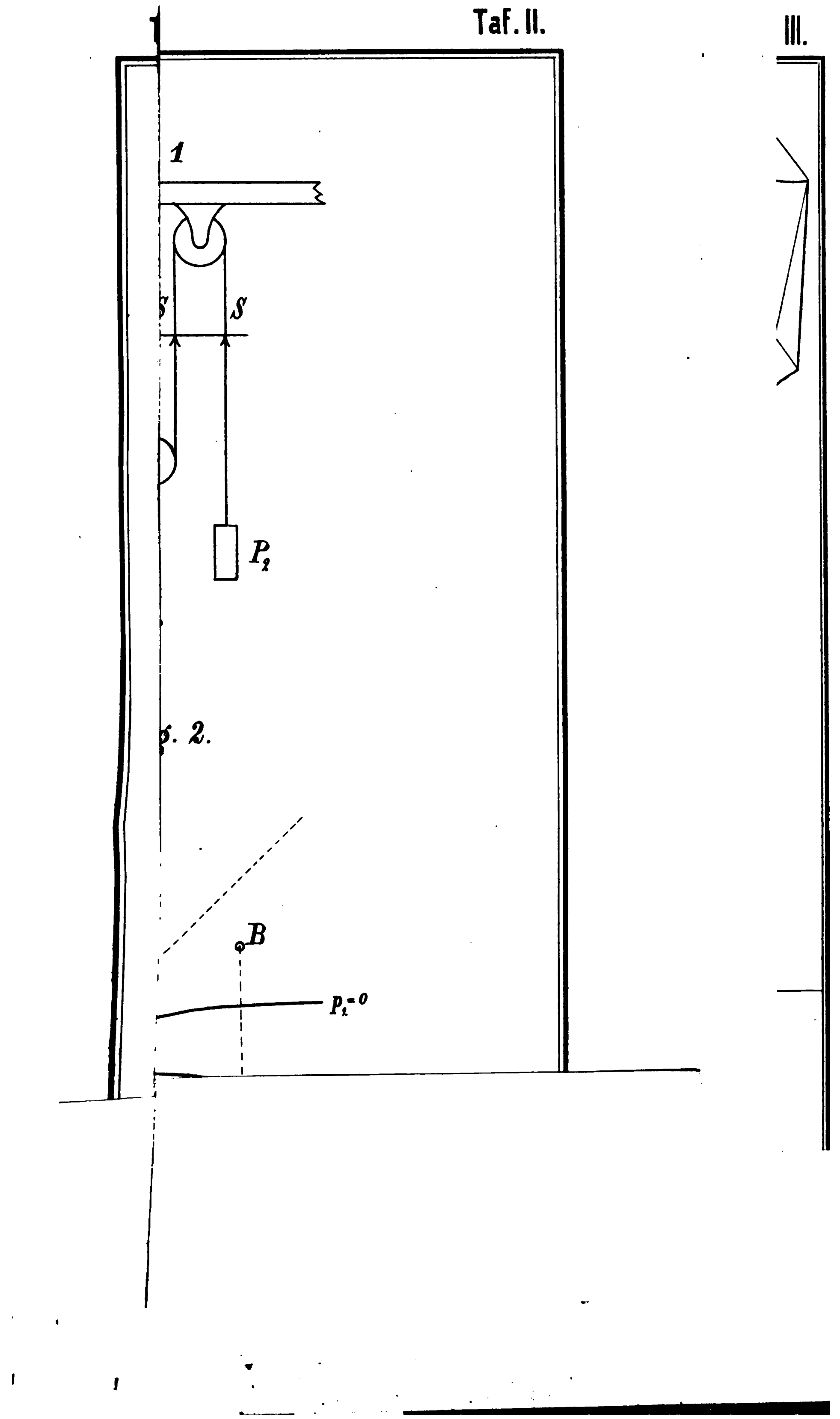

1
S
S
P_2
g. 2.
B
$p_1=0$
III.

Fig. 1.

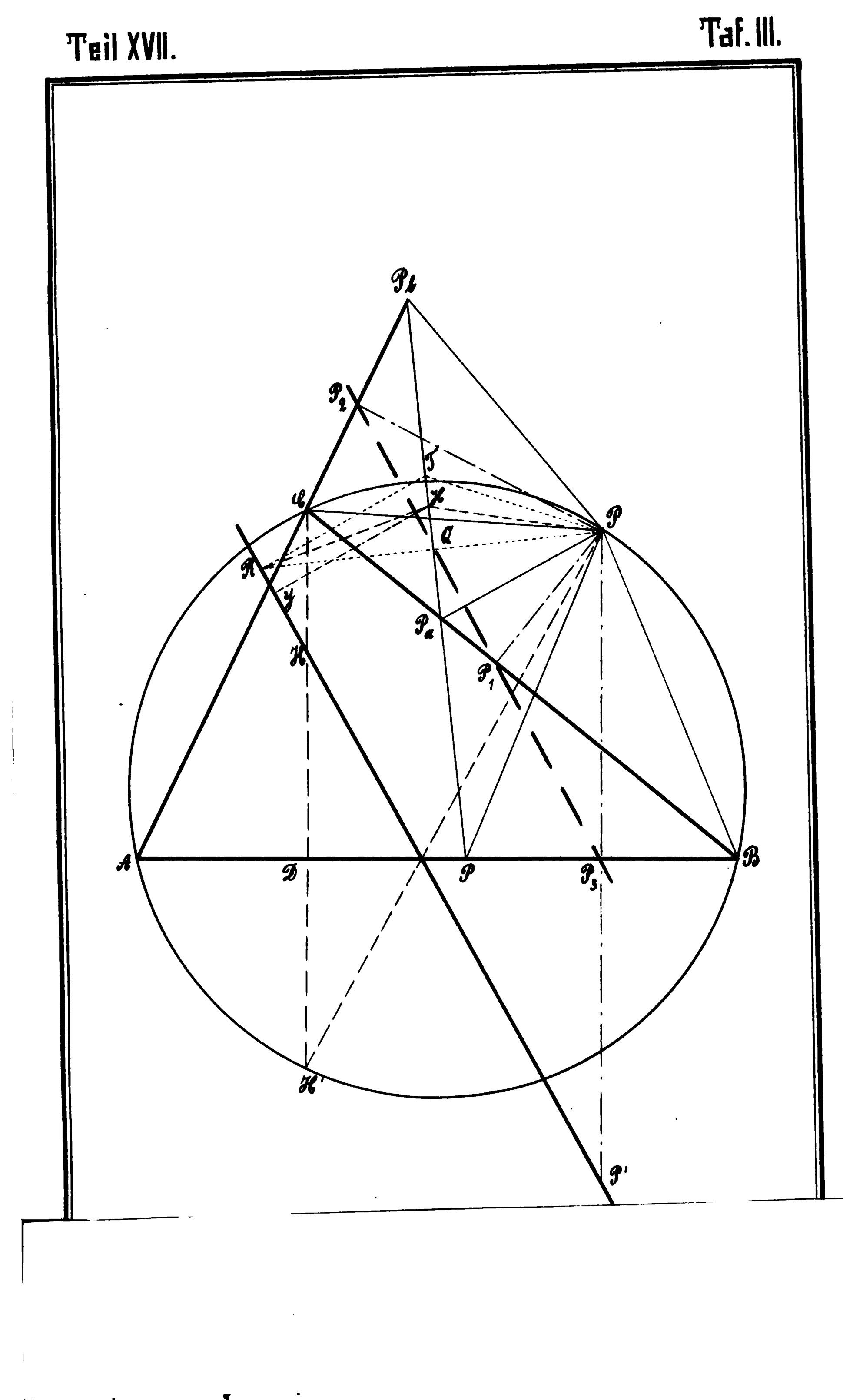
Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

XX. Weinmeister: Körper von quadratischem Querschnitt.




P_b
P_2
T
X
C
P
Q
R
y
P_a
P_1
H
A
D
P
P_3
B
H'
P'

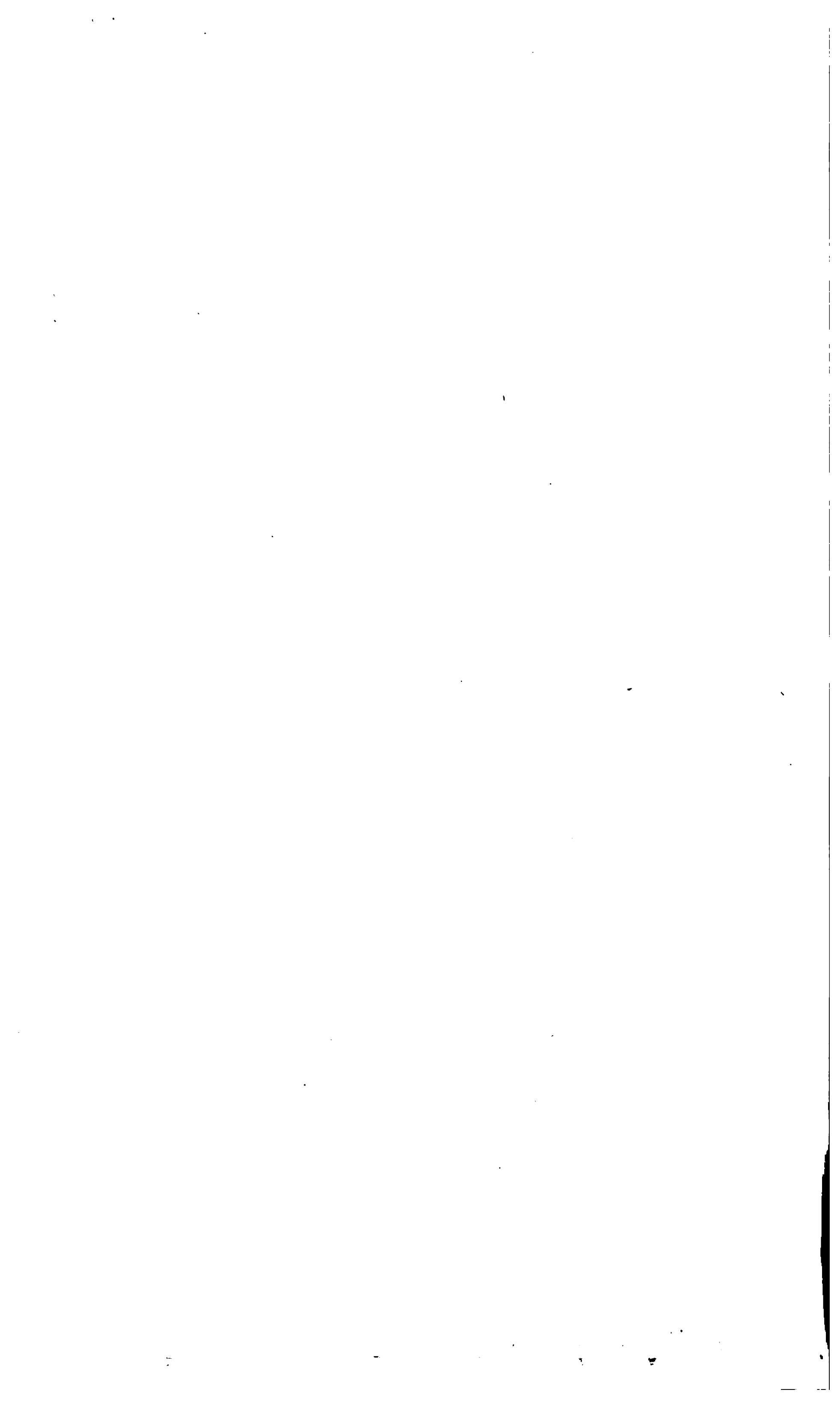
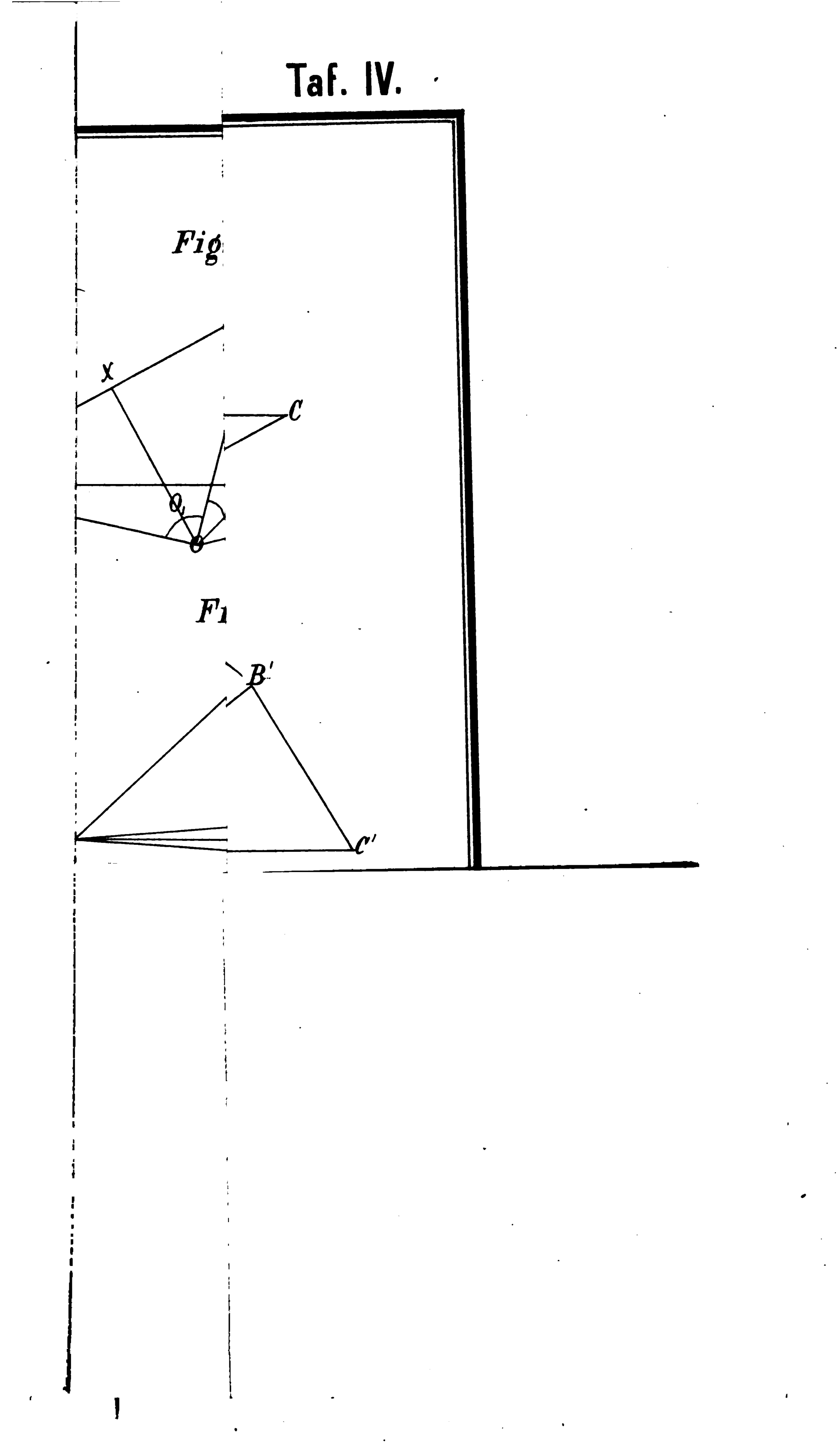
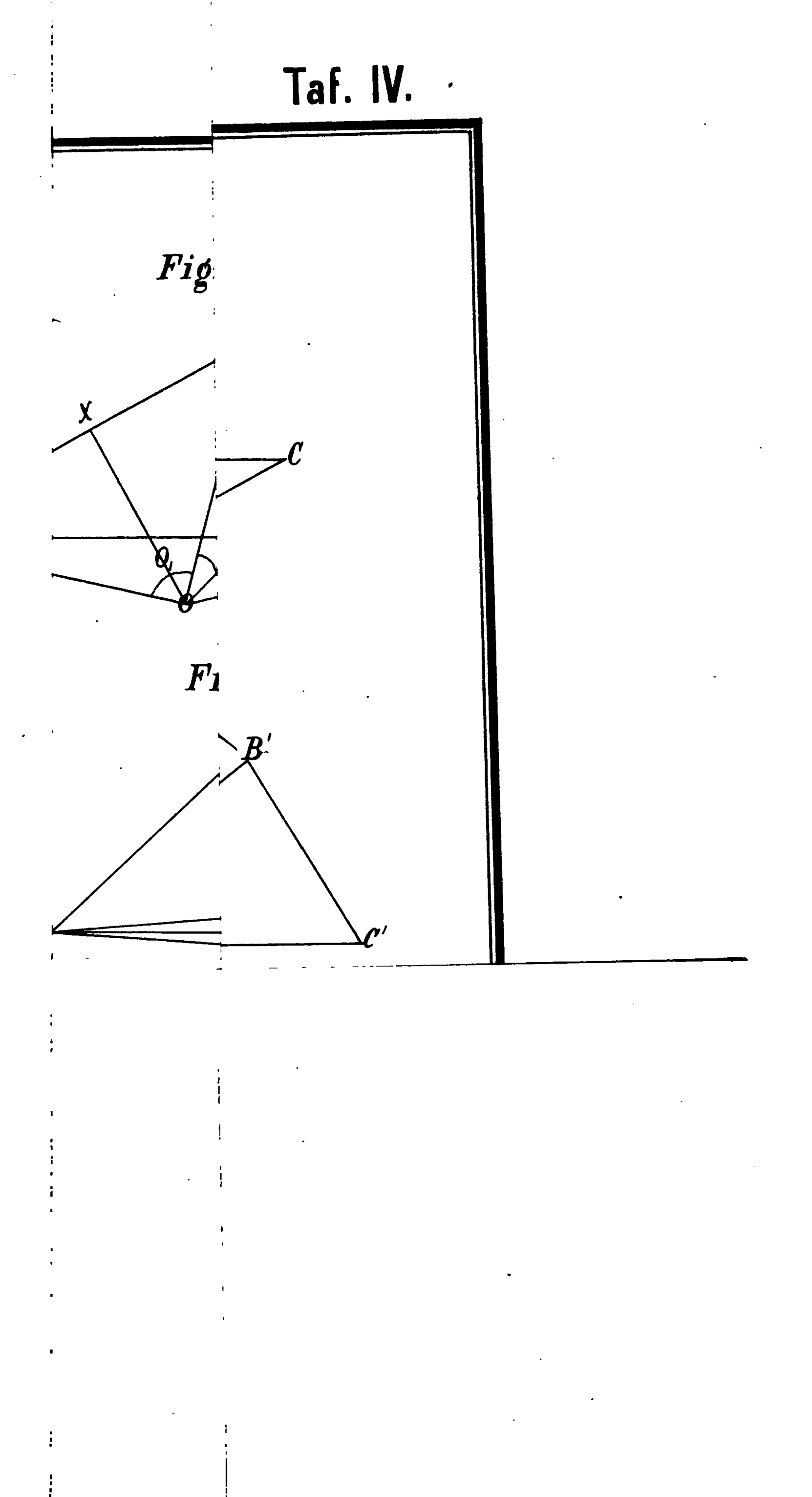


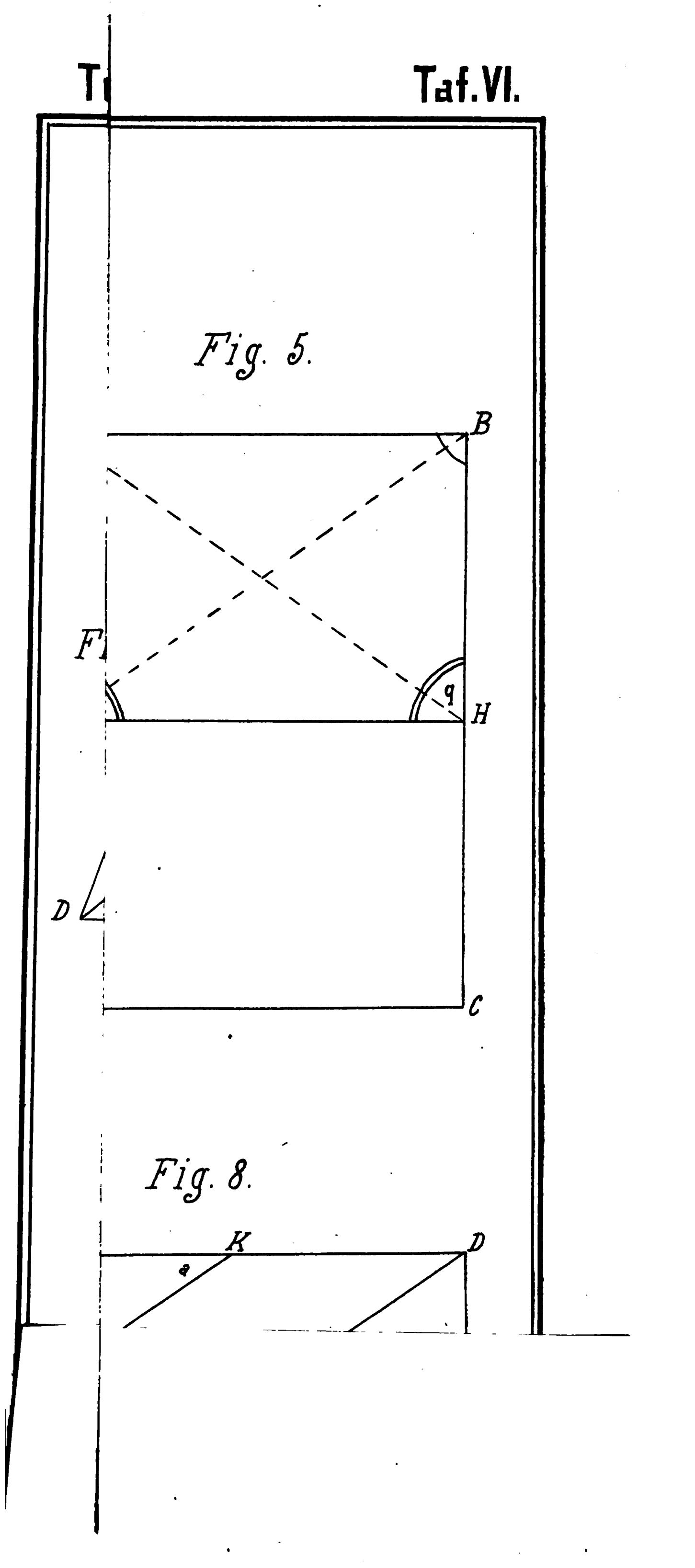
Fig. 1.
D
G
x
C
y
H
E
O
B
F
z
J
Fig. 3.
A
H
J
D
E
B
F
G
C
Fig. 2.
A
H
J
E
D
B
G
C
F
Fig. 4.
A
D
G
B
F
E
C
A
Fig. 5.
D

Taf. IV.



Taf. IV.




Fig. 5.
B
F
q
H
D
C
Fig. 8.
K
D
a

